
Hosted by Google

Lehrbuch

der

Projektivischen (neueren) Geometrie

(Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).

Dritter Teil:

Pol und Polare — Mittelpunktseigenschaften. Involution — Brennpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 550 Erklärungen und 172 in den Text gedruckten Figuren.

Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet von

Prof. Dr. **J. Sachs.**

Bremerhaven und Leipzig.
Verlag von L. von Vangerow.
1907.



Inhaltsverzeichnis.

Projektivische (neuere) Geometrie
(Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).

III. Teil.

Pol und Polare — Mittelpunktseigenschaften. Involution — Brennpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades.

Aufgaben-Sammlung.



Projektivische (neuere) Geometrie

(Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).

III. Teil.

Pol und Polare — Mittelpunktseigenschaften. Involution — Brennpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades.

I. Ueber Pol und Polare.

a) Begründung der Polarität.

Frage 1. Was versteht man unter der Lehre von Pol und Polare?

Erkl. 1. Die Polarität kann gegründet werden sowohl auf die Beziehungen zu einer Kurve zweiter Klasse als auch einer Kurve zweiter Ordnung, also allgemein zweiten Grades. Jede beliebige Kurve zweiten Grades begründet die Zuordnung verschiedener Elementepaare als Pol und Polare, aber durch eine bestimmt ausgewählte Kurve wird jedem Punkte nur eine ganz bestimmte Gerade zugewiesen und umgekehrt.

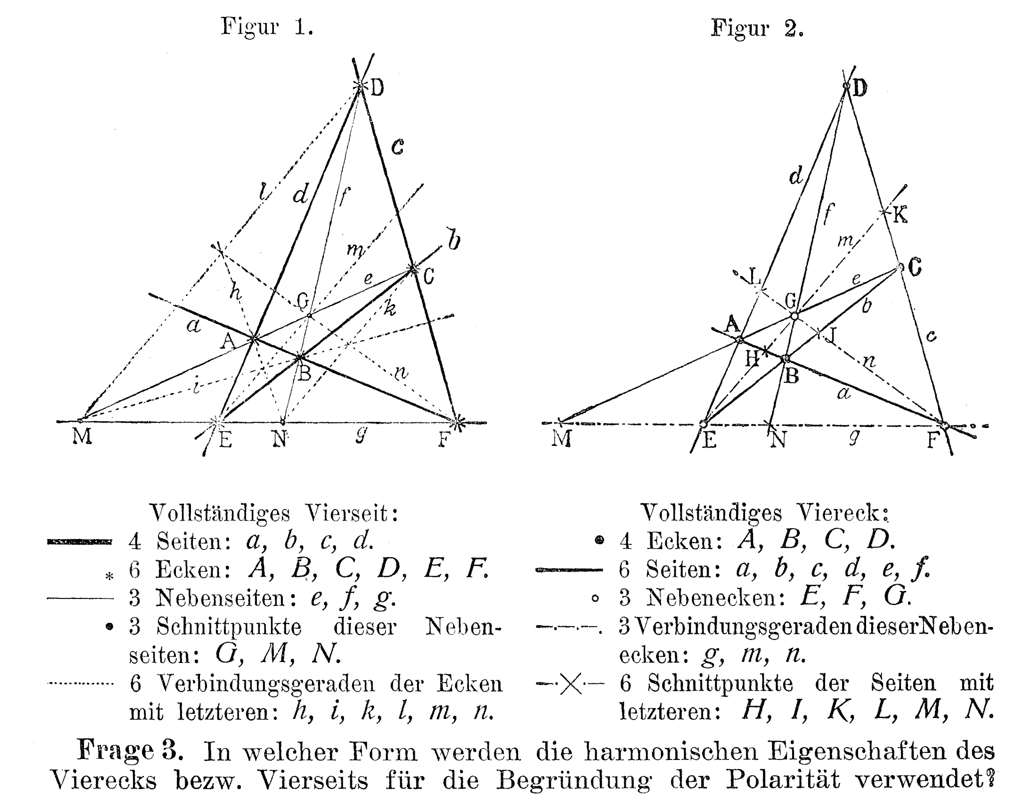
Antwort. Unter der Lehre von Pol und Polare oder unter der Polarität versteht man eine ganz bestimmte Art von Zuordnung je eines Punktes und einer Geraden in der Ebene, indem durch die Beziehungen zwischen diesen Elementen und einer Kurve zweiten Grades zu jeder Geraden der Ebene als Polare ein bestimmter Punkt als Polpunkt, und umgekehrt zu jedem Punkte der Ebene als Pol eine bestimmte Gerade als Polare zugeordnet wird.

Erkl. 2. Bei Uebertragung auf räumliche Anschauungen geschieht die Zuordnung nicht zwischen Punkten und Geraden, sondern zwischen Punkten und Ebenen, und nicht durch die Beziehungen dieser Elemente zu einer Kurve, sondern zu einer Fläche zweiten Grades. Sie heißt dann meistens nicht mehr Polarität, sondern Reziprozität (vergl. Erkl. 101 und 164 im I. Teile dieses Lehrbuches).

Frage 2. Auf welchen Beziehungen an den Kurven zweiten Grades beruht die Lehre von Pol und Polare?

Erkl. 3. Unter den Sätzen von Brianchon und Paskal für Sechseck, Fünfeck, Viereck und Dreieck (vergl. den fünften Abschnitt des II. Teiles dieses Lehrbuches) zeichneten sich diejenigen für Viereck bezw. Vierseit dadurch aus, daß nicht nur drei sondern vier Elemente in vereinigte Lage kamen. Durch Hinzutreten der harmonischen Eigenschaften des Vierecks bezw. Vierseits (s. den ersten Abschnitt des II. Teils) erhöht sich diese Anzahl noch um zwei bezw. vier weitere Elemente.

Antwort. Die Lehre von Pol und Polare beruht auf der Zusammenfassung einerseits der harmonischen Eigenschaften des allgemeinen Vierecks bezw. Vierseits, anderseits der besonderen Eigenschaften, welche nach den Sätzen von Brianchon und Paskal einem einer Kurve zweiten Grades umgeschriebenen bezw. eingeschriebenen Vierseit bezw. Viereck zukommen.



Frage 3. In welcher Form werden die harmonischen Eigenschaften des Vierecks bezw. Vierseits für die Begründung der Polarität verwendet?

Antwort:

Erkl. 4. Nach den Ausführungen in Antwort 2 und Auflösung der Aufgaben 1 bis 5 des II. Teiles hat man

Für die Zuordnung des Polpunktes zu einer beliebigen Geraden findet folgende Eigenschaft des

Für die Zuordnung der Polargeraden zu einem beliebigen Punkte findet folgende Eigenschaft des

in dem vollständigen Viereck bezw. Vierseit der Fig. 1 und 2:

1. vier harmonische Strahlen am Vierseit Fig. 1:
In Ecke A : a, d; und h zu e;
in Ecke B : a, b; und i zu f;
in Ecke C : b, c; und k zu e;
in Ecke D : c, d; und l zu f;
in Ecke E : b, d; und m zu g;
in Ecke F : a, c; und n zu g;

2. vier harmonische Punkte am Viereck Fig. 2:
Auf Seite a : A, B; und H zu F;
auf Seite b : B, C; und I zu E;
auf Seite c : C, D; und K zu F;
auf Seite d : A, D; und L zu E;
auf Seite e : A, C; und M zu G;
auf Seite f : B, D; und N zu G.

Erkl. 5. Die zweite Eigenschaft der harmonischen Beziehung, welche in nebenstehender Antwort herangezogen wird, ist nachgewiesen geometrisch in Antwort 2 und 8 der Frage 7 des II. Teiles, und ergab sich aus den metrischen Betrachtungen der Antwort 35 und 36 des I. Teiles.

vollständigen Vierseits (Fig. 1) Verwendung. In jedem Eckpunkt eines vollständigen Vierseits entstehen vier harmonische Strahlen durch die zwei Hauptseiten dieses Eckpunktes, seine Nebenseite und seine Verbindungsgerade mit dem Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten; und zwar sind zugeordnete Strahlen als erstes Paar die beiden Hauptseiten, und als zweites Paar die durch denselben Eckpunkt gehende Nebenseite zusammen mit der Verbindungsgeraden des Eckpunktes mit dem Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten.

vollständigen Vierecks (Fig. 2) Verwendung. Auf jeder Seite eines vollständigen Vierecks entstehen vier harmonische Punkte durch die zwei Hauptecken auf dieser Seite, ihre Nebenecke und ihren Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden der beiden anderen Nebenecken; und zwar sind zugeordnete Punkte als erstes Paar die beiden Hauptecken, und als zweites Paar die auf derselben Seite liegende Nebenecke zusammen mit dem Schnittpunkt der Seite mit der Verbindungsgeraden der beiden andern Nebenecken.

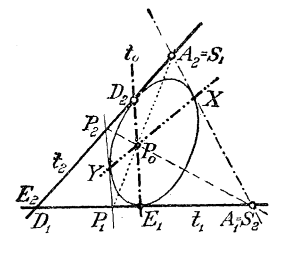
Außerdem gelangt zur Anwendung die Eigentümlichkeit der harmonischen Beziehung, daß wenn irgend zwei von vier harmonischen Elementen in ein gemeinsames Element zusammenrücken, dann auch noch ein drittes von den vier Elementen in dasselbe gemeinsame Element hineinfallen muß.

* * *

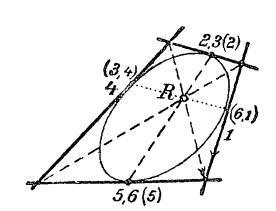
b) Polpunkt zu einer gegebenen Geraden.

Frage 4. In welcher Weise können die vorgenannten harmonischen Eigenschaften des Vierseits mit den in den Sätzen von Brianchon fürs Vierseit ausgesprochenen Beziehungen zusammentreffen?

Figur 3 a.



Figur 3 b.



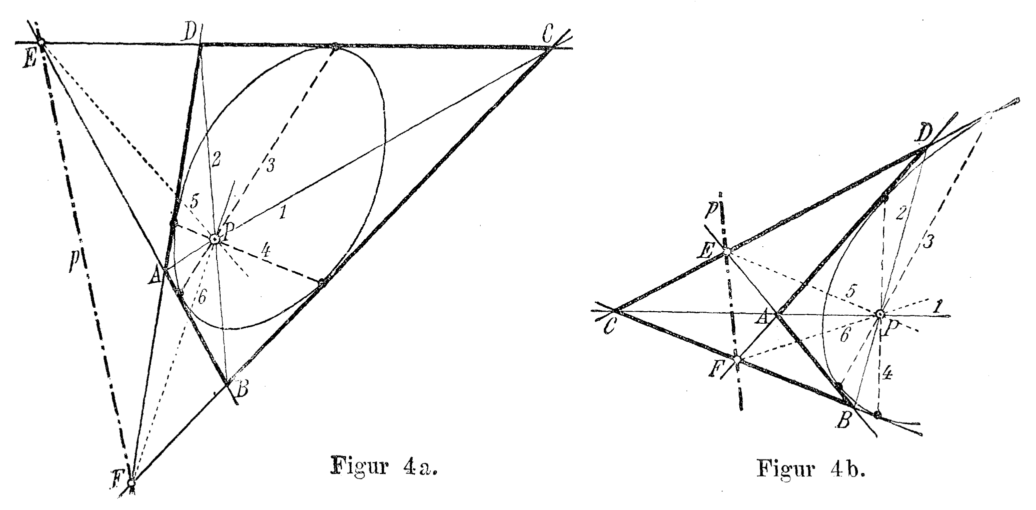
Erkl. 6. Die Untersuchungen über Pol und Polare sind durchweg geeignet zur dualistischen Gegenüberstellung der einzelnen Erörterungen. Nur aus äußerlichen Gründen, besonders aus räumlichen Rücksichten für die Drucklegung wird hier die Doppelführung stellenweise unterbrochen und statt zweier nebeneinander gestellten Antworten die Darstellung in nacheinanderfolgenden Fragen gewählt.

Erkl. 7. In Fig. 3a sind $P_1 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 P_2$, $P_2 P_1$ die vier Seiten des Vierseits, fünfte Ecke $D_1 = E_2$, sechste Ecke der in der Figur nicht besonders gezeichnete Schnittpunkt von $P_1 P_2$, und $A_1 A_2$. Die Verbindungsgerade des letztgenannten Punktes mit D_1 ist die dritte Nebenseite des Vierseits. — In Fig. 3b entsteht dieselbe Nebenseite durch Verbindung der Schnittpunkte der Seiten 1 und 4 bezw. (2) und (5). Eine Erweiterung der Betrachtung gegenüber den Sätzen von Brianchon besteht also darin, daß auch diese weiteren Schnittpunkte der Tangenten in die Untersuchung einbezogen werden.

Antwort. Wenn die vier Seiten des vollständigen Vierseits als Tangenten an eine Kurve zweiten Grades aufgefaßt werden, so lassen sich aus den vier Seiten des vollständigen Vierseits dreierlei einfache um- oder angeschriebene Vierseite bilden, und für jedes dieser drei gilt nach dem Satz von Brianchon (Satz 23c des II. Teiles), daß die Verbindungsgeraden der Gegenecken und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte auf Gegenseiten alle vier durch einen Punkt gehen.

Wählt man daher dasjenige einfache Vierseit, für welches zwei bestimmte der drei Nebenseiten zu Diagonalen werden, so ist der Schnittpunkt dieser Nebenseiten nicht nur derjenige Punkt, durch welchen nach Brianchon die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der Gegenseiten gehen, sondern auch der Punkt, durch welchen für jeden auf der dritten Nebenseite liegenden Eckpunkt des vollständigen Vierseits die vierte harmonische Gerade nach Antwort 3 hindurchgeht.

Frage 5. Wieviel und welche gerade Linien gehen nach den vorigen Ueberlegungen durch den Punkt des Brianchon beim Vierseit?



Figur 4a.

Figur 4b.

Erkl. 8. In Figur 4a und 4b und ebenso später 5 a, b, c sind mit den arabischen Ziffern 1—6 (entsprechend den für Gerade benutzten kleinen Buchstaben) dieselben sechs Geraden bezeichnet, welche laut nebenstehender Antwort durch den Polpunkt P hindurchgehen. Figur 4a ist für eine Ellipse ausgeführt, Figur 4b für einen Kurvenbogen, der tatsächlich zwar ebenfalls einer Ellipse angehört, aber ebensowohl einen Kurvenbogen einer Parabel oder Hyperbel darstellen könnte. Denn da sowohl die harmonischen Beziehungen, als die Sätze von Brianchon für alle drei Gattungen der Kurven ohne Unterschied gelten, so muß dasselbe auch für die Eigenschaften der Polarität der Fall sein.

Erkl. 9. Der Unterschied der Figuren 4a und 4b beruht einzig in der Lage der Punkte E und F auf der außerhalb der Kurve gewählten Geraden p zur Kurve. *Liegen die Punkte* EF weit auseinander, so entsteht das umgeschriebene konvexe, geschlossene Tangentenvierseit der Figur 4a mit Kurve im Innenraum ABCD. Liegen E und F so nahe beisammen, daß der Schnittpunkt C nicht mehr nach jenseits, sondern diesseits der Kurve fällt, so entsteht das angeschriebene geschlossene Tangentenvierseit der Figur 4b mit einspringendem Winkel bei A und Kurve im Außenraum BAD. Das überschlagene Tangentenvierseit tritt für eine außerhalb einer Ellipse liegende Gerade p nicht auf, wohl aber für die Hyperbel (vergl. Aufg. 3 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles).

Antwort. Wählt man die Gerade EF der Fig. 1 bezw. 4 als dritte Nebenseite p eines einer Kurve zweiter Klasse *um- oder angeschriebenen Vierseits*, so gehen durch E und F je *zwei Gegenseiten* des Tangentenvierseits, und folglich gehen *durch denselben Punkt P*:

1. die Verbindungsgerade der Gegenecken A und C,
2. die Verbindungsgerade der Gegenecken B und D,
3. die Verbindungsgerade der Berührungspunkte auf den durch E gehenden Gegenseiten,
4. die Verbindungsgerade der Berührungspunkte auf den durch F gehenden Gegenseiten,
5. die vierte harmonische Gerade durch E zu AB, CD und p,
6. die vierte harmonische Gerade durch F zu AD, BC und p;

und zwar die vier ersten wegen Brianchon, die beiden letzten wegen der harmonischen Vierseitseigenschaften. Und diesen durch die Kurve und die Gerade p bestimmten Punkt P nennt man den *Polpunkt* oder kurz *Pol der Geraden p* inbezug auf die gewählte Kurve; oder man sagt, *der Punkt P sei durch die Kurve zu der Geraden p als Polpunkt zugeordnet.*

Frage 6. Welche *Veränderung* erfährt die Lage des Punktes P der Figuren 4a, b, wenn der *eine* der beiden Punkte E oder F auf p seine Lage verändert?

Erkl. 10. Da sechs Gerade durch P hindurchgehen, so könnte man 15 Paar von je zweien unter denselben bilden, die je zusammen P festlegen, nämlich:

Antwort. Von den sechs Geraden 1 bis 6 der Figur 4a, b sind die Geraden 1 und 2 sowohl von E als von F abhängig, die Geraden

$$
\begin{array}{lllll}
1\,2 & & & & \\
1\,\underline{3} & 2\,\underline{3} & & & \\
1\,\underline{\underline{4}} & 2\,\underline{\underline{4}} & \underline{3}\,\underline{\underline{4}} & & \\
1\,\underline{5} & 2\,\underline{5} & \underline{3}\,\underline{5} & \underline{\underline{4}}\,\underline{5} & \\
1\,\underline{\underline{6}} & 2\,\underline{\underline{6}} & \underline{3}\,\underline{\underline{6}} & \underline{\underline{4}}\,\underline{\underline{6}} & \underline{5}\,\underline{\underline{6}}
\end{array}
$$

Unter den Geraden dieser 15 Paare sind aber die nicht unterstrichenen 1 oder 2 von E und von F abhängig, alle einfachgestrichenen $\underline{3}$ und $\underline{5}$ nur von E, alle doppeltgestrichenen $\underline{\underline{4}}$ und $\underline{\underline{6}}$ nur von F. Es sind also tatsächlich die Paare $\underline{3}\,\underline{5}$ und $\underline{\underline{4}}\,\underline{\underline{6}}$ die einzigen, welche die Bestimmung von P durch einen einzelnen der Punkte E oder F ermöglichen.

Erkl. 11. Auf Grund der Antwort 5 und Figur 4a, b hätte man noch annehmen können, daß jeweils ein anderer Punkt P entstände, wenn man die Punkte E und F auf derselben Geraden p in verschiedener Lage wählte, verschieden etwa nach Fig. 4a oder 4b. Die nebenstehende Ueberlegung zeigt nunmehr, daß die Lage des Punktes P völlig unabhängig von der Lage der beiden Punkte E und F ist; denn P bleibt derselbe sowohl bei veränderlichem F und feststehendem E, als auch umgekehrt bei veränderlichem E und stehendem F. Man erhielte denselben Punkt P, wenn man etwa die verschiedenen Vierecke der Figur 4a und 4b mit gleicher Kurve und gleicher Geraden p zeichnete. Das Vierseit ABCD verliert seine selbständige Bedeutung und rückt auf die Stufe eines vermittelnden Gebildes herab, ebenso wie z. B. die vermittelnden Gebilde $S_1 t_0 S_2$ bezw. $t_1 S_0 t_2$ bei der Konstruktion entsprechender Elemente in zwei projektivisch verwandten Punktreihen $t_1 \overline{\wedge} t_2$ bezw. Strahlenbüscheln $S_1 \overline{\wedge} S_2$ in schiefer Lage. (Vergl. Figuren 26—30 bezw. 31—35 im II. Teile dieses Lehrbuches.)

3 und 5 dagegen nur von der Lage des Punktes E, 4 und 6 nur von der Lage des Punktes F. Da aber zur Festlegung des Punktes P nur zwei Gerade durch ihn notwendig sind, so kann durch die Wahl eines einzigen Punktes E auf p mittels der Geraden 3 und 5 der Polpunkt schon sicher bestimmt werden, und die in voriger Antwort besprochenen sechs Geraden gehen stets durch denselben Punkt P, wo man auch auf der Geraden den Punkt F, also wo man überhaupt beide Punkte E und F wählen mag. Demnach ist tatsächlich die Zuordnung von P zu gegebenem p durch die Kurve einzig abhängig von der Lage der Geraden p zur Kurve, und nicht von der Lage der auf p gewählten Punkte E und F. Das zur Erzeugung des Punktes P dienende Tangentenvierseit besitzt keine wesentliche Bedeutung, sondern bildet nur das vermittelnde Gebilde zur Auffindung des Polpunktes P zur Geraden p.

Frage 7. Welche wichtige Folgerung aus der Willkürlichkeit der Lage von E und F auf p ergibt sich für den Fall, daß die Gerade p die Kurve schneidet?

Erkl. 12. Während die Figuren 4a, b für eine die Kurve nicht schneidende Gerade p durchgeführt waren, geben die Figuren 5a, b, c, die Darstellung für eine die Kurve schneidende Gerade p. Daher treten hier neu auf die Kurvenschnittpunkte X und Y. Der Unterschied der Figuren 5a, b, c beruht allein in der Lage der Punkte E und F auf p in Bezug zur Kurve. Liegen E und F auf verschiedenen Seiten der Kurve, so entsteht unter gleicher Unterscheidung wie zwischen Fig. 4a und b das umgeschriebene oder das angeschriebene geschlossene Tagentenvierseit der Figur 5a oder 5b mit Kurve im Außenraum FAE oder im Innenraum AFCE; liegen aber E und F auf gleicher Seite der Kurve, so entsteht das angeschriebene überschlagene Tangentenvierseit der Fig. 5c mit Kurve im Außenraum AEC oder auch im Innenraum BEDF. Alle drei Vierecksarten treten also schon für die eine Ellipse schneidende Gerade p auf, ebenso Figur 5a und c für Parabel und Hyperbel.

Erkl. 13. Für einen Punkt Z auf p unmittelbar außerhalb X hat man noch zwei getrennte Tangenten und dazwischen als vierte harmonische zu p und derselben die Gerade ZP. Der Winkel AED in Fig. 5a und 5b wird im Punkte X zu Null, während sein Nebenwinkel ein gestreckter wird; ebenso wird im Punkte Y der Winkel AFC in Fig. 5b und 5c zu einem gestreckten, während sein Nebenwinkel AFB in Figur 5b zu Null wird. Und innerhalb dieses Nullwinkels liegt die vierte harmonische Gerade 5 bezw. 6. Dasselbe Zusammenfallen folgt unmittelbar aus der am Schlusse der Antwort 3 genannten Eigenschaft der harmonischen Beziehung, daß wenn von vier harmonischen Elementen (hier Strahlen) zwei zusammenfallen, dann auch ein drittes dazukommt. Hier hat man für E bezw. F die getrennten Elemente EA, ED, p, 5 bezw. FA, FB, p, 6. Wenn also EA und ED bezw. FA und FB zusammenfallen, und zwar nicht mit p, so muß unbedingt

Antwort. Da die Lage der Punkte E und F auf p für die Bestimmung des Punktes P völlig willkürlich ist, so muß unter anderm auch für jeden beliebigen Punkt Z auf p die vierte harmonische Gerade zu p und den beiden Kurventangenten aus dem Punkte Z — durch den festbestimmten Punkt P hindurchgehen. Da dies für jede beliebige Lage des Punktes Z auf p gelten muß, so trifft es auch zu, wenn Z sich einem der Kurvenschnittpunkte von p immer mehr nähert; dabei rücken aber die Tangenten EA und ED bezw. FA und BF immer näher zusammen und schließen dabei doch die Gerade EP = 5 bezw. FP = 6 stets noch zwischen sich ein.

Fällt also der veränderlich gedachte Punkt Z vollends mit einem der Kurvenschnittpunkte X bezw. Y auf der Geraden p (von außen heranrückend) zusammen, so gibt es durch ihn keine zwei getrennten Tangenten mehr an die Kurve, sondern nur noch eine; und zwischen den so in eine Doppelgerade zusammenfallenden beiden Einzeltangenten verläuft noch die vierte harmonische Gerade zu p, nämlich die Verbindungsgerade XP bezw. YP. Nun haben aber diese Geraden XP und YP als Verbindungsgerade zweier festen Punkte eine ganz bestimmte Lage, während über die Lage der Tangenten aus P an die Kurve keinerlei Bestimmung vorliegt; daher folgt umgekehrt aus der vorigen Ueberlegung das wichtige Ergebnis, daß diese Tangenten zusammenfallen müssen mit den Verbindungsgeraden XP bezw. YP von den Kurvenschnittpunkten X bezw. Y auf p nach dem Polpunkt P.

Somit erfährt die Aufzählung der in Antwort 5 genannten, durch den Polpunkt gehenden Geraden noch

das noch übrige Element mit jenen beiden zusammenfallen, nämlich 5 mit EA und ED bezw. 6 mit FA und FB.

Erkl. 14. In Fig. 5a, b, c sind ebenso wie in Fig. 4a und 4b mit den Ziffern 1—8 die acht Geraden bezeichnet, welche bei einer die Kurve schneidenden Geraden p durch den Punkt P hindurchgehen müssen. Wieder ist Fig. 5b für eine Ellipse ausgeführt, Fig. 5a und 5c für Kurvenbogen, die tatsächlich zwar ebenfalls einer Ellipse angehören mögen, aber ebensowohl Kurvenbogen einer Parabel oder Hyperbel darstellen könnten. Da Parabel und Hyperbel sich ins Unendliche erstrecken, so kann für diese Kurven weder die Vierecksart der Figur 4a noch der Figur 5b in gleicher Lage zur Kurve auftreten, sondern nur 4b und 5a und c.

Erkl. 15. Sechs gerade Linien würden im allgemeinen Falle $\frac{6.5}{1.2} = 15$ Schnittpunkte haben; acht gerade Linien würden im allgemeinen Falle $\frac{8.7}{1.2} = 28$ Schnittpunkte liefern. Es fallen also bei der außerhalb der Kurve liegenden Gerade p 15, bei der die Kurve schneidenden Geraden p gar 28 Schnittpunkte in einen einzigen zusammen. Vergleicht man hiermit die Wichtigkeit, welche in der Planimetrie schon jenen Fällen zukommt, wo drei Gerade, statt drei verschiedene Schnittpunkte zu liefern, nur einen Schnittpunkt haben, so lässt sich beurteilen, von welch ungleich höherer Wichtigkeit diese Beziehungen sein müssen, wobei 28 Schnittpunkte in einen einzigen zusammenfallen. In der Tat bilden die Polareigenschaften der Kurven zweiten Grades gewissermaßen den Höhepunkt der an ihnen zu untersuchenden Eigenschaften.

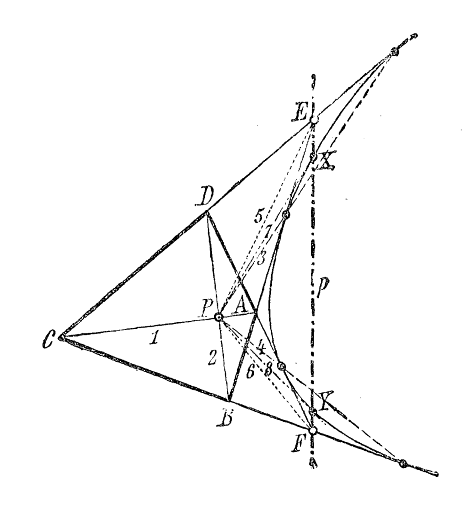
Erkl. 16. Zu den 15 in Erkl. 10 aufgestellten Geradenpaaren, deren Schittpunkt jeweils in den einzigen Punkt P fällt, deren jedes also einzeln die Erweiterung, daß durch den Polpunkt P auch hindurchgehen

7. die Kurventangente im einen, und

8. die Kurventangente im andern der für die Kurve und die Gerade p etwa vorhandenen Kurvenschnittpunkte.

Die Lage dieser beiden neu hinzukommenden Geraden XP und YP steht nun aber gar nicht in Beziehung zur Lage der Punkte E oder F auf p; und folglich kann für eine die Kurve schneidende Gerade p der Polpunkt P ganz unabhängig vom Tangentenvierseit gefunden werden als der Schnittpunkt der Kurventangenten in den Kurvenschnittpunkten der Geraden p.

Figur 5 a.



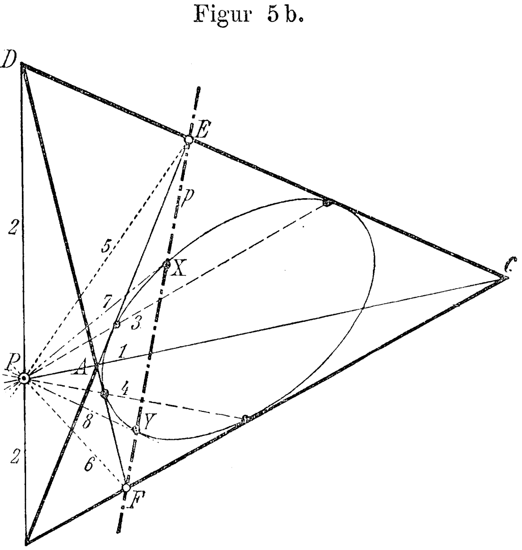
zur Bestimmung von P hinreichen würde, kommen nunmehr noch folgende 13 hinzu:

$$1\underset{\times}{7}\quad 2\underset{\times}{7}\quad \underline{3}\underset{\times}{7}\quad \underline{\underline{4}}\underset{\times}{7}\quad \underline{5}\underset{\times}{7}\quad \underline{\underline{6}}\underset{\times}{7}$$

$$1\underset{\times}{8}\quad 2\underset{\times}{8}\quad \underline{3}\underset{\times}{8}\quad \underline{\underline{4}}\underset{\times}{8}\quad \underline{5}\underset{\times}{8}\quad \underline{\underline{6}}\underset{\times}{8}\quad \underset{\times}{7}\underset{\times}{8}$$

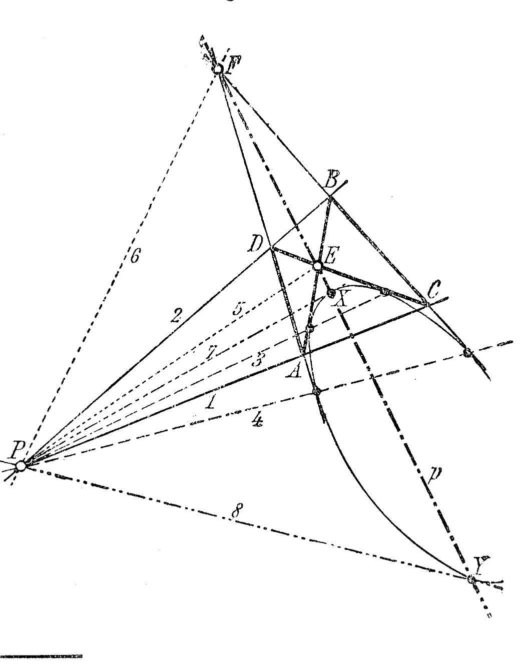
Wieder sind von den Geraden jener Paare die Strahlen 1 oder 2 sowohl von E als von F abhängig, die $\underline{3}$ oder $\underline{5}$ bezw. $\underline{\underline{4}}$ oder $\underline{\underline{6}}$ nur von E bezw. F, aber die $\underset{\times}{7}$ oder $\underset{\times}{8}$ weder von E noch von F. Man kann daher den Polpunkt P bestimmen mittels je einer der Geraden 7 oder 8 zusammen mit einem der Punkte E oder F durch eines der acht Paare $\underline{3}\underset{\times}{7}$ bis $\underline{\underline{6}}\underset{\times}{8}$, aber auch ohne jeden Punkt E oder F allein durch die Geraden $\underset{\times}{7}$ und $\underset{\times}{8}$ mittels des letzten der Geradenpaare, nämlich $\underset{\times}{7}\underset{\times}{8}$.

Figur 5b.



Erkl. 17. War schon aus Antwort 6 und Erklärung 11 zu erkennen, daß das Tangentenvierseit keine unausweichliche Bedeutung für die Beziehung von p und P habe, so tritt diese Unabhängigkeit jetzt dadurch um so deutlicher in Erscheinung, daß der Polpunkt mittels der Tangenten in den Schnittpunkten X und Y von p mit der Kurve sogar ohne jede Mitwirkung des Tangentenvierseits der Punkte E und F gefunden werden kann. Nur der eine Umstand bleibt einstweilen bestehen, daß zu einer die Kurve schneidenden Geraden p der Pol bloß gefunden werden kann unter Verwendung solcher Punkte auf p, welche außerhalb oder auf der Kurve liegen. Aber auch davon wird späterhin noch Unabhängigkeit festgestellt werden können.

Figur 5c.



Frage 8. Zu welcher Unterscheidung hinsichtlich des Lage einer Geraden und ihres Polpunktes zur Kurve nötigen die bisherigen Ueberlegungen?

Antwort. Die Unterscheidung zwischen der die Kurve nicht schneidenden Geraden p in Fig. 4a und 4b und der Sekante p in Fig.

Erkl. 18. Die Gerade 3 in Figur 4 und 5 ist Verbindungsgerade zweier Berührungspunkte, also besitzt sie eine Strecke innerhalb der Kurve im einen und eine Strecke außerhalb der Kurve im andern Winkelraum des Tangentenwinkels. (Vergl. Fig. 4a mit 5c, oder 4a mit gleichem Tangentenwinkel E und veränderter Kurve, wenn diese etwa als Hyperbel die Tangenten EB und EC in denselben Berührungspunkten beiderseits außerhalb berührte.) Liegt also das im Innern der Kurve liegende Stück von 3 im gleichen Winkelraum mit p, also 3 innen und p schneidend, so wird 3 von 5 erst in der Verlängerung außerhalb der Kurve geschnitten, liegt dasselbe Stück von 3 aber im ungleichen Winkelraum mit p, also 3 innen und p außerhalb, so wird 3 von 5 innerhalb der Kurve geschnitten.

Erkl. 19. Dieselbe Beziehung wird in ihrem zweiten Teile ganz selbstverständlich durch das Auftreten der für eine schneidende Gerade p erscheinenden Geraden XP und YP, welche nur einen äußeren Punkt zum Schnittpunkte erhalten können. Jedoch muß man Wert darauf legen, solche Beziehungen nicht aus speziellen Erscheinungen, sondern aus den allgemeinen Beziehungen abzuleiten, wie oben geschah.

5a, b, c zeigt neben der Erweiterung in Antwort 7 auch einen wichtigen Unterschied in der Lage des Polpunktes P zur Kurve. Berücksichtigt man nämlich die Eigenschaft der vier harmonischen Strahlen aus E bezw. F in Fig. 4 und 5, daß immer zwei zusammengehörige (hier die beiden Tangenten) durch das Paar der beiden andern innen und außen getrennt werden, so ergibt sich: Während einerseits der Innenraum der Kurve zusammen mit der Berührungssehne 3 bezw. 4 in einem beliebigen der beiden Winkelräume der Tangenten EA, EC bezw. FA, FC liegen kann, müssen andrerseits die andern zugeordneten Geraden p und 5 in E bezw. p und 6 in F je in zweierlei getrennten Winkelräumen liegen, d. h. jeweils entweder p außen und dann 5, 6 nach innen (Fig. 4), oder p innen und dann 5 und 6 nach außen (Fig. 5). Man erkennt hieraus die Erscheinung an Fig. 4 und 5 als keine zufällige, sondern als eine wesentliche: Für eine äußere Gerade p nämlich muss der Pol P als Schnittpunkt von 3 und 5 bez. 4 und 6 innerhalb der Kurve liegen, für eine schneidende Gerade p aber muß der Pol als Schnittpunkt derselben Geraden außerhalb der Kurve liegen.

Frage 9. Welche Veränderungen erfahren die Figuren 4 und 5, wenn die Gerade p selbst zur Tangente der Kurve wird?

Antwort. Denkt man sich die Gerade p in Fig. 4 und 5 selbst als Tangente der Kurve, (etwa in der Nähe des Punktes A) so fällt von den beiden Tangenten der Punkte E und F je eine selbst in p hinein; statt des Vierseits entsteht ein umgeschriebenes Dreiseit mit doppeltzählender Seite EF= EAB=FAD=BD=p=2, denn ihr Berührungspunkt A wird zum gemeinsamen Berührungspunkt

Erkl. 20. Wenn man auf die Allgemeinheit der Durchführung verzichten wollte, so könnte man für die vorige und die nebenstehende Antwort gemeinsame Erörterung herbeiführen durch Betrachtung der vier etwa auf der Geraden 3 als Schnittpunkte mit den vier harmonischen Strahlen EA, ED, p, 5 erzeugten vier harmonischen Punkte.

Nennt man den Schnittpunkt mit p für den Augenblick Q, so liegen P und Q getrennt durch die beiden Berührungspunkte auf 3, — also P außerhalb, wenn Q innerhalb, — P innerhalb, wenn Q außerhalb; und wenn Q mit einem der getrennt bleibenden Berührungspunkte zusammenfällt, so muß auch der Polpunkt P mit demselben Berührungspunkt zusammenfallen.

Erkl. 21. Der Gegenstand der vorliegenden Frage bildet den Grenzfall, in welchem die beiden in voriger Antwort aufgestellten entgegengesetzten Erscheinungen zusammentreffen. Alle Ergebnisse dieser und der vorhergehenden Antworten sind von großer Wichtigkeit und müssen auch in Worten ausgesprochen werden. Der Studierende möge sich schon an dieser Stelle darin üben, diese Sätze aufzustellen, bis die Untersuchungen soweit durchgeführt sind, daß die dualistisch gegenüberstehenden Beziehungen nebeneinandergestellt werden können.

der Tangente p sowie der unendlich nahe benachbarten Tangenten AD und BA; in A fallen aber auch die Punkte X und Y zusammen, wie sich ergibt bei Herausschieben der Sekante p in Figur 5, bis die Schnittpunkte X und Y in einem Berührungspunkt zusammenfallen. Von den vier harmonischen Geraden EC, EB, 5, p fallen die drei letzten mit p zusammen, also bleibt EC bezw. FC allein als vierte getrennt übrig.

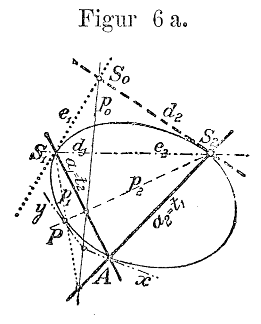
Demnach fallen von den acht Geraden 1 bis 8 die Geraden 2, 5, 6, 7, 8 sämtlich mit der Tangente p zusammen, und die allein übrigbleibenden 1, 3, 4 laufen von dem Schnittpunkt bezw. den Berührungspunkten der Tangenten EC und FC sämtlich in den Punkt A zusammen. Daher muß als Polpunkt der Tangente p der Punkt A, ihr eigener Berührungspunkt, angesehen werden.

* * *

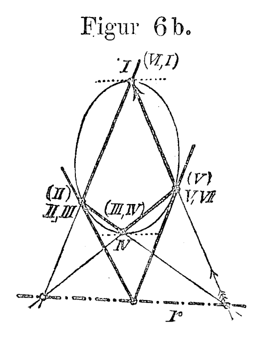
c) Polargerade zu einem gegebenen Punkte.

Frage 10. In welcher Weise können die in Antwort 3 genannten harmonischen Eigenschaften des Vierecks mit den in den Sätzen von Paskal fürs Viereck ausgesprochenen Beziehungen zusammentreffen?

Figur 6a.



Figur 6b.



Erkl. 22. Die Untersuchungen der folgenden sechs Fragen 10 bis 15 bilden die dualistische Durchführung der vorhergehenden sechs Fragen 4 bis 9. Sie be-

Antwort. Wenn die vier Ecken eines vollständigen Vierecks als Kurvenpunkte einer Kurve zweiten Grades aufgefaßt werden, so lassen

handeln die Zuordnung der Polargeraden zum gegebenen Punkt, wie jene die Zuordnung des Polpunktes zur gegebenen Geraden. (Vergleiche Erkl. 6.) Mit wenigen Ausnahmen enthält daher ihr Wortlaut auch die genaue Uebertragung der Erörterungen jener Fragen und Antworten.

Erkl. 23. In Fig. 6a sind die vier Eckpunkte des Vierecks die Punkte S_1, S_2, A, P, die sechs Seiten S_1S_2, S_1P, S_1A, S_2A, S_2P und die nicht gezeichnete Verbindungsgerade AP; die Nebenecken bilden die Schnittpunkte von S_1A und S_2P, von S_1P und S_2A, und der Schnittpunkt der nicht gezogenen Seite AP mit Seite S_1S_2. — In Fig. 6b liegen zwei Nebenecken auf der Geraden r, auf welcher auch noch der Schnittpunkt der nur angedeuteten Tangenten in I und IV liegt, die dritte Nebenecke entsteht als Schnittpunkt der Verbindungsgeraden I, IV und (II) (V). Die Erweiterung der Betrachtung gegenüber den Sätzen von Paskal besteht also darin, daß die Zuordnung dieser Nebenecke zur Geraden r studiert wird.

sich aus den vier Eckpunkten des vollständigen Vierecks dreierlei einfache eingeschriebene Vierecke bilden, und für jedes dieser drei gilt nach dem Satz von Paskal (Satz 24c des II. Teiles), daß die Schnittpunkte der Gegenseiten und die Schnittpunkte der Tangenten in Gegenecken alle vier auf einer Geraden liegen.

Wählt man daher dasjenige einfache Viereck, für welches eine bestimmte der drei Nebenecken zum Diagonalenschnittpunkt wird, so ist die Verbindungsgerade der beiden übrigen Nebenecken nicht nur diejenige Gerade, auf welcher nach Paskal die Schnittpunkte der Gegenseiten liegen, sondern auch die Gerade, auf welcher für jede durch die dritte Nebenecke gehende Seite des vollständigen Vierecks der vierte harmonische Punkt nach Antwort 3 liegen muß.

Frage 11. Wieviel und welche Schnittpunkte liegen nach den vorigen Ueberlegungen auf der Geraden des Paskal beim Viereck?

Figur 7.

Erkl. 24. In Figur 7 und ebenso später Figur 8 sind mit römischen Ziffern I bis VI (entsprechend den für Punkte benutzten großen Buchstaben) dieselben sechs Punkte bezeichnet, welche laut nebenstehender Antwort auf der Polargeraden p liegen müssen. Fig. 7 ist für einen Ellipsenbogen ausgeführt, der aber ebensowohl ein Kurvenbogen einer Parabel oder Hyperbel sein dürfte. Denn sowohl die harmonischen Beziehungen als die Sätze von Paskal gelten ohne Unterschied für alle drei Gattungen der Kurven, also muß dasselbe auch für die Eigenschaften der Polarität der Fall sein.

Erkl. 25. Für einen innerhalb der Kurve gewählten Punkt P gibt Figur 7 die einzige Vierecksgattung, welche bei Ellipse und Parabel auftreten kann. Und dasselbe gilt für die Hyperbel, solange die beiden durch den Punkt P gelegten Geraden e und f ihre Schnittpunkte auf demselben Aste haben. Daher hat Figur 7 einen allgemeineren Charakter als Figur 4a oder 4b; denn dort mußten für die Ellipse allein schon zweierlei Gattungen des Vierseits berücksichtigt werden, je nach Lage der Punkte E und F auf p; hier liefert beliebige Lage der Sekanten e und f stets die gleiche Gattung des geschlossenen konvexen Vierecks.

Antwort. Wählt man den Schnittpunkt der Geraden e und f in Fig. 2 bezw. 7 als dritte Nebenecke P eines einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Vierecks, so liegen auf e und f je zwei Gegenecken des eingeschriebenen Vierecks, und folglich liegen auf derselben Geraden p:

I. der Schnittpunkt der Gegenseiten AB und CD,

II. der Schnittpunkt der Gegenseiten BC und AD,

III. der Schnittpunkt der Tangenten in den auf e liegenden Gegenecken A und C,

IV. der Schnittpunkt der Tangenten in den auf f liegenden Gegenecken B und D,

V. der vierte harmonische Punkt auf e zu A, C und P,

VI. der vierte harmonische Punkt auf f zu B, D und P,

und zwar die vier ersten wegen Paskal, die beiden letzten wegen der harmonischen Viereckseigenschaften.

Und diese durch die Kurve und den Punkt P bestimmte Gerade p nennt man die Polargerade oder kurz Polare des Punktes P inbezug auf die gewählte Kurve; oder man sagt die Gerade p sei durch die Kurve zu dem Punkt P als Polare zugeordnet.

Frage 12. Welche Veränderung erfährt die Lage der Geraden p der Figur 7, wenn eine der Geraden e oder f durch P ihre Lage verändert?

Erkl. 26. Unter den sechs Punkten, die auf p liegen, könnte man (analog Erkl. 10) 15 Paare von je zweien aufstellen, die je zusammen p festlegen, nämlich

Antwort. Von den sechs Punkten I bis VI der Fig. 7 sind die Punkte I und II sowohl von e als von f abhängig; die Punkte III und V dagegen nur von der Lage

I II

I $\underline{\text{III}}$ II $\underline{\text{III}}$

I $\underline{\underline{\text{IV}}}$ II $\underline{\underline{\text{IV}}}$ $\underline{\text{III}}\,\underline{\underline{\text{IV}}}$

I $\underline{\text{V}}$ II $\underline{\text{V}}$ $\underline{\text{III}}\,\underline{\text{V}}$ $\underline{\underline{\text{IV}}}\,\underline{\text{V}}$

I $\underline{\underline{\text{VI}}}$ II $\underline{\underline{\text{VI}}}$ $\underline{\text{III}}\,\underline{\underline{\text{VI}}}$ $\underline{\underline{\text{IV}}}\,\underline{\underline{\text{VI}}}$ $\underline{\text{V}}\,\underline{\underline{\text{VI}}}$

Unter den Punkten dieser Paare sind aber die nicht unterstrichenen I und II von e und von f abhängig, die einfach gestrichenen $\underline{\text{III}}$ und $\underline{\text{V}}$ nur von e, die doppelt gestrichenen $\underline{\underline{\text{IV}}}$ und $\underline{\underline{\text{VI}}}$ nur von f. Es sind also tatsächlich die Paare $\underline{\text{III}}\,\underline{\text{V}}$ und $\underline{\underline{\text{IV}}}\,\underline{\underline{\text{VI}}}$ die einzigen, welche die Bestimmung von p durch eine einzelne der Geraden e und f ermöglichen.

der Geraden e, IV und VI nur von der Geraden f. Da aber zur Festlegung der Geraden p nur zwei Punkte auf ihr notwendig sind, kann durch die Wahl einer einzigen Geraden e durch P mittels der Punkte III und V die Polare schon sicher bestimmt werden, und die in voriger Antwort besprochenen sechs Punkte liegen stets auf derselben Geraden p, wie man auch durch den Punkt P die Gerade f, also wie man überhaupt beide Geraden e und f wählen mag. Demnach ist tatsächlich die Zuordnung von p zum gegebenen P durch die Kurve einzig abhängig von der Lage des Punktes P zur Kurve, und nicht von der Lage der durch P gewählten Geraden e und f. Das zur Erzeugung der Geraden p dienende eingeschriebene Viereck besitzt keine wesentliche Bedeutung, sondern bildet nur das vermittelnde Gebilde zur Auffindung der Polaren p zum Punkte P.

Erkl. 27. Auf Grund von Antwort 11 und Figur 7 hätte man noch vermuten können, daß jeweils eine andere Gerade p entstände, wenn man die Geraden e und f durch denselben Punkt P in verschiedener Lage wählte. Die nebenstehende Überlegung zeigt nunmehr, daß die Lage der Geraden p völlig unabhängig von der Lage der beiden Geraden e und f ist; denn p bleibt dieselbe sowohl bei veränderlichem f und feststehendem e, als auch umgekehrt bei veränderlichem e und feststehendem f.

Das Viereck ABCD verliert seine selbständige Bedeutung und rückt auf die Stufe eines vermittelnden Gebildes herab, wie z. B. $t_1S_0t_2$ bei den Konstruktionen $S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_0 \overline{\overline{\wedge}} t_2 \overline{\overline{\wedge}} S_2$ im II. Teile dieses Lehrbuches.

Frage 13. Welche wichtige Folgerung aus der Willkürlichkeit der Lage von e und f durch P ergibt sich für den Fall, daß der Punkt P außerhalb der Kurve liegt?

Erkl. 28. Während die Figur 7 für einen innerhalb der Kurve liegenden Punkt P gezeichnet war, gibt Fig. 8 (S. 17) die Darstellung für einen außerhalb der Kurve liegenden Punkt P.

Antwort. Da die Lage der Geraden e und f durch P für die Bestimmung der Geraden p völlig willkürlich ist, so muß unter anderm auch für jede beliebige Gerade z durch P der vierte harmonische Punkt zu P und den beiden auf der Geraden z liegenden

Daher treten hier n e u auf die Tangenten x und y. Eine Unterscheidung verschiedener Vierecksgattungen je nach veränderlicher Lage der Geraden e und f tritt an dieser Figur gar nicht auf, denn beliebige Lage von e und f liefert stets das gleiche überschlagene Viereck, solange überhaupt die Ellipse der Figur 8 beibehalten wird.

Erkl. 29. Für eine Sekante z durch P unmittelbar i n n e r h a l b x hat man noch zwei getrennte Kurvenschnittpunkte und d a z w i s c h e n als vierten harmonischen Punkt zu P und denselben den Schnittpunkt (zp). Für die Tangente x aber rücken die beiden Kurvenschnittpunkte von beiden Seiten unendlich nahe zusammen, während sie zwischen sich den vierten harmonischen Punkt V bezw. VI behalten. — Dasselbe Zusammenfallen folgt unmittelbar aus der am Schlusse der Antwort 3 genannten Eigenschaft der harmonischen Beziehung, daß, wenn von vier harmonischen Elementen (hier Punkten) zwei zusammenfallen, dann auch ein drittes hinzukommt. Hier hat man für e bezw. f die getrennten Elemente A, C, P, V, bezw. B, D, P, VI. Wenn also A und C bezw. B und D zusammenfallen und zwar n i c h t mit P, so muß unbedingt das noch übrige Element mit jenen beiden zusammenfallen, nämlich V mit A und C bezw. VI mit B und D.

Erkl. 30. In Figur 8 sind ebenso wie in Figur 7 mit den Ziffern I—VIII die acht Punkte bezeichnet, welche bei einem außerhalb der Kurve liegenden Punkt P auf der Geraden p liegen müssen. Auch hier ist die Figur wieder ausgeführt für einen Kurvenbogen, der zwar tatsächlich einer Ellipse angehört, aber ebensowohl Kurvenbogen einer Parabel oder Hyperbel sein dürfte. Und zwar entsteht dieselbe Lage der vier Punkte, also dieselbe Art des überschlagenen Vierecks, solange die Sekanten e und f aus P ihre beiden Schnittpunkte auf demselben Kurvenbogen haben.

Kurvenpunkten — auf der festbestimmten Geraden p liegen. Da dies für jede beliebige Lage der Geraden z durch P gelten muss, so trifft es auch zu, wenn z sich einer der aus dem Punkte P a n d i e K u r v e g e h e n d e n T a n g e n t e n immer mehr nähert; dabei rücken aber die Kurvenpunkte A und C bezw. B und D immer näher zusammen und schließen dabei doch den Schnittpunkt (ep) = V bezw. (fp) = VI stets noch z w i s c h e n s i c h ein.

Fällt also die veränderlich gedachte Gerade z vollends mit einer der Tangenten x bezw. y aus P an die Kurve (von innen heranrückend) zusammen, so gibt es auf ihr keine z w e i g e t r e n n t e n Kurvenschnittpunkte mehr, sondern nur noch e i n e n; und zwischen den in einen D o p p e l p u n k t zusammenfallenden beiden Einzelpunkten liegt noch der v i e r t e h a r m o n i s c h e P u n k t zu P, nämlich der Schnittpunkt (xp) bezw. (yp). Nun haben aber diese Punkte (xp) und (yp) als Schnittpunkte zweier festen Geraden eine ganz bestimmte Lage, während über die Lage der Berührungspunkte der Tangenten von P an die Kurve keinerlei Bestimmung vorliegt; daher folgt umgekehrt aus der vorigen Überlegung das wichtige Ergebnis, daß diese B e r ü h r u n g s p u n k t e zusammenfallen müssen m i t d e n S c h n i t t p u n k t e n (xp) und (yp) der aus dem Punkte P an die Kurve gehenden Tangenten x und y m i t d e r P o l a r e p.

Somit erfährt die Aufzählung der in Antwort 11 genannten auf der Polaren liegenden Punkte noch die Erweiterung, daß auf der Polaren p auch liegen:

VII. der Berührungspunkt auf der einen, und

VIII. der Berührungspunkt auf

Einzig bei der Hyperbel ist also Verschiedenheit der Lage und somit Verschiedenheit der Viereckgattung möglich, wenn nämlich eine oder beide Sekanten e und f ihre Schnittpunkte auf getrennten Ästen erhalten. (Vergl. Aufg. 6 und Fig. 110 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.)

Erkl. 31. *Sechs* Punkte würden im allgemeinen Falle $\frac{6.5}{1.2} = 15$ Verbindungsgeraden liefern; *acht* Punkte würden im allgemeinen Falle $\frac{7.8}{1.2} = 28$ Verbindungsgeraden liefern. Es fallen also bei dem *innerhalb* der Kurve liegenden Punkt P 15, bei dem *außerhalb* der Kurve liegenden Punkt P 28 Verbindungsgeraden in eine *einzige* zusammen. Man erschließt daraus wieder (wie in Erkl. 15 erörtert wurde) die erhöhte Wichtigkeit der in den *Polareigenschaften* der Kurve zweiten Grades enthaltenen Beziehungen.

Erkl. 32. Zu den 15 in Erkl. 26 aufgestellten Punktpaaren, deren Verbindungsgerade jeweils in die *einzige* Gerade p fällt, deren jedes also *einzeln* zur Bestimmung von p hinreichen würde, kommen nunmehr noch folgende 13 hinzu:

$I\,\underset{\times}{VII}$ $\quad II\,\underset{\times}{VII}$ $\quad \underline{III}\,\underset{\times}{VII}$ $\quad \underline{\underline{IV}}\,\underset{\times}{VII}$ $\quad \underline{V}\,\underset{\times}{VII}$ $\quad \underline{\underline{VI}}\,\underset{\times}{VII}$

$I\,\underset{\times}{VIII}$ $\quad II\,\underset{\times}{VIII}$ $\quad \underline{III}\,\underset{\times}{VIII}$ $\quad \underline{\underline{IV}}\,\underset{\times}{VIII}$ $\quad \underline{V}\,\underset{\times}{VIII}$ $\quad \underline{\underline{VI}}\,\underset{\times}{VIII}$ $\quad \underset{\times}{VII}\,\underset{\times}{VIII}$

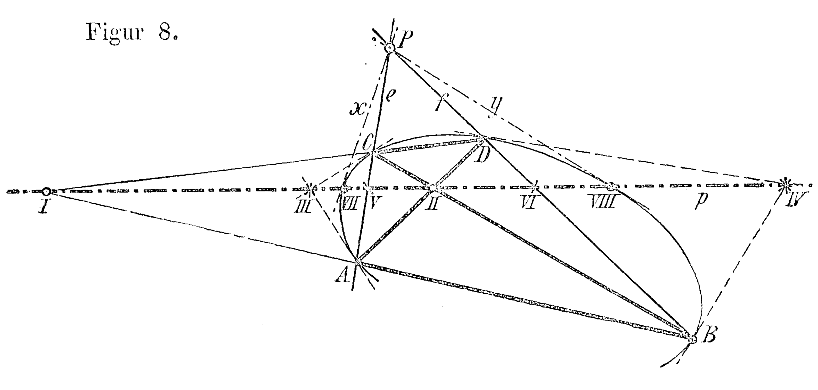
Wieder sind von den Punkten jener Paare die Punkte I und II sowohl von e als f abhängig, $\underline{III}$ und $\underline{V}$ bezw. $\underline{\underline{IV}}$ und $\underline{\underline{VI}}$ *nur* von e bezw. f, aber die $\underset{\times}{VII}$ und $\underset{\times}{VIII}$ *weder* von e *noch* von f. Man kann daher die Polare p bestimmen der andern der vom Punkte P an die Kurve etwa vorhandenen Kurventangenten.

Nun steht aber die Lage dieser beiden neu hinzukommenden Berührungspunkte VII und VIII gar nicht in Beziehung zur Lage der Geraden e und f, und folglich kann für einen *außerhalb der Kurve liegenden Punkt* P die Polare p *ganz unabhängig vom eingeschriebenen Viereck* gefunden werden als *Verbindungsgerade der Berührungspunkte* der von P an die Kurve gehenden Tangenten.

mit je *einem* der Punkte VII oder VIII zusammen mit *einer* der Geraden e oder f durch eines der acht Paare III VII bis VI VIII; aber auch *ohne* jede Gerade e oder f *allein* durch die Punkte VII und VIII mittels des letzten der Punktpaare, nämlich VII VIII.

Erkl. 33. Nachdem schon aus Antwort 12 und Erkl. 27 hervorgegangen, daß das *eingeschriebene Viereck* keine unausweichliche Bedeutung für die Beziehung von P und p hat, so tritt diese Unabhängigkeit dadurch noch deutlicher auf, daß die Polare mittels der Berührungspunkte auf den Tangenten x und y aus P an die Kurve sogar ohne jede Mitwirkung des eingeschriebenen Vierecks der Sekanten e und f gefunden werden kann. Nur der eine Umstand bleibt einstweilen bestehen, daß zu einem *außerhalb* der Kurve liegenden Punkte P die Polare bloß gefunden werden kann unter Verwendung solcher *Geraden durch* P, welche die Kurve schneiden oder berühren. Aber auch davon wird sich später Unabhängigkeit erzielen lassen.

Figur 8.



Frage 14. Zu welcher Unterscheidung hinsichtlich der *Lage* eines *Punktes* und seiner *Polare* zur Kurve nötigen die bisherigen Überlegungen?

Antwort. Die Unterscheidung zwischen dem innerhalb der Kurve liegenden Punkte P in Fig. 7 und dem äußern Punkt P in Figur 8 zeigt neben der Erweiterung in Antwort 13 auch einen wichtigen Unterschied in der *Lage der Polaren* p zur Kurve. Berücksichtigt man nämlich die Eigenschaft der vier harmonischen Punkte auf e bezw. f in Fig. 7 und 8, daß immer zwei zusammengehörige (hier die beiden Kurvenschnittpunkte) durch das Paar der beiden andern innen und außen getrennt werden, so ergibt sich:

Erkl. 34. Eine Gerade durch Punkt P kann die Kurve schneiden oder nicht schneiden. Ersteres tritt *sicher* ein auf jeder durch P zu legenden Geraden, wenn P *innerhalb* der Kurve liegt; dagegen durch einen *äußeren* Punkt P gibt es stets sowohl schneidende als auch nicht schneidende Geraden. Über letztere Geraden wird in nebenstehender Antwort nichts ausgesagt. Das ist aber auch nicht erforderlich; denn da eine

Gerade sich stets beiderseits ins unendliche erstreckt, so kann sie nie vollständig innerhalb einer Kurve liegen. Um zu zeigen, daß eine Kurve von einer Geraden geschnitten wird, genügt es nachzuweisen, daß diese Gerade überhaupt irgendwelche Punkte im Innenraum der Kurve besitzt.

Erkl. 35. Wenn die durch P gelegte Gerade die Kurve schneidet, so bilden die zwei Schnittpunkte zwischen sich einerseits eine endliche und andererseits eine unendliche Strecke auf der Sekante. Es kann dabei die endliche Strecke im Innenraum und die unendliche Strecke im Außenraum der Kurve liegen, wie allgemein bei der Ellipse und Parabel und bei solchen Sekanten der Hyperbel, welche nur den einen Ast treffen. Es kann aber auch die endliche Strecke der Sekante im Außenraum und die unendliche Strecke im Innenraum der Kurve liegen, wenn nämlich eine Hyperbelsekante beide Äste trifft. Aber ganz unabhängig von dieser Unterscheidung besteht diese Tatsache, daß wenn P auf dem im Innenraum der Kurve liegenden endlich oder unendlich großen Streckenteil der Sekante e bezw. f liegt, jedenfalls der Punkt V bezw. VI auf dem äußeren Streckenteil liegt, und umgekehrt letzterer auf der Innenstrecke, wenn P auf der Außenstrecke liegt.

Erkl. 36. Das Ergebnis vorstehender Antwort wird in seinem zweiten Teile ganz selbstverständlich durch das Auftreten der Berührungspunkte VII und VIII auf den für einen äußeren Punkt P vorhandenen Tangenten x und y, da deren Verbindungsgerade stets eine Sekante der Kurve sein muß. Jedoch bleibt es wichtig, für die allgemeine Beziehung den Beweis zu liefern, statt für jeden Einzelfall getrennte Durchführung aufzustellen.

Während einerseits die beiden Kurvenschnittpunkte auf e und f und überhaupt auf jeder Sekante durch P jeweils eine im Innern und eine im Äußern der Kurve liegende Strecke abgrenzen, so müssen andererseits die anderen zugeordneten Punkte P und V auf e bezw. P und VI auf f je in zweierlei entgegengesetzten Streckenräumen liegen, d. h. jeweils entweder P innen und dann V, VI außen (Fig. 7), oder P außen und dann V und VI innen. Ferner erkennt man, daß dieser Gegensatz auf jeder Sekante eintreten muß, die überhaupt durch den Punkt P gelegt werden kann; und umgekehrt gilt dieselbe Lagebeziehung auf entgegengesetzten Streckenräumen der Verbindungsgeraden für jeden beliebigen Punkt der Polaren, dessen Verbindungsgerade mit P überhaupt Sekante an der Kurve wird. Es zeigt sich demnach die Erscheinung an Figur 7 und 8 als keine zufällige, sondern als eine wesentliche: Für einen inneren Punkt P muß nämlich die Polare als Verbindungsgerade lauter äußerer Punkte V und VI vollständig außerhalb der Kurve verlaufen; für einen äußeren Punkt P aber muß die Polare die Kurve schneiden, denn jede durch diesen äußeren Punkt P gezogene Sekante der Kurve trifft die Polare in einem Punkte innerhalb der Kurve.

Frage 15. Welche Veränderung erfahren die Fig. 7 und 8, wenn der Punkt P selbst ein Kurvenpunkt wird.?

Erkl. 37. In weniger allgemeiner Durchführung kann man die Erörterung der vorigen und der nebenstehenden Antwort vereinigen durch Betrachtung der vier etwa im Punkte III als Verbindungsgeraden mit den vier harmonischen Punkten A, C, P, V entstehenden vier harmonischen Geraden. Nennt man die Gerade nach P für den Augenblick q, so liegen p und q getrennt durch die beiden Tangenten nach A und C; also p außerhalb, wenn q innerhalb, p innerhalb, wenn q außerhalb; und sobald q mit einer der getrennt bleibenden Tangenten zusammenfällt, so muß auch die Polare p mit derselben Tangente zusammenfallen.

Erkl. 38. Mit der nebenstehenden Antwort sind diejenigen Untersuchungen abgeschlossen, welche ohne Beeinträchtigung der Übersichtlichkeit getrennt einerseits für die Auffindung des Pols zu einer gegebenen Geraden, andrerseits der Polaren zu einem gegebenen Punkt durchgeführt werden können. Hieran schließt sich nunmehr die Feststellung der Identität von beiderlei Beziehung, und darauf folgt sodann die Aussprache der gewonnenen Ergebnisse in Sätzen.

Antwort. Denkt man sich den Punkt P in Fig. 7 und 8 selbst als Kurvenpunkt (etwa zwischen C und D), so fällt von den beiden Kurvenschnittpunkten der Geraden e und f je einer selbst in P hinein, und statt des Vierecks entsteht ein eingeschriebenes Dreieck mit doppeltzählendem Eckpunkt (ef)=C=D=P=II. Die Tangente in diesem Eckpunkte wird zur gemeinsamen Tangente von P an die Kurve, sowie der unendlich nahe benachbarten Punkte C (nach III) und D (nach IV); in ihr fallen also auch die Tangenten x und y zusammen, wie sich ergibt durch Heranschieben des Punktes P an die Kurve in Figur 8, bis der Winkel der Tangenten x und y ein gestreckter wird. Von den vier harmonischen Punkten A, C, V, P fallen die drei letzteren mit P zusammen, also bleibt A bezw. B allein als vierter getrennt übrig.

Demnach fallen von den acht Punkten I bis VIII die Punkte, II, V, VI, VII, VIII sämtlich mit dem Kurvenpunkte P zusammen, und die allein übrig bleibenden I, III, IV kommen alle auf die Tangente im Kurvenpunkt P zu liegen. Daher muß als Polare des Kurvenpunktes P die Tangente in P, also seine eigene Kurventangente, angesehen werden.

* * *

d) Allgemeine Beziehungen zwischen Pol und Polare.

Frage. 16. Welche Übereinstimmung ergibt sich aus einer Vergleichung der Konstruktion des Poles zu gegebener Geraden und der Polaren zu gegebenem Punkte?

Antwort. Vergleicht man die Lage der Geraden und Punkte, welche in den Figuren 4 und 5 zur Konstruktion des Polpunktes einer gegebenen Geraden führten,

Erkl. 39. Die nebenstehende Vergleichung der Elemente der Figur 4

und 5 mit den Elementen der Figur 7 und 8 ist eine Vergleichung von Punkten mit Punkten und von Geraden mit Geraden. Sie steht also auf ganz anderem Boden, wie die dualistische Gegenüberstellung, welche in den Antworten 4 bis 9 und 10 bis 15 für dieselben Figuren durchgeführt ist. Diese zeigt als entsprechend Punkte mit Geraden, und Gerade mit Punkten, kann also nie die Identität zweier auf verschiedenen Grundsätzen aufgebauten Figuren erweisen. Vielmehr würden bei der dualistischen Vergleichung als entsprechend erscheinen die

Geraden: e, f, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

und die

Punkte: E, F, I, II, III, IV, V, VI, VII.

Keine Übereinstimmung zeigt die dualistische Vergleichung nur bei den Buchstaben A, B, C, D, weil diese nur für Punkte gebraucht sind, also bei der dualistischen Übertragung nicht für entsprechend zugeordnete Elemente verwendet werden können.

Erkl. 40. Dreifache Übereinstimmung der Fig. 4, 5 mit Fig. 7, 8 ergibt die nebenstehende Vergleichung: Zwar tritt das Tangentenvierseit der Fig. 4, 5 nicht als solches auf in Fig. 7, 8, und ebenso das Sehnenviereck der Fig. 7, 8 nicht in Fig. 4, 5, obwohl dort die vier Tangenten und hier die vier Berührungspunkte erscheinen, nur jene nicht zum Schnitt gebracht und diese nicht verbunden. Aber es fallen zusammen die Elemente der

Fig. 4, 5	und der Fig. 7, 8
α) Kurventangenten durch die Punkte E und F auf p an den Berührungspunkten des Tangentenvierseits mit Berührungssehnen 3, 4 durch P.	α) Kurventangenten durch die Punkte III und IV auf p an den Eckpunkten des Sehnenvierecks mit Diagonalen e, f durch P.
β) Vierte harmonische Gerade 5, 6	β) Vierteharmonische Gerade III P, IV P

und in den Figuren 7 und 8 zur Konstruktion der Polaren eines gegebenen Punktes, so zeigt sich folgendes:

Die Viereckseiten des Tangentenvierseits der Fig. 4 und 5 stimmen überein mit den Tangenten in den Eckpunkten des Sehnenvierecks der Fig. 7 und 8, und umgekehrt die Eckpunkte dieses Sehnenvierecks mit den Berührungspunkten der Tangenten jenes Tangentenvierseits. Daher sind die Geraden 3 und 4 der Fig. 4 und 5 dieselben wie die Vierecksdiagonalen e und f in Figur 7 und 8, und umgekehrt sind die Punkte III und IV in Figur 7 und 8 dieselben, wie die Nebenecken E und F des Vierseits in Fig. 4 und 5.

Dagegen sind die den Eckpunkten des Tangentenvierseits der Fig. 4 und 5 entsprechenden Tangentenschnittpunkte nicht benutzt in Fig. 7 und 8, und ebenso die den Viereckseiten der Figuren 7 und 8 entsprechenden Berührungssehnen nicht gezogen in Fig. 4 und 5. Demnach sind auch die Geraden 1 und 2 der Fig. 4 und 5 nicht gezogen in Fig. 7 und 8, und ebenso die Punkte I und II der Fig. 7 und 8 nicht festgestellt in Fig. 4 und 5.

Ferner sind die Geraden 5 und 6 der Fig. 4 und 5 zwar nicht gezogen in Fig. 7 und 8, würden sich aber sofort ergeben als Verbindungsgeraden der Punkte III und IV mit dem Schnittpunkte von e und f; und die Punkte V und VI der Fig. 7 und 8 sind nicht festgestellt in Fig. 4 und 5, ergeben sich aber von selbst als Schnittpunkte der Geraden 3 und 4 mit der Verbindungsgeraden von E und F.

Endlich sind die in Fig. 5 für eine schneidende Gerade p auftretenden Geraden 7 und 8 mit ihren Berührungspunkten X und Y

zu p und den beiden Tangenten, und folglich auch vier harmonische Punkte auf 3 und auf 4 mit Zuordnung von P zu (p 3) bezw. (p 4).

zu p und den beiden Tangenten, und zwar wegen der vier harmonischen Punkte auf e und f mit Zuordnung von P und V bezw. P und VI.

γ) Bei schneidender Geraden p zwei Tangenten an die Kurve, welche in den Schnittpunkten von p berühren und durch den Punkt P hindurchgehen.

γ) Bei außerhalb liegendem Punkte P zwei Tangenten an die Kurve, welche ihre Berührungspunkte auf p haben und vom Punkte P ausgehen.

auf EF nichts anderes, als die in Fig. 8 für den äußeren Punkt P auftretenden Tangenten x und y mit ihren Berührungspunkten VII und VIII auf p.

Erkl. 41. Die harmonischen Elemente der Fig. 4, 5 bezw. 7, 8 haben verschiedene Erzeugungsgrundlagen: In Fig. 4, 5 sind in den Nebenecken E, F des Vierecks ABCD vier harmonische Strahlen, und folglich entstehen auf jeder Schnittgeraden z. B. auf 3 und 4 vier harmonische Punkte. In Fig. 7, 8 dagegen sind auf den Nebenseiten e, f des Vierseits AB, BC, CD, DA vier harmonische Punkte, und folglich entstehen durch deren Projektion aus jedem beliebigen Schnittpunkte, z. B. von III und IV, vier harmonische Strahlen.

Frage 17. Welches wichtige Ergebnis liefert die in voriger Untersuchung angestellte Vergleichung der Fig. 4, 5 und 7, 8?

Erkl. 42. In den bisherigen Erörterungen war nur immer die Rede davon, daß zu einer beliebigen Geraden p der Polpunkt gesucht werde, oder daß zu einem beliebigen Punkte P die Polare p gesucht werde. Man hätte also bis zur nebenstehenden Beweisführung noch der Vermutung Raum geben können, daß wenn etwa zur Geraden p der Pol P gehöre, dann zum Punkte P eine andere Polare q — oder daß wenn zum Punkte P die Polare p gehöre, dann zur Geraden p ein anderer Polpunkt Q. Nun aber zeigt es sich, daß die festgesetzte Zuordnung der polaren Elemente von einem beliebigen Anfangselement aus stets nur zwischen zwei gleichbleibenden hin — und zurückführen würde, nämlich vom Punkt P zur Polare p, von der Geraden p wieder zum gleichen Punkte P als Polpunkt, von P wieder zu p, p zu P usw.

Antwort. Die in voriger Antwort festgestellte Übereinstimmung der Elemente der Figuren 4 und 5 einerseits mit den Elementen der Figuren 7, 8 andrerseits zeigt folgende zwei wichtige Tatsachen: Wenn man erstens in Fig. 4, 5 statt zur gegebenen Geraden p den Pol P zu suchen, den Punkt P als gegebenen Punkt ansieht und dazu die Polare sucht, so erhält man entweder mittels der Sekanten 3 bezw. 4 die Tangenten ED und EA, bezw. FB und FA durch E bezw. F auf p — oder mittels derselben Sekanten 3 bezw. 4 die vierten harmonischen Punkte zu deren Kurvenpunkten und P ebenfalls auf p — oder wenn P außerhalb der Kurve liegt (Fig. 5), mittels der Tangenten 7 und 8 die Berührungspunkte X und Y ebenfalls auf p; also wird p auch die Polare zu P. Wenn man zweitens in Fig. 7, 8, statt zum gegebenen Punkte P die Polare p zu suchen, die Gerade p als gegebene

Erkl. 43. In den höheren Stufen der Geometrie werden auch solche Zuordnungen betrachtet, bei welchen bei fortlaufender Konstruktion stets neue Elemente auftreten, oder solche, bei welchen zu einem ersten Element zwei andere zugeordnet werden, bezw. rückwärts zu zwei ersten Elementen nur ein anderes Element zugeordnet wird. Im Gegensatz zu solchen Beziehungen, die als „ein—zweideutige" bezw. als „zwei—eindeutige" bezeichnet werden, wird dann die Polarität als eine „ein—eindeutige" Beziehung benannt.

Erkl. 44. Die nebenstehende Antwort begründet die „Ein—eindeutigkeit" der Polaritätsbeziehung auf die Übereinstimmung der in den Figuren 4, 5 und 7, 8 mit den Ziffern 3, 4; 5, 6; 7, 8; bezeichneten Elemente. Schon in Erklärung 40 und 41 ist darauf abgehoben, daß, wenn in Fig. 4, 5 die Geraden 3 und 4 mit p zum Schnitt gebracht werden, dadurch der vierte harmonische Punkt zu P entsteht — und daß, wenn in Fig. 7, 8 die Punkte III und IV mit P verbunden werden, dadurch der vierte harmonische Strahl zu p entsteht. Weiterhin muß aber nun auch Übereinstimmung der Elemente 1, 2 bezw. I, II eintreten. Betrachtet man nämlich in Fig. 4, 5 die Geraden 3 und 4 als die Sekanten e und f der Fig. 7, 8, so müssen auch die Gegenseiten des Vierecks, deren Diagonalen sie sind, ihre Schnitttpunkte auf p liegen haben. Und betrachtet man in Fig. 7, 8 die Punkte III, IV als die Nebenecken E, F des Vierseits ABCD der Fig. 4, 5, so muss auch die dritte Nebenecke des Tangentenvierseits der vier Tangenten von III und IV in den Punkt P fallen. Somit gehen auch in Fig. 4, 5 nicht nur 6 bis 8 Geraden durch P, sondern es liegen auch hier die 6 bis 8 Punkte auf p; und auch in Fig. 7, 8 liegen nicht nur 6 bis 8 Punkte auf p, sondern es gehen auch die 6 bis 8 Geraden durch P — je nachdem P innerhalb und p außerhalb liegt, oder P außerhalb und p die Kurve schneidend. Weitere Behandlung findet diese Gesamtfigur nebst besonderer Spezialisierung in der Erörterung über das Polardreieck s. Fig 26 und ff.

Gerade ansieht und dazu den Pol sucht, so erhält man entweder mittels der Tangenten aus III bezw. IV die Berührungssehnen A C bezw. B D durch P — oder in denselben Punkten III bezw. IV die vierten harmonischen Strahlen zu deren Tangenten und p ebenfalls durch P — oder wenn p die Kurve schneidet (Fig. 8), mittels der Kurvenschnittpunkte VII und VIII die Tangenten x und y ebenfalls durch P; also wird P auch der Pol zu p.

Man erhält demnach die für die gesamte Polarentheorie grundlegende Beziehung:

Satz 1. Der Pol einer Geraden hat zugleich diese Gerade als Polare, und umgekehrt: die Polare eines Punktes hat zugleich diesen Punkt als Pol.

Oder in anderen Worten:

Satz 1a: Ist ein Punkt P der Pol einer Geraden p, so ist zugleich die Gerade p die Polare dieses Punktes P; und ist eine Gerade p Polare eines Punktes P, so ist zugleich der Punkt P der Pol dieser Geraden p.

Frage 18. Wie lassen sich nunmehr die früher getrennt abgeleiteten Eigenschaften von Pol und Polare in Worten ausdrücken?

Antwort. Als Zusammenfassung der früheren Ergebnisse erhält man folgende Sätze:

Satz 2. Zieht man durch verschiedene Punkte einer bestimmten Geraden p je zwei Strahlen eines

Satz 2a. Wählt man auf verschiedenen Strahlen eines bestimmten Punktes P je zwei Punkte

gegebenen Strahlenbüschels zweiter Klasse, so gehen jedesmal durch einen und denselben bestimmten Punkt, nämlich den Pol P dieser Geraden p:

α) die Verbindungsgeraden der beiden Paare von Gegenecken jedes beliebigen, aus zwei solchen Strahlenpaaren als Gegenseiten gebildeten einfachen Vierseits;

β) die Verbindungsgeraden, der auf den Tangenten eines jeden Punktes von p liegenden Kurvenberührungspunkte;

γ) die vierten harmonischen Strahlen zur gegebenen Geraden p und den beiden Tangenten jedes Punktes auf p;

und durch denselben Punkt gehen auch

δ) die Kurventangenten durch die beiden auf der Geraden p etwa liegenden Kurvenpunkte.

einer gegebenen Punktreihe zweiter Ordnung, so liegen jedesmal auf einer und derselben bestimmten Geraden, nämlich der Polaren p dieses Punktes P:

α) die Schnittpunkte der beiden Paare von Gegenseiten jedes beliebigen, aus zwei solchen Punktpaaren als Gegenecken gebildeten einfachen Vierecks;

β) die Schnittpunkte der durch die Kurvenpunkte jeder Geraden durch P gehenden Kurventangenten;

γ) die vierten harmonischen Punkte zum gegebenen Punkte P und den beiden Kurvenpunkten jeder Geraden durch P;

und auf derselben Geraden liegen auch

δ) die Kurvenberührungspunkte auf den beiden durch den Punkt P etwa gehenden Kurventangenten.

Satz 3. Eine ganz außerhalb der Kurve verlaufende Gerade hat als Pol einen Punkt innerhalb der Kurve; eine die Kurve schneidende Gerade hat als Pol einen Punkt außerhalb der Kurve.

Satz 4. Eine die Kurve berührende Gerade hat als Pol ihren eigenen Berührungspunkt — oder

Satz 3a. Ein Punkt innerhalb der Kurve hat als Polare eine ganz außerhalb der Kurve verlaufende Gerade; ein Punkt außerhalb der Kurve hat als Polare eine die Kurve schneidende Gerade.

Satz 4a. Ein Punkt auf der Kurve hat als Polare seine eigene Tangente, — oder

ein Kurvenpunkt und seine Tangente sind polar geordnet.

Erkl. 45. Nachdem in voriger Antwort 17 und Satz 1 die Gleichwertigkeit der Erzeugung von Pol und Polare nachgewiesen ist, erhalten die Ergebnisse der früheren Untersuchungen erst ihre allgemeinste Giltigkeit, und sie kommen daher erst an dieser Stelle zur vollgiltigen Ausdrucksweise in der Fassung für Strahlenbüschel zweiter Klasse bezw. Punktreihen zweiter Ordnung. Die einzelnen Teile sind an folgenden Stellen bewiesen: für Satz 2 : α bis γ einzeln in Antwort 5, allgemein in Antwort 6, δ in Antwort 7 — für Satz 2a : α bis γ einzeln in Antwort 11, allgemein in Antwort 12, δ in Antwort 13.

Erkl. 46. Man beachte wohl, daß die Sätze 2 und 2a von weit allgemeinerem Charakter sind, als die entsprechenden Aufzählungen in Antwort 5 bezw. 11. Dort handelte es sich um die Eigentümlichkeiten eines speziell ausgewählten Vierecks bezw. Vierseits; hier ist die Bedeutung des Vierecks bezw. Vierseits eingeschränkt auf den ersten Fall α allein, dafür ist aber auch diese entsprechende Beziehung jetzt aufgestellt für jedes Viereck bezw. Vierseit, dessen Nebenecken auf p liegen,

bezw. dessen Nebenseiten durch P gehen. Daher werden nunmehr die Elemente 3 bis 6 bezw. III bis VI nicht mehr wie dort speziell, sondern allgemein aufgefaßt. Während aber dort nur die vereinigte Lage von sechs oder acht Einzelelementen behauptet wird, sind es hier — je nach Lage der Punkte auf p bezw. der Strahlen durch P — sechsmal unendlich vielerlei Elemente und zwei einzelne Elemente in vereinigter Lage, d. h. Punkte auf einer Geraden, Geraden durch Punkte.

Erkl. 47. Die sämtlichen Sätze der obenstehenden Antwort 18 sind in ihrer dualistischen Gegenüberstellung fast gänzlich gleichbedeutend. Das zeigt sich besonders deutlich an den Sätzen 3 und 3a bezw. 4 und 4a. Dieselben sind einzeln bewiesen in Antwort 8 und 14 bezw. 9 und 15; nach Aufstellung des Satzes 1 aber zeigt sich, daß die Aussagen des links- und rechtsstehenden Satzes den gleichen Sachverhalt nur in verschiedenen Worten aussprechen. Dies ist in den Sätzen 4 dadurch zum Ausdruck gebracht, daß eine gemeinsame Fassung unter beide Sätze querüber gestellt ist. — Über die in den Sätzen 3 und 4 auftretenden Begriffe von „innerhalb“ und „außerhalb“ einer Kurve, vergleiche man Erkl. 91, 92 und 96a, 107 und 120 des II. Teiles dieses Lehrbuches. Umgekehrt erfahren jene früheren Aussagen erweiterte Bedeutung und tiefere Begründung im Lichte der hier aufgestellten Beziehungen der Polarentheorie.

Erkl. 48. Auf Grund der in Antwort 16 und 17 besprochenen Übereinstimmung der Figuren 4, 5 und 7, 8 erscheinen auch die Sätze 2 und 2a als gleichbedeutend. Man könnte dieselben etwa in der Weise zusammenfassen, daß sie als gemeinsame Definition der Zuordnungsart von Pol und Polare ausgedrückt werden: Durch eine Kurve zweiten Grades werden je ein Punkt und eine Gerade der Zeichenebene als Pol und Polare in der Weise einander zugeordnet, daß für Punkte der Polare die Eigenschaften α bis δ des Satzes 2 und für Gerade durch den Pol die Eigenschaften α bis δ des Satzes 2a in Geltung treten.

Frage 19. In welchen anderen Bedeutungen können die vorigen Sätze 2 und 2a ausgesprochen werden?

Antwort. I. Verschieden gewählten Punkten E und F auf p entsprechen verschiedene Lagen oder Geraden 1 bis 6 durch P, und verschieden gewählten Strahlen e und f durch P entsprechen verschiedene Lagen der Punkte I bis VI auf p. Faßt man die Aufeinanderfolge der verschiedenen Lagen der Punkte bezw. Strahlen ins Auge, so erhält man:

Satz 5. Wird eine einer gegebenen Kurve zugeordnete beliebige Gerade p von einem Punkte Q durchlaufen, so drehen sich dabei um den Pol P dieser Geraden p (Fig. 9):

α) die beiden Diagonalen des Vierseits, welches die Kurventangenten des veränderlichen Punktes Q als Gegenseiten mit den Tangenten eines beliebigen zweiten Punktes auf p bilden;

Satz 5a. Wird um einen einer gegebenen Kurve zugeordneten beliebigen Punkt P ein Strahl q gedreht, so durchlaufen dabei die Polare p dieses Punktes P (Fig. 10):

α) die beiden Gegenseitenschnittpunkte des Vierecks, welches die Kurvenpunkte der veränderlichen Geraden q als Gegenecken mit den Kurvenpunkten einer beliebigen zweiten Geraden durch P bilden;

β) die Verbindungsgerade der Berührungspunkte auf den beiden Kurventangenten des veränderlichen Punktes Q;

γ) die vierte harmonische Gerade zur gegebenen Geraden p und diesen beiden Tangenten des veränderlichen Punktes Q.

β) der Schnittpunkt der Kurventangenten in den beiden Kurvenschnittpunkten der veränderlichen Geraden q;

γ) der vierte harmonische Punkt zum gegebenen Punkte P und diesen beiden Kurvenpunkten der veränderlichen Geraden q.

II. Man kann aber auch aus der Planimetrie den Begriff des „geometrischen Ortes“ herübernehmen für die Gesamtheit der Lagen eines Punktes bezw. einer Geraden, welche gewissen Bedingungen genügen, und erhält dann:

Satz 6. Der Pol P einer beliebigen Geraden p in bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt ist der geometrische Ort für:

α) die beiden Diagonalen eines Vierseits, welches von den beiden Tangentenpaaren aus zwei beliebigen Punkten von p als Gegenseiten gebildet wird;

β) die Verbindungsgerade der Berührungspunkte auf den beiden Kurventangenten aus einem Punkte von p;

γ) die vierte harmonische Gerade zu p und den beiden Kurventangenten aus einem Punkte von p.

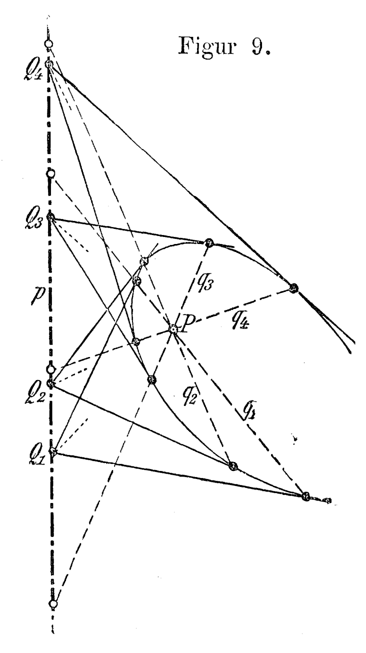
Satz 6a. Die Polare p eines beliebigen Punktes P in bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt ist der geometrische Ort für:

α) die beiden Gegenseitenschnittpunkte eines Vierseits, welches von den beiden Kurvenpunkten auf zwei beliebigen Geraden durch P als Gegenecken gebildet wird;

β) die Schnittpunkte der Kurventangenten in den beiden Kurvenschnittpunkten einer Geraden durch P;

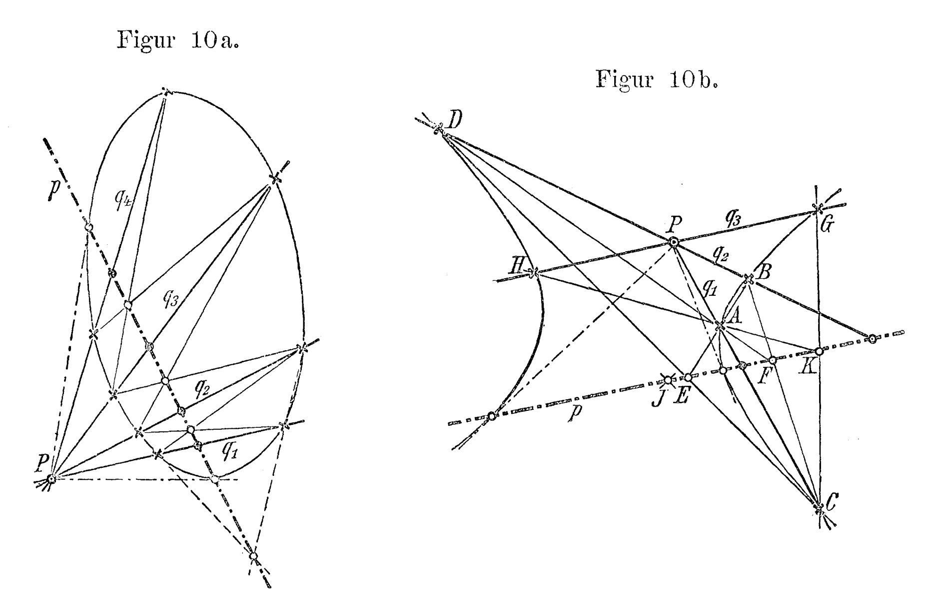
γ) den vierten harmonischen Punkt zu P und den beiden Kurvenschnittpunkten einer Geraden durch P.

Erkl. 49. Die Grundlage für jede Polaritätsbeziehung ist das Vorhandensein einer gegebenen Kurve. In Beziehung zu dieser Kurve hat jede Gerade der Ebene einen Pol, jeder Punkt der Ebene eine Polare; in Beziehung zu einer beliebigen andern Kurve hat jede Gerade einen andern Pol, jeder Punkt eine andere Polare. Daher muß in jedem Satze über Polaritätseigenschaften vorangestellt werden, daß die behandelten Punkte und Geraden in Beziehung zu dieser Kurve gesetzt werden sollen oder einer gegebenen Kurve zugeordnet sein sollen. Mit eben diesem Wortlaut geschieht solches in der vorstehenden Fassung der Sätze, während in den Sätzen 2 und 2a die Kurve als Strahlenbüschel bezw. als Punktreihe eingeführt wurde. Wegen dieser Wichtigkeit wird die der Polaritätseigenschaft



Figur 9.

zu Grunde liegende Kurve auch geradezu bezeichnet als Grundkurve, Fundamentalkurve, Kernkurve, Stützkurve der vorliegenden Polaritätsbeziehungen, und da sie eine Kurve zweiten Grades oder ein Kegelschnitt ist, wohl auch als Fundamentalkegelschnitt, Hilfskegelschnitt oder Direktrix-Kegelschnitt.



Figur 10a.

Figur 10b.

Erkl. 50. In Figur 9 finden von vorstehenden Sätzen Darstellung die beiden Fälle β und beide Fälle γ für einen inneren Punkt P bezw. eine äussere Gerade p. Zu vier verschiedenen Lagen der Punkte Q_1 bis Q_4 auf p sind die Tangentenpaare gezogen, und jedesmal geht die Berührungssehne durch P; zu jeder der vier Lagen von Q_1 bis Q_4 ist auch die vierte harmonische Gerade zu p und zu beiden Tangenten angedeutet, und jedesmal geht dieselbe nach dem Punkte P. — Ebenso sind zu vier verschiedenen Lagen der Geraden q_1 bis q_4 durch P die Kurventangenten in deren beiden Kurvenpunkten gezogen, und jedesmal liegt der Tangentenschnittpunkt auf p; zu jeder der vier Lagen von q_1 bis q_4 ist auch der vierte harmonische Punkt zu P und den beiden Kurvenschnittpunkten angegeben, und jedesmal liegt derselbe auf p. Dieser zuletzt genannte Fall γ ist derjenige, welcher vom Satze 6a die häufigste Anwendung findet.

Erkl. 51. Die beiderseitigen Teile β der obenstehenden Sätze sind, wie ein Blick auf die Figur 9 beweist, geradezu identisch, d. h. sie besagen denselben Tatbestand nur mit verschiedenen Worten. Daher wird auch von dieser Art dualistischen Zusammenhanges später noch besonders die Rede sein müssen. Auch erkennt man sofort, daß jedesmal q_1 die Polare von Q_1, bezw. Q_1 der Pol von q_1 ist, daß also auch in dieser Hinsicht die Figur 9 noch zu weiteren Folgerungen Anlaß geben muß.

Erkl. 52. In Figur 10a, b finden von obenstehenden Sätzen Darstellung die Fälle α und γ der rechtsseitigen Sätze 5a, 6a für äußeren Punkt P bezw. schneidende Gerade p. In Figur 10a gehen durch den Punkt P vier verschiedene Lagen q_1 bis q_4 der veränderlichen Geraden. Für die Geraden q_1 und q_2 sind

beide Gegenseitenpaare des Vierecks gezogen: beide Paare haben ihren Schnittpunkt auf p. Für die Geradenpaare q_2, q_3 und q_3, q_4 ist nur je ein Paar der Gegenseiten gezogen: jedesmal liegt der Schnittpunkt auf p. Man hätte auch für q_2, q_3 und q_3, q_4 je die anderen Gegenseitenpaare ziehen können und ebenfalls Schnittpunkte auf p erhalten müssen. Ebenso hätte man auch aus den Kurvenpunkten von q_1 und q_3 oder q_1 und q_4 oder q_2 und q_4 das Viereck bilden können und jeweils zwei Gegenseitenschnittpunkte auf p erhalten. Die vier Sekanten q_1 bis q_4 ermöglichen also zusammen sechs verschiedene Vierecke mit 12 Gegenseitenschnittpunkten auf p. Zur Erzeugung von p sind aber nur zwei davon nötig, und dazu eignen sich für die Zeichnung am bequemsten die innerhalb der Kurve liegenden Schnittpunkte der Geraden, welche die Kurvenschnittpunkte einer beliebigen Sekante, z. B. q_3, übers Kreuz verbinden mit den Kurvenschnittpunkten einer diesseits und einer jenseits liegenden anderen Sekante, wie q_2 und q_4. (Vergl. Verwendung dieser Konstruktion in Aufgabe 12 der Aufgabensammlung am Schluß dieses Teils.)

Erkl. 53. In Fig. 10b ist der Punkt P ein Punkt im Außenraum einer Hyperbel. Durch einen solchen gibt es Sekanten, welche nur einen Ast der Kurve schneiden, wie q_1 in Fig. 10a und b, und Sekanten, welche beide Äste der Kurve schneiden, wie q_2 und q_3. Wieder sind für die Geraden q_1 und q_2 beide Gegenseitenpaare des Vierecks gezogen: dasselbe heißt ABCDA und liefert die Schnittpunkte E und F auf p. Ferner ist für q_1 und q_3 das Gegenseitenpaar AH und CG gezogen, welches den Schnittpunkt K auf p liefert, und dazu käme als zweites Gegenseitenpaar AG und CH, welches einen Punkt J auf p (links neben E) liefert. Das durch q_2 und q_3 bestimmte Viereck BHDG wird im Gegensatz zu beiden vorigen einspringenden Vierecken ein gewöhnliches konvexes Viereck — wogegen in Fig. 10a sämtliche Vierecke überschlagene waren — und liefert durch die Gegenseiten BG und DH einen Punkt auf p links von E und J, durch BH und DG einen Punkt auf p weit rechts ausserhalb K.

Erkl. 54. Zur Darstellung des Falles γ der Sätze 5a und 6a sind in Figur 10a und 10b auf q_1 bis q_4 jeweils die auf p gelegenen vierten harmonischen Punkte zu P und den beiden Kurvenschnittpunkten markiert. Da in Fig. 10a der Punkt P auf jeder Sekante außerhalb der Strecke der Kurvenschnittpunkte liegt, so liegt der vierte harmonische Punkt jedesmal innerhalb dieser Strecke und innerhalb der Kurve. Dasselbe gilt in Fig. 10b nur für die Sekante q_1. Auf den Sekanten q_2 und q_3 in Fig. 10b liegt P zwar auch außerhalb der Kurve, aber innerhalb der Strecke der Kurvenschnittpunkte; daher liegt auf q_2 und q_3 der auf p liegende vierte harmonische Punkt außerhalb der Strecke der Kurvenschnittpunkte, doch aber innerhalb der Kurve, und zwar auf q_2 rechts von K, auf q_3 weit außen links, falls P Mittelpunkt von GH wäre, sogar im gemeinsamen unendlich fernen Punkt der parallel werdenden Geraden q_3 und p.

Erkl. 55. Der Fall δ der Sätze 2 und 2a ist in den Sätzen 5 und 6 nicht vertreten, während die Fälle α bis γ in beiden Gruppen von Sätzen übereinstimmen. Das rührt daher, daß in den Fällen α, β, γ solche Elemente genannt sind, welche unter verschiedenen Umständen verschiedene Lage haben, für welche also der Begriff des geometrischen Orts, also einer Gesamtheit von Lagen zutreffen kann. Im Falle δ der Sätze 2 und 2a dagegen sind genannt zwei Punkte bezw. zwei Gerade, die gar nicht in Betracht kommen für veränderte Lage des Vierecks bezw. Vierseits, sondern gegenüber der mannigfaltigen Lage der anderen Elemente als einzelne ausgezeichnete Elemente bestehen. Daher sind aber auch die Sätze 5 und 6 mehr nur Aussagen über die Eigenschaften

von Pol und Polare, während die Sätze 2 und 2a die ursprüngliche Definition dieser Beziehung ausdrücken.

Erkl. 56. Die in den Sätzen 6 und 6a ausgesprochenen Eigenschaften von Pol und Polare sind geeignet, die Polaritätsbeziehung selbst in neue Beleuchtung zu setzen. Nach den aus der Planimetrie entlehnten Begriffen von einem „geometrischen Ortssatze" enthält nämlich ein solcher zwei Sätze: erstens, daß wenn das besprochene Element die genannte Eigenschaft hat, ihm auch die Lage im Ort zukommen muß, — und zweitens, daß wenn das Element die Lage im Ort hat, ihm auch die genannte Eigenschaft zukommen muß. Sowie man nun aber etwa für Satz 6 den Fall β so zergliedert, so zeigt sich, daß der eine Satz jedesmal mit dem gleichen Falle β des Satzes 2, der andere mit dem gleichen Falle β des Satzes 2a zusammenfällt; ebenso bildet im Satz 6a der Fall β jedesmal die Zusammenfassung der gleichnamigen Fälle β von den Sätzen 2a und 2 in umgekehrter Ausdrucksweise. Vgl. oben Erkl. 51.

Frage 20. Zu welcher Folgerung führt die eigentümliche Übereinstimmung der beiderseitigen Fälle β in den Sätzen 2, 5, 6?

Fig. 11a.

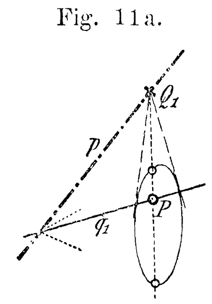
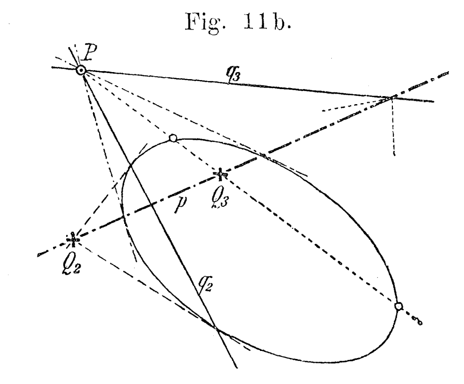


Fig. 11b.



Antwort.

Die im Falle β der Sätze 2, 5, 6 genannte Gerade ist keine andere als die Polare des zufällig gewählten Punktes Q auf p. Somit erhält man in veränderter Ausdrucksweise desselben Satzteiles die Aussage:

Satz 7. Liegt ein Punkt Q auf einer Geraden p, so geht die Polare q von Q durch den Pol P von p, — oder: Durchläuft ein Punkt Q eine Gerade p, so dreht sich seine Polare q um den Pol P der Geraden p, oder: Der geometrische Ort für die Polare q eines auf der beliebigen Geraden p liegenden Punktes Q ist der Polpunkt P von p.

Der im Falle β der Sätze 2a, 5a, 6a genannte Punkt ist kein anderer, als der Pol der zufällig gewählten Geraden q durch P. Somit erhält man in veränderter Ausdrucksweise desselben Satzteiles die Aussage:

Satz 7a. Geht eine Gerade q durch einen Punkt P, so liegt der Pol Q von q auf der Polaren p von P — oder: Dreht sich eine Gerade q um einen Punkt P, so durchläuft ihr Pol Q die Polare p des Punktes P, — oder: Der geometrische Ort für den Pol Q einer durch den beliebigen Punkt P gehenden Geraden q ist die Polare p von P.

Zum vollständigen **Beweise** dieser Sätze sind jeweils drei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

1. p liegt ganz außerhalb der Kurve, so daß auch Q_1 jedenfalls außerhalb der Kurve liegt (Fig. 11a) und q_1 die Kurve schneidet;

2. p schneidet die Kurve und Q_2 gehört der außerhalb der Kurve liegenden Strecke von p an, so daß q_2 die Kurve schneidet (Fig. 11b);

3. p schneidet die Kurve und Q_3 gehört der innerhalb der Kurve liegenden Strecke von p an (Fig. 11b), sodaß q_3 ganz außerhalb der Kurve liegt.

1. P liegt innerhalb der Kurve, so daß q_1 jedenfalls die Kurve schneidet und Q_1 außerhalb liegt (Fig. 11a);

2. P liegt außerhalb der Kurve und q_2 schneidet die Kurve, d. h. q_2 liegt im Innenwinkel der von P an die Kurve gehenden Tangenten (Fig. 11b), also Q_2 außerhalb der Kurve;

3. P liegt außerhalb der Kurve und q_3 liegt ganz außerhalb der Kurve, d. h. q_3 liegt im Außenwinkel der von P an die Kurve gehenden Tangenten (Fig. 11b), also Q_3 innerhalb der Kurve.

I. Für die beiden ersten Fälle ist der Beweis schon geliefert durch den Teil β der Sätze 2, 5, 6. Denn dort ist ausgesagt, daß die Berührungssehne jedes äußeren Punktes auf p durch P geht; und diese Berührungssehne ist eben die Polare von $Q_{1,2}$.

I. Für die beiden ersten Fälle ist der Beweis schon geliefert durch den Teil β der Sätze 2a, 5a, 6a. Denn dort ist ausgesagt, daß der Schnittpunkt der Kurventangenten in den Kurvenschnittpunkten jeder Sekante durch P auf p liegt; und der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten ist eben der Pol von $q_{1,2}$.

II. Für den dritten und auch nochmals für den zweiten Fall ergibt sich der Beweis aus Teil β der Sätze 2a, 5a, 6a, sobald man (Fig. 11b) p als eine Sekante durch Q_3 (bezw. Q_2) ansieht. Denn dort ist ausgesagt, daß der Schnittpunkt der Tangenten in den Kurvenschnittpunkten jeder Sekante durch Q_3 auf q_3 liegt, d. h. daß q_3 durch den Schnittpunkt der Tangenten in den Kurvenpunkten einer beliebigen Sekante durch Q_3 hindurchgeht; nun ist aber P der Tangentenschnittpunkt zur Sekante p durch Q_3, also geht q_3 durch P.

II. Für den dritten (und auch nochmals für den zweiten) Fall ergibt sich der Beweis aus Teil β der Sätze 2, 5, 6, sobald man P als einen Punkt auf q_3 bezw. q_2 ansieht. Denn dort ist ausgesagt, daß die Berührungssehne jedes Punktes von q_3 durch Q_3 geht, d. h. daß Q_3 auf der Berührungssehne eines beliebigen Punktes von q_3 liegt; nun ist aber p die Berührungssehne zu Punkt P auf q_3, also liegt Q_3 auf p.

III. Für den dritten und ersten Fall erhält man auch einen Beweis aus Teil γ der Sätze 2a, 5a, 6a, indem man Q_1 bezw. Q_3 mit P verbindet. Denn dort ist ausgesagt, daß der vierte harmonische Punkt zu Q und den Kurvenschnitt-

III. Für den dritten und ersten Fall erhält man auch einen Beweis aus Teil γ der Sätze 2, 5, 6, indem man q_1 bezw. q_3 mit p zum Schnitt bringt. Denn dort ist ausgesagt, daß der vierte harmonische Strahl zu q und den

punkten jeder durch Q gehenden Sekante auf q liegen muß, d. h. daß q durch jeden solcher vierten harmonischen Punkte hindurch gehen muß; aber auf der Geraden QP ist eben P dieser vierte harmonische Punkt, folglich geht q durch P.

IV. Die letztgenannte Beweisführung für den ersten und dritten Fall läßt sich auch in umgekehrter Weise erbringen aus Teil γ der Sätze 2, 5, 6, indem man die zu Q_1 bezw. Q_3 gesuchte Polare q gefunden und mit p geschnitten denkt. Dann muß q zu p und den vom Punkte (pq) ausgehenden Kurventangenten der vierte harmonische Strahl sein. Nach der angezogenen Stelle der früheren Sätze gehen aber solche vierten harmonischen Strahlen aus allen Punkten auf p sämtlich durch P, also muß auch q durch P gehen.

Kurventangenten jedes auf q liegenden Punktes durch Q gehen muß, d. h. daß Q auf jedem solcher vierten harmonischen Strahlen liegen muß; aber im Schnittpunkte (pq) ist eben p dieser vierte harmonische Strahl, folglich liegt Q auf p.

IV. Die letztgenannte Beweisführung für den ersten und dritten Fall läßt sich auch in umgekehrter Weise erbringen aus Teil γ der Sätze 2a, 5a, 6a, indem man den zu q_1 bezw. q_2 gesuchten Pol Q gefunden und mit P verbunden denkt. Dann muß Q zu P und den auf PQ liegende Kurvenschnittpunkten der vierte harmonische Punkt sein. Nach der angezogenen Stelle der früheren Sätze liegen aber solche vierten harmonischen Punke auf allen Sekanten durch P sämtlich auf p, also muß auch Q auf p liegen.

Erkl. 57. Man könnte versucht sein, die vorstehenden Sätze 7 und 7a ohne weiteren Beweis aus dem Teil β der Sätze 2, 5, 6 zu übernehmen. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich aber alsbald, daß jener Satz die Anwendung nur zuläßt für diejenige Lage, daß der Punkt Q außerhalb der Kurve bleibt, bezw. q die Kurve schneidet, daß also von Punkt Q bezw. in Kurvenschnittpunkten von q Tangenten an die Kurve möglich sind. Dieses trifft aber nur zu für die beiden ersten Fälle der obenstehenden Unterscheidung. Man müßte also mindestens für den dritten Fall gesonderte Beweisführung aufstellen. Und unter solchen Umständen ist es vorzuziehen, dem außerordentlich wichtigen Satze überhaupt vollständige Begründung zu geben; für die einfachsten Fälle kann dabei allerdings kurz aufs obige verwiesen werden.

Erkl. 58. Die drei Fälle, welche für die vollständige Beweisführung unterschieden werden müssen, haben zu je zweien gemeinsame Gesichtspunkte, welche für die beiderseitigen Sätze 7 und 7a gleicherweise zutreffen.

Der erste und zweite Fall haben gemeinsam, daß Q außerhalb der Kurve liegt, bezw. daß q die Kurve schneidet; dagegen unterscheiden sie sich dadurch, daß im ersten Fall die Verbindungs-Gerade PQ die Kurve schneidet, bezw. der Schnittpunkt von p und q außerhalb der Kurve liegt, — während im zweiten Fall die Verbindungsgerade PQ ganz außerhalb der Kurve verläuft, bezw. der Schnittpunkt (pq) innerhalb der Kurve liegt.

Der zweite und dritte Fall haben gemeinsam, daß P außerhalb der Kurve liegt bezw. p die Kurve schneidet. Dagegen unterscheiden sie sich wieder dadurch, daß im zweiten Fall die Verbindungsgerade PQ ganz außerhalb der Kurve läuft, bezw. der Schnittpunkt (pq) innerhalb der Kurve liegt, — während im dritten Falle die Verbindungsgerade PQ die Kurve schneidet, bezw. der Schnittpunkt (pq) außerhalb der Kurve liegt.

Der dritte und erste Fall haben gemeinsam, daß die Verbindungsgerade PQ die Kurve schneidet, bezw. der Schnittpunkt (pq) außerhalb der Kurve liegt; dagegen unterscheiden sie sich dadurch, daß im dritten Falle Q innerhalb der Kurve bezw. q ganz außerhalb der Kurve liegt, — während im ersten Falle Q außerhalb liegt, bezw. q die Kurve schneidet.

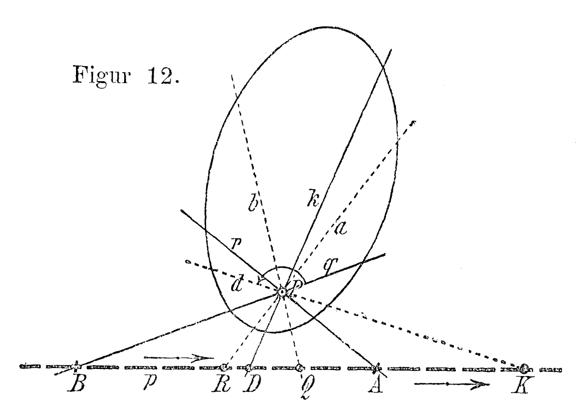
Erkl. 59. Entsprechend den oben erörterten Unterscheidungen geben die Figuren 11a und 11b die dreierlei Fälle in verschiedener Zeichnung. Figur 11a zum ersten Falle ist fast identisch mit Figur 9 Seite 25: wandert Q_1 auf p, so dreht sich q_1 um P und umgekehrt, vgl. Erkl. 51. In Figur 11b ist auf der Sekante p einerseits Q_2 außerhalb, also q_2 schneidend — andrerseits Q_3 innerhalb, also q_3 außerhalb. Von Q_2 und ebenso vom Schnittpunkt (pq_3) gibt es Tangenten an die Kurve, von Q_3 aber und vom Schnittpunkt (pq_2) gibt es keine Tangenten an die Kurve. Demnach werden auch die Beweisführungen ermöglicht durch Tangenten aus Q bezw. in den Kurvenschnittpunkten von q im ersten und zweiten, nicht im dritten Fall, — durch Tangenten aus P bezw. in den Kurvenschnittpunkten von p im zweiten und dritten Falle, nicht aber im ersten, — durch harmonische Punkte auf PQ bezw. harmonische Strahlen im Schnittpunkte (pq) im ersten und dritten, nicht aber im zweiten Falle.

Erkl. 60. Nimmt man die Abschnitte III und IV des obenstehenden Beweises als gleichartig zusammen, so hat man für jeden der drei Fälle doppelte Auswahl, da jeder der drei Einzelbeweise sich auf zwei Fälle gleichzeitig erstreckt. Mit Tangenten, seien sie bestimmt durch Q bezw. q oder durch P bezw. p, kann man jedesmal auskommen; mit harmonischen Elementen, nämlich entweder P und Q als harmonischen Punkten zu den Kurvenpunkten auf PQ, oder p und q als harmonischen Strahlen zu den Kurventangenten aus (pq), nur in den Fällen, wo PQ die Kurve schneidet bezw. (pq) außerhalb der Kurve liegt, also im ersten und dritten der obigen Unterscheidungsfälle.

Erkl. 61. Die beiden Beweise III und IV unterscheiden sich dadurch, daß bei III links mit harmonischen Punkten, rechts mit harmonischen Strahlen gearbeitet wird, und umgekehrt bei IV links mit harmonischen Strahlen und rechts mit harmonischen Punkten. Da für das Auge die Beziehung von vier harmonischen Punkten auf einer Geraden leichter zu überschauen ist, als jene von vier harmonischen Strahlen durch einen Punkt, so wird manchmal vorgezogen, in beiden Fällen nur mit harmonischen Punkten zu arbeiten, indem man für den Satz 7 die Beweisführung III links und für den Satz 7a die Beweisführung IV rechts verwendet. Auch insofern stehen also die Beweise III und IV gewissermaßen als gleichwertig nur einfach neben den Abschnitten I und II des obigen Beweises.

Erkl. 62. Die Sätze 7 und 7a bilden zwar zunächst nur die Verallgemeinerung einer in den Sätzen 2 bis 6 für einen Einzelfall bereits enthaltenen Aussage. Diese Feststellung der Allgemeingiltigkeit ist aber von den weitgehendsten Folgen für die Auffassung und Verwertung der Polaritätstheorie überhaupt; denn sie bildet, wie die Antwort 21 und folgende nachweist, die Grundlage für die gesamten Dualitätsbegriffe.

Frage 21. Welche Anwendungen ergeben sich aus den vorigen Sätzen 7 und 7a für beliebige Figurenelemente der Zeichenebene?



Figur 12.

Antwort. Wenn man in der Zeichenebene eine beliebige Kurve zweiten Grades als Fundamentalkurve für Zuordnung von Pol und Polare gegeben ansieht, so ergeben sich folgende Beziehungen:

1. Einem gegebenen Punkte P bezw. Q entspricht als Polare je eine Gerade p bezw. q, deren Lage zur Kurve durch Satz 3a bestimmt ist.

2. Einer bezw. mehreren gegebenen Geraden durch P entsprechen als Polpunkte einer bezw. mehrere Punkte auf p, und zwar der Gesamtheit von schneidenden Geraden durch P die Gesamtheit der äußeren Punkte auf p, der Gesamtheit der nicht schneidenden Geraden durch P die Gesamtheit der inneren Punkte auf p, — den beiden Tangenten durch P die beiden Kurvenschnittpunkte von p mit der Kurve. (Fig. 12 u. 13.)

3. Dem Strahlenbüschel mit Scheitel P entspricht also die Punktreihe mit Träger p.

4. Den Verbindungsgeraden zweier Punkte P und Q entspricht als Pol der Schnittpunkt ihrer beiden Polar-Geraden p und q.

5. Einer Figur aus mehreren Punkten P, Q, R . . . nebst deren Verbindungsgeraden PQ, PR, QR . . . (einem vollständigen n-Eck) entspricht als Polarfigur die Figur der Polar-Geraden p, q, r . . . nebst deren Schnittpunkten (pq), (pr), (qr) . . . (ein vollständiges n-Seit).

6. Einem vollständigen Viereck mit seinen Ecken, Seiten, Neben-

1. Einer gegebenen Geraden p bezw. q entspricht als Pol je ein Punkt P bezw. Q, dessen Lage zur Kurve durch Satz 3 bestimmt ist.

2. Einem bezw. mehreren gegebenen Punkten auf p entsprechen als Polaren eine bezw. mehrere Gerade durch P, und zwar der Gesamtheit von äußeren Punkten auf p die Gesamtheit der schneidenden Geraden durch P, der Gesamtheit der inneren Punkte auf p die Gesamtheit der nicht schneidenden Geraden durch P, — den beiden Kurvenschnittpunkten auf p die beiden Kurventangenten von P an die Kurve. (Fig. 12 u. 13.)

3. Der Punktreihe mit Träger p entspricht also der Strahlenbüschel mit Scheitel P.

4. Dem Schnittpunkt zweier Geraden p und q entspricht als Polare die Verbindungsgerade ihrer beiden Pol-Punkte P und Q.

5. Einer Figur aus mehreren Geraden p, q, r . . . nebst deren Schnittpunkten (pq), (pr), (qr) (einem vollständigen n-Seit) entspricht als Polarfigur die Figur der Polpunkte P, Q, R . . . nebst deren Verbindungsgeraden PQ, PR, QR . . . (ein vollständiges n-Eck).

6. Einem vollständigen Vierseit mit seinen Seiten, Ecken, Neben-

ecken, harmonischen Punkten und Strahlen entspricht ein vollständiges Vierseit mit seinen Seiten, Ecken, Nebenseiten, harmonischen Strahlen und Punkten.

seiten, harmonischen Strahlen und Punkten entspricht ein vollständiges Viereck mit seinen Ecken, Seiten, Nebenecken, harmonischen Punkten und Strahlen.

Man erhält daher das wichtige Ergebnis:

Satz 8. In zwei polar zugeordneten Figuren entsprechen vier harmonischen Punkten bezw. Strahlen der einen Figur stets auch wieder vier harmonische Strahlen bezw. Punkte der anderen Figur, — oder

Satz 8a. Polar zugeordnete Figuren sind stets projektivisch verwandt. (Vgl. Erkl. 69 und 70.)

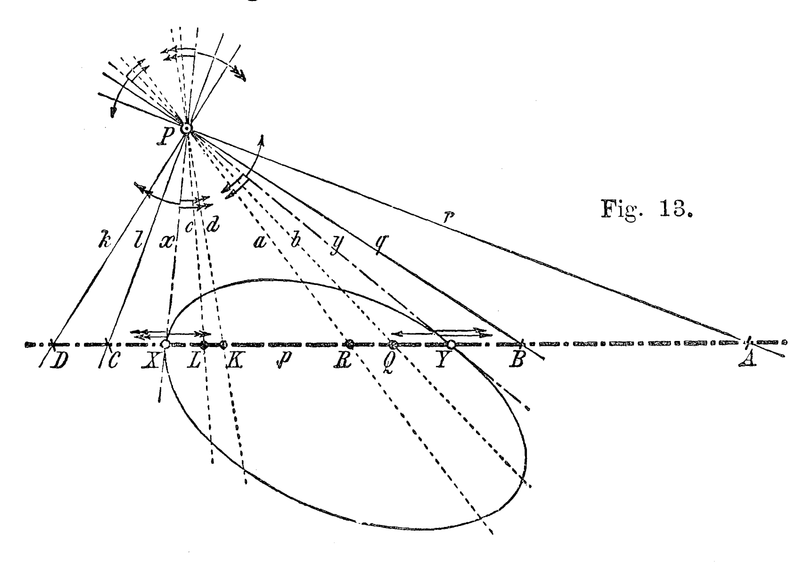


Fig. 13.

Erkl. 63. In den Figuren 12 und 13 sind die Beziehungen der obenstehenden Antwort 21 dargestellt für einen inneren Punkt P bezw. äußere Gerade p, und für äußeren Punkt P bezw. schneidende Gerade p. Der erstere Fall, Fig. 12, ist der einfachere, denn es gibt durch P keine anderen Geraden, als schneidende, und auf p keine anderen Punkte, als äußere Punkte. Die durch P gehenden Geraden q, k, r entsprechen ihren auf p liegenden Polpunkten Q, K, R und umgekehrt; ebenso auch den auf p liegenden Punkten BDA ihre durch P gehenden Polaren b, d, a. Durchläuft man den Büschel der durch P gehenden Strahlen in der Umlaufsrichtung qakbrdq, so wird die auf p liegende Punktreihe der Pole durchlaufen in der Richtung QAK∞BRD, also durchweg in der gleichen Richtung wie die Schnittpunkte der zugeordneten Polaren. Einem der Strahlen zwischen k und b entspricht der unendlich ferne Punkt der Geraden p, dem dahingehenden Parallelstrahle durch P ein Punkt auf p zwischen Q und D. Kein Strahl des Büschels P geht durch den ihm zugeordneten Punkt von p selbst hindurch.

Erkl. 64. Mehr Einzelheiten weist der in Fig. 13 dargestellte Fall des äußeren Punktes P auf. In dem durch P gehenden Strahlenbüschel hat man zu unterscheiden 1. einen Winkelraum (nebst Scheitelwinkelraum) von nicht schneidenden Geraden, wie q, r, k, l, und dementsprechend in der auf p liegenden

Punktreihe eine Strecke von inneren Punkten Q, R, K, L. Dazu kommt 2. im Büschel P ein Winkelraum (nebst Scheitelwinkelraum) von schneidenden Geraden, wie b, a, d, c, und dementsprechend in der Punktreihe p eine Strecke von äußeren Punkten BADC, deren beide Seiten durch den unendlich fernen Punkt von p verknüpft werden. Beide Winkelräume sind 3. getrennt bezw. verbunden durch die beiden berührenden Geraden x und y, entsprechend den auf p liegenden Kurvenpunkten X und Y. Die letztgenannten Elemente sind auch die wichtigsten für die Durchlaufung des Büschels P bezw. der Punktreihe p. Beginnt man mit dem Strahle y eine Durchlaufung des Büschels P in der Weise, daß Strahl y um P nach außen gedreht wird (in der Richtung gegen den Uhrzeiger Fig. 13), also nach den Strahlen q, r hin, so entspricht dem eine Durchlaufung der Reihe der Polpunkte auf p von Y in der Richtung nach dem Innern der Kurve (nach links in Fig. 13); dreht man aber y um P nach innen (mit dem Uhrzeiger, Fig. 13) über b nach a usw., so entspricht dem die Durchlaufung der Punktreihe p von Y nach außen über B nach A usw. Ebenso entsprechen einander bei den Elementen X und x die Verschiebung des Punktes X auf p nach innen (Fig. 13 nach rechts über L nach K) bezw. nach außen (Fig. 13 nach links über C nach D) und die Drehung des Strahles x um P nach außen (Fig. 13 mit dem Uhrzeiger über l nach k) bezw. nach innen (Fig. 13 gegen den Uhrzeiger über c nach d). Wird der Strahlenbüschel P in Fig. 13 als ganzer durchlaufen in der Reihenfolge der Elemente q r k l x c d a b y q, so wird die Punktreihe der Polpunkte auf p durchlaufen in der Reihenfolge Q R K L X C D ∞ A B Y Q, also in entgegengesetzter Richtung wie die Schnittpunkte des Trägers p mit den zugeordneten Polargeraden der genannten Punkte. Einem der Strahlen zwischen a und d entspricht der unendlichferne Punkt der Geraden p, dem dahingehenden Parallelstrahle durch P entspricht einer der Punkte zwischen K und R.

Erkl. 65. Am deutlichsten wird die Verschiedenheit der Zuordnung in Fig. 12 und 13 erkannt, wenn man auf p zu den Punkten Q, R usw. die Schnittpunkte der zugeordneten Polaren q, r ins Auge faßt, bezw. im Büschel P zu den Strahlen q, r . . . die Verbindungsstrahlen nach den zugeordneten Punkten Q, R . . . Man nennt zwei Punkte der erstgenannten Art zwei konjugierte Punkte, zwei Strahlen der letztgenannten Art zwei konjugierte Strahlen. In Fig. 12 weisen die Punkte R Q K und ihre konjugierten Punkte B D A die gleiche Durchlaufungsrichtung in der Punktreihe p auf, ebenso wie auch in derselben Fig. 12 die Strahlen q k r und deren konjugierte Strahlen b d a die gleiche Umlaufsrichtung im Büschel P. Dagegen zeigen in Fig. 13 die Punkte Q R K L die entgegengesetzte Durchlaufsrichtung in der Punktreihe p, als deren konjugierte Punkte B A D C, und ebenso die Strahlen q r k l im Büschel P die entgegengesetzte Durchlaufungsrichtung, als deren konjugierte Strahlen b a d c. Während daher in Fig. 12 ein Zusammenfallen konjugierter Punkte oder konjugierter Strahlen nie stattfindet, bilden in Fig. 13 die Punkte X und Y bezw. die Strahlen x und y solche Elemente, in welchen zwei konjugierte zusammenfallen. Betrachtet man Punkt P als Scheitel zweier Strahlenbüschel, nämlich des ersten Büschels der Strahlen q, k, r und des zweiten Büschels der dazu konjugierten Strahlen b, d, a, und ebenso die Gerade p als Träger zweier Punktreihen, nämlich der ersten Punktreihe der Punkte Q, K, R und der zweiten Punktreihe der dazu konjugierten Punkte B, D, A, so sieht man, daß in Fig. 12 die konjugierten Elemente beider Gebilde in gleicher Richtung hinter einander herwandern, ohne einmal zusammenzutreffen oder einander zu begegnen. In Fig. 13 aber laufen in beiden Gebilden die konjugierten Elemente in entgegengesetzter Richtung und müssen daher einander bei einem vollständigen Umlauf zweimal begegnen. In der Tat kommen

die Punkte AB ihren konjugierten RQ bezw. die Strahlen r, q ihren konjugierten a, b entgegen, um in den Elementen Y bezw. y übereinander wegzugehen. Bis dann der erstere Punkt die Innenstrecke YX von rechts nach links durchlaufen hat, bezw. der Strahl den Winkelraum yx mit dem Uhrzeiger, überstreicht der konjugierte Punkt die Außenstrecke von Y über B, A ins Unendliche und von da zurück über DC nach X, bezw. der konjugierte Strahl den Winkelraum yx von y über q, r, k, l nach x, — und in den Elementen X bezw. x findet zum zweiten Male Begegnung statt, indem die beiderlei konjugierten Elemente zusammenfallen.

Erkl. 66. Die links- bezw. rechtsseitig in voriger Antwort 21 ausgesprochenen Sätze weisen mehrfach ganz identischen Inhalt auf — etwa wie wenn man im Zahlenrechnen sagte einerseits $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$, andererseits $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$. Nur im wörtlichen Ausdruck bleibt dann die Verschiedenheit der Auffassung erkennbar, ob man vom einen oder andern Gesichtspunkte ausgegangen ist. Daher ist auch die Anzahl der vorigen Aussagen auf solchen Umfang beschränkt geblieben, daß eben der Satz 8 als wichtigstes Ergebnis beiderseits als vollständig abgeleitet erscheint. Weitere Beziehungen derselben Art brauchen nicht doppelt ausgesprochen zu werden, sondern nur durch Angabe der beiden entsprechenden Gebilde — einerlei ob man links aussagt, das eine entspreche dem anderen, oder ob rechts erklärt wird, das andere entspreche dem einen. Vergl. auch Antwort 23 u. ff.

Erkl. 67. Die in der Antwort 21 als vierte bezeichnete Aussage ist recht eigentlich nur eine veränderte Ausdrucksweise des Satzes 7 selber. Denn man kann die Ergebnisse fast ebenso auch äußerlich formell niederschreiben, wie dies stattfindet bei dem metrischen Satze von der Gleichheit zweier Größen, die beide derselben dritten gleich sind. Wie man z. B. die Sätze der Aufgabe 50 des I. Teiles schriftlich formulieren konnte:

$$\begin{array}{c} t_1 \;\overline{\wedge}\; t_2 \\ t_1 \;\overline{\wedge}\; t_3 \\ \hline t_2 \;\overline{\wedge}\; t_3 \end{array}$$

ebenso kann man nunmehr schreiben:

Punkt P polar zur Geraden p
Punkt Q polar zur Geraden q
————————————————
Verbindungsgerade (PQ) polar zum Schnittpunkt (pq), denn man hat:

Gerade PQ geht durch P, folglich liegt deren Polpunkt auf p
Gerade PQ geht durch Q, folglich liegt deren Polpunkt auf q
————————————————
Also ist der Schnittpunkt (pq) der Polpunkt zur Geraden (PQ);

oder umgekehrt: Schnittpunkt (pq) liegt auf p, folglich geht dessen Polare durch P
Schnittpunkt (pq) liegt auf q, folglich geht dessen Polare durch Q
————————————————
Also ist die Verbindungerade (PQ) die Polare zum Punkt (pq).

Erkl. 68. In genau gleicher Weise kann die Ableitung schriftlich niedergelegt werden, wenn zu drei oder vier Punkten P, Q, R, U die Polaren p, q, r, u gegeben sind. Dann werden polar zugeordnet die sechs Seiten des Vierecks PQRU, nämlich PQ, PR, PU, QR, QU, RU, und die sechs Ecken des Vierseits pqru, nämlich pq, pr, pu, qr, qu, ru, die drei Nebenecken des Vierecks, nämlich die Schnittpunkte von je zwei Gegenseiten PQ, RU, von PR, QU, von PU, QR, und die Nebenseiten des Vierseits, nämlich die Verbindungsgeraden von je zwei Gegenecken pq, ru, von pr, qu, von pu, qr. Und wie dann auf der Verbindungsgeraden je zweier Nebenecken des Vierecks vier harmonische Punkte liegen, „weil sie zum Viereck solche Lage haben, daß usw. —“, so

gehen deren Polaren durch die Schnittpunkte je zweier Nebenseiten des Vierseits als vier harmonische Gerade, „weil sie zum Vierseit solche Lage haben, daß usw.“

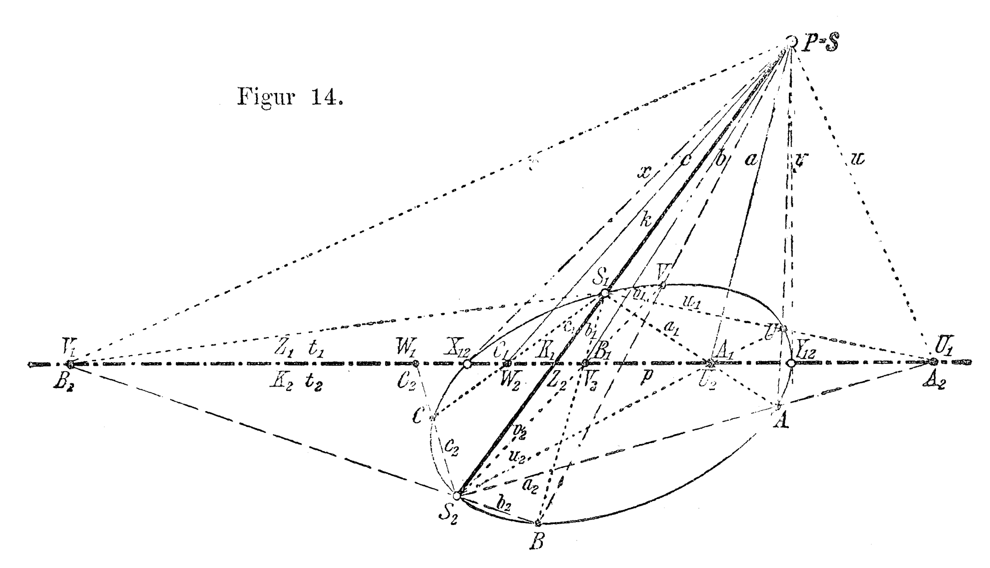
Erkl. 69. Zum Begriff der projektivischen Verwandtschaft gehört die Grundbedingung, daß zwei Gebilde, wenn sie gleichartig sind (also beides Punktreihen oder beides Strahlenbüschel usw.), sich in perspektivische Lage bringen lassen, oder daß zwei Gebilde — ob gleichartig oder nicht — als erstes und letztes in einer Reihe angesehen werden können, in welcher je zwei aufeinanderfolgende durch Projektion auseinander hervorgehen (Antwort 22 des I. Teiles). Nun lassen sich zwei Gebilde erster Stufe (Punktreihen, Strahlenbüschel), wenn bloß je zwei Elemente als zugeordnete festgelegt sind, in beliebig vielfacher Weise projektivisch zuordnen, nämlich durch beliebige Hinzunahme eines dritten Paares zugeordneter Elemente. Ist ferner angenommen, daß beliebig gegebenen dreien Elementen des einen Gebildes beliebig gewählte drei Elemente eines andern zugeordnet sein sollen, so kann eine projektivische Verwandtschaft beider Gebilde noch in sechsfacher Weise hergestellt werden, je nach der Art, wie die drei Elemente des einen Gebildes behufs Zuordnung zu den einzelnen des anderen unter sich gruppiert werden. Ist aber endlich zwischen drei einzelnen Elementepaaren beider Gebilde die Zuordnung eindeutig festgesetzt, dann läßt sich nur noch auf eine einzige Weise die projektivische Verwandtschaft vermitteln; denn welche Vermittelungsgebilde auch verwendet werden mögen, am Schlusse jeder verschiedenen Projektionsfolge wird zum gleichen vierten Element des einen Gebildes stets wieder das gleiche vierte Element des anderen Gebildes als zugeordnet erscheinen (Erkl. 99 des II. Teiles).

Erkl. 70. Wenn verlangt wird, daß vier beliebig gewählten Elementen eines ersten Gebildes vier beliebig gewählte Elemente des zweiten Gebildes entsprechen sollen, so ist dies durch eine projektivische Verwandtschaft beider Gebilde im allgemeinen nicht erreichbar, es sei denn, daß die vier Elemente des ersten Gebildes und ebenso die entsprechenden des zweiten vier harmonische sind. In diesem Falle geht die neue Frage zurück auf einen der beiden letzten Fälle der vorigen Erkl. 69. Ist nämlich bloß verlangt, daß beliebig gegebenen vier harmonischen Elementen des einen Gebildes beliebig gewählte vier harmonische Elemente des zweiten entsprechen sollen, dann kann man auf achtfache Weise die projektivische Verwandtschaft beider Gebilde herstellen, je nach der Art, wie die harmonischen Elemente des einen Gebildes behufs Zuordnung zu den einzelnen des anderen unter sich zu je zwei getrennten Paaren gruppiert werden (Satz 6 des I. Teiles und Antwort 6 des II. Teiles). Ist aber zwischen dreien von den vier Elementen des einen Gebildes und drei einzelnen Elementen von den vier zuzuordnenden der andern auch die Gruppierung festgelegt, so kann die projektivische Verwandtschaft nur noch auf eine einzige Weise hergestellt werden (S. Erkl. 36 des II. Teiles). — Es wird Sache besonderer Untersuchung sein, die Beziehungen zwischen dem vorliegenden Satz 8 und dem Satze über Vierecksfiguren in Aufgabe 26 des II. Teiles, sowie beider Sätze mit dem Inhalt der Erkl. 13 des II. Teiles noch genauer aufzudecken.

Frage 28. Wie kann die Richtigkeit des vorigen Satzes 8 auch unmittelbar an der Figur nachgewiesen werden?



Figur 14.



Erkl. 71. Ebenso wie in Fig. 12 für innere Punkte P, in Fig. 13 für äußere Punkte P die Darstellung gegeben war, so ist in Fig. 14 zunächst wieder für äußere Punkte P, in der nachfolgenden Fig. 15 für innere Punkte P die konstruktive Beweisführung verzeichnet. Der Studierende möge also nicht versäumen, an jeder der beiden Figuren 14 und 15 die Elementenreihen durchzugehen, und zwar nicht nur für a, sondern auch für b und c bezw. u, v, w. Man hat nämlich jedesmal die Reihen a, A_1, a_1, A, a_2, A_2 oder auch a, A_1, u_2, U, u_1 A_2 bezw. rückwärts u, U_1, u_1, U, u_2, U_2; ferner b, B_1, b_1, B, b_2, B_2, oder auch b, B_1, v_2, V, v_1, B_2 bezw. rückwärts v, V_1, v_1, V, v_2, V_2; endlich c, C_1, c_1, C, c_2, C_2, oder auch, was aber nicht eingezeichnet ist, c, C_1, w_2, W, w_1, C_2 bezw. rückwärts, was ebenfalls nicht eingezeichnet ist, w, W_1, w_1, W, w_2, W_2.

Erkl. 72. Die Fig. 14 für den äußeren Punkt P ist hier vorausgestellt, weil bei dieser Lage der Elemente das Viereck S_1 S_2 A U deutlicher fürs Auge zu überschauen ist, als in Figur 15, wo dasselbe Viereck noch von allen andern Geraden durchkreuzt wird. In einer unwesentlichen Kleinigkeit unterscheiden sich noch die Figur 14 und 15, daß nämlich in

Antwort. 1) Um die Richtigkeit des Satzes 8a unmittelbar an der Figur nachzuweisen, müßte man zeigen können, daß die Strahlen durch P und die ihnen polar zugeordneten Polpunkte auf p durch eine fortlaufende Reihe von Projektionen aus einander hervorgehen. — Es muß zu dem Zwecke gleichwertig sein, ob der Übergang so, wie er eben ausgesprochen wurde, von den Strahlen durch P nach den Punkten auf p bewerkstelligt wird oder in umgekehrter Folge von den Punkten auf p nach den ihnen polar zugeordneten Polarstrahlen durch P, da die Aussagen links und rechts in Antwort 21 inhaltlich gleichbedeutend sind.

2) Zu diesem Zwecke zieht man zunächst eine beliebige feste Sekante von P durch die Kurve, projiciert sodann den willkürlich gewählten Strahl a des Punktes P auf die Gerade p und erhält so den Punkt A_1. Diesen verbindet man mit dem einen Kurvenschnittpunkt S_1 der beliebigen Sekante aus P und erhält dadurch den Projektionsstrahl a_1. Wo dieser die Kurve trifft, entsteht der Kurvenpunkt A, und

Figur 15 die Verbindungsgerade BV gerade mit a zusammenfällt, was in Figur 14 nicht der Fall ist. Während also in Figur 15 für die Gerade PBV der Polpunkt konstruiert ist, bleibt diese Gerade in Figur 14 außer Behandlung. Ebenso sind die Geraden PAU in beiden Figuren ohne Benennung und konstruktive Durchführung geblieben.

Erkl. 73. Der sachliche Hauptunterschied der Figuren 14 und 15, ebenso wie zwischen 12 und 13, besteht aber im Vorhandensein der Tangenten x und y vom äußeren Punkte P, während der innere Punkt P keine Tangenten liefert. Betrachtet man die oben für a bzw. u, b bezw. v und c bezw. w durchgeführten Elementenreihen für die Strahlen x und y, so fällt X_1 in den Berührungspunkt der Kurve, die Verbindungsgerade $S_1 X_1$ trifft die Kurve wieder im selben Punkte, und dessen Projektionsstrahl S_2 X schneidet die Gerade p ebenfalls wieder im gleichen Punkte X_2. Demnach fällt in denselben Kurvenberührungspunkt jeder der sonst getrennt auftretenden Punkte X_1, X, X_2 zusammen; die Tangenten x und y von P an die Kurve sind die einzigen Strahlen des Büschels S, bezw. die Kurvenschnittpunkte X und Y von p mit der Kurve sind die einzigen Punkte der Punktreihe p, welche mit ihren polar zugeordneten Elementen vereinigt liegen, d. h. so, daß die Punkte auf den zugeordneten Strahlen liegen, die Strahlen durch die zugeordneten Punkte hindurchgehen. — In Figur 15 gibt es überhaupt keine Elementepaare dieser Art, daß ein Strahl von P und sein zugeordneter Punkt auf p sich in vereinigter Lage befinden.

Erkl. 74. Besondere Erwähnung fordert noch die in beiden Figuren 14 und 15 beliebig gewählte feste Sekante $P S_1 S_2$. Auch sie bildet einen Strahl durch P. Bezeichnet man dieselbe als k, so liegt Punkt K_1 im Schnittpunkt mit p, $S_1 K_1$ fällt mit $S_1 S_2$ zusammen, folglich entspricht dem Strahl $S_1 K_1$ die Tangente in S_2 als Strahl k_2 und dieser wieder wird projiciert aus dem zweiten Kurvenschnittpunkt S_2 der vorgenannten Sekante aus P durch den Projektionstrahl a_2. Letztere endlich trifft die Gerade p im gesuchten Polpunkte A_2. — Man hätte auch den Punkt A_1 erst aus S_2 projicieren können durch den Strahl u_2, erhält dadurch den Kurvenpunkt U, projiciert diesen aus S_1 durch den Stahl u_1 und erhält auf p denselben Punkt A_2.

3) Daß hierbei Strahl a und Punkt A_2 wirklich polar zugeordnete Elemente sind, ersieht man aus dem der Kurve eingeschriebenen vollständigen Viereck $S_1 S_2$ A U. Betrachtet man nämlich als Gegenseitenpaare erst $P S_1 S_2$, PUA und S_1 A, S_2 U, so folgt nach Fall α der Sätze 2a, 5a, 6a, daß a die Polare von A_2 und umgekehrt A_2 als Schnittpunkt von a_2 und u_1 der Pol von a ist. Betrachtet man aber als Gegenseitenpaare $A_2 S_1$, $A_2 S_2$ und S_1 A, S_2 U, so erkennt man, daß auch wirklich p die Polare von P ist, daß also p durch den Schnittpunkt von a_2 und u_1 gehen muß, und daß somit der Punkt A_2 sowohl durch a_2 und p allein, als auch durch u_1 und p allein konstruiert werden konnte. — Faßt man auch noch das dritte Paar Gegenseiten $P S_1 S_2$, PAU und a_2, u_1 ins Auge, so findet man, daß außerdem auch die Verbindungsgerade von P nach A_2 die Polare des Punktes A_1 ist.

4) Auf Grund dieser Festlegungen ist nun die projektivische Verwandtschaft zwischen den polar zugeordneten Elementen direkt aus der Figur abzulesen: Die Gesamtheit der durch P gehenden Geraden a, b, c.. bildet einen Strahlenbüschel, welcher als Strahlenbüschel S bezeichnet werden möge. Dessen Projektion auf p bildet die Punktreihe der Punkte A_1, B_1, C_1, ..., welche als t_1 bezeichnet werden

schneidet p im zugehörigen Punkte K_2. — Benutzt man statt $S_1 K_1$ zuerst $S_2 K_2$, so fällt dieser Strahl mit $S_2 S_1$ zusammen, also entspricht ihm die Tangente in S_1. Diese muß aber die Polare p im gleichen Punkte K_2 treffen, wie die Tangente in S_2, denn der Polpunkt zum Strahl k ist ja eben der Schnittpunkt der Tangenten in S_1 und S_2 und muß auf der Polaren p zu P liegen. Der Strahl $P K_1$ übernimmt in der Auffassung als $S_1 S_2$ bezw. als $S_2 S_1$ die Rolle des früher als d_1 bezw. als e_2 bezeichneten gemeinsamen Strahles der beiden Büschel S_1 und S_2. Verbindet man den eben gewonnenen Punkt K_2, aufgefaßt als Punkt Z_1 der Punktreihe t_1, mit P durch einen Strahl z, so entsteht in gleicher Weise rückwärts ein Punkt Z_2, der mit Punkt K_1 zusammenfällt. Und in Figur 14 liegt K_1 zwischen $B_1 C_1$, K_2 zwischen $B_2 C_2$; Z_1 zwischen $V_1 W_1$, Z_2 zwischen $V_2 W_2$; in Figur 15 liegt K_1 zwischen $U_1 V_1$, K_2 weit links außen zwischen $U_2 V_2$, Z_1 eben dort zwischen $A_1 B_1$, Z_2 innen zwischen $A_2 B_2$.

Erkl. 75. Während in nebenstehender Reihe von aufeinanderfolgenden Projektionen alle Verwandtschaften solche in perspektivischer Lage sind außer jener zwischen S_1 und S_2, darf man nur an das Ent-

möge. Diese Punktreihe t_1 wird projiziert durch die Strahlen a_1, b_1, c_1 des Büschels S_1. Die Strahlen dieses Strahlenbüschels S_1 werden durch die Kurvenpunkte selbst in Beziehung gesetzt mit den Strahlen des Strahlenbüschels S_2, und die Projektion dieses letztgenannten Strahlenbüschels S_2 erscheint wieder auf p als Punktreihe t_2. Nun ist ohne weiteres klar, daß Büschel S und Punktreihe t_1, ebenso Punktreihe t_1 und Büschel S_1, und ebenso Büschel S_2 und Punktreihe t_2 projektivisch verwandt sind in perspektivischer Lage. Die Büschel S_1 und S_2 aber sind projektivisch verwandt in schiefer Lage, da die Punkte jeder Kurve zweiter Ordnung aus zwei beliebigen ihrer Punkte als Scheiteln durch projektivische Büschel projiziert werden.

5) Man hat also in der Tat die Beziehung:

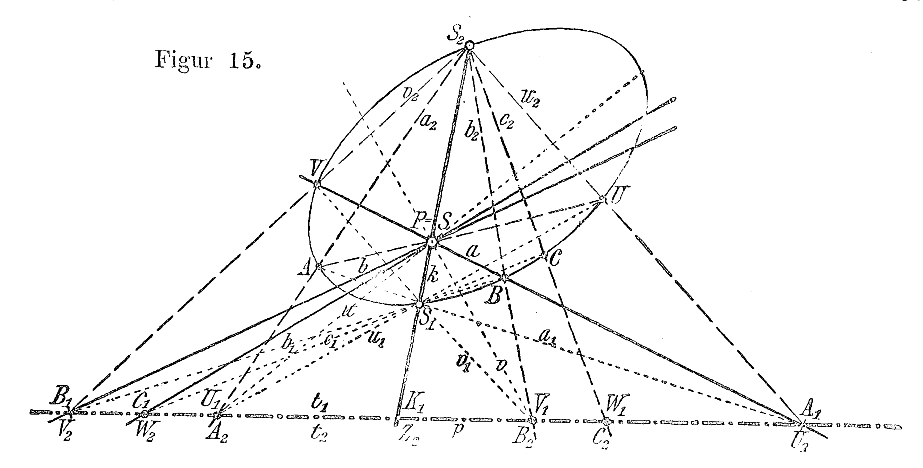
$$S \overline{\barwedge} t_1 \overline{\barwedge} S_1 \barwedge S_2 \overline{\barwedge} t_2$$

oder umgekehrt:

$$t_2 \overline{\barwedge} S_2 \barwedge S_1 \overline{\barwedge} t_1 \overline{\barwedge} S.$$

Und dies ist nichts anderes, als die formelle Schreibweise für Satz 8a.

Figur 15.



stehen dieser letzten Beziehung denken, um auch hier eine Verknüpfung durch Verwandtschaften in perspektivischer Lage einsetzen zu können. Denn die Kurve ist ja aufgefaßt als Erzeugnis der projektivisch verwandten Strahlenbüschel $S_1 S_2$ in

schiefer Lage. Die Vermittlung geschieht aber durch Zwischengebilde nach der Zeichenvorschrift $S_1 \overline{\overline{\wedge}}\, t'_1 \overline{\overline{\wedge}}\, S'_0 \overline{\overline{\wedge}}\, t'_2 \overline{\overline{\wedge}}\, S_2$, wobei mit den Strichen diese Gebilde unterschieden sein sollen von den in Figur 14 und 15 bereits vorhandenen. Setzt man also diese neue Reihe noch in die entsprechende Lücke der früheren ein, so erhält man auch im engsten Sinne eine Reihe fortlaufender Projektionen in perspektivischer Lage, als deren Anfangsglieder die Elemente des Büschels mit Scheitel P, und als deren Schlußglieder die ihnen polar zugeordneten Elemente der Punktreihe auf p auftreten, nämlich $S \overline{\overline{\wedge}}\, t_1 \overline{\overline{\wedge}}\, S_1 \overline{\overline{\wedge}}\, t'_1 \overline{\overline{\wedge}}\, S'_0 \overline{\overline{\wedge}}\, t'_2 \overline{\overline{\wedge}}\, S_2 \overline{\overline{\wedge}}\, t_2$.

Erkl. 76. Ebenso wie in Erkl. 63 bis 65 an Figur 12 und 13 die Durchlaufung der Elemente in P und auf p durchgeführt wurde, so sind auch die Unterschiede in Figur 14 und 15 zu erkennen: Punkt P erscheint als Scheitel des Strahlenbüschels der a, b, c, . . . sowie der u, v, w, . . . und Gerade p als Träger der Punktreihen t_1 und t_2. Dem Durchlauf der Punktreihe t_1 in Figur 14 in der Reihenfolge $A_1 B_1 K_1 C_1 X_{12} W_1 Z_1 V_1 \infty U_1 Y_{12} A_1$ entspricht die Durchlaufung von t_2 in der Reihenfolge $A_2 \infty B_2 K_2 C_2 X_{12} W_2 Z_2 V_2 U_2 Y_{12} A_2$. Die beiden Punktfolgen laufen entgegengesetzt und begegnen einander in X_{12} und Y_{12}; dem unendlich fernen Punkte von t_1 entspricht ein Punkt von t_2 zwischen U_2 und V_2, dem unendlich fernen Punkte von t_2 entspricht ein Punkt von t_1 zwischen $A_1 B_1$. Und in Figur 15 hat man für t_1 die Reihenfolge $A_1 \infty Z_1 B_1 C_1 U_1 K_1 V_1 W_1 A_1$; für t_2 entsprechend $A_2 Z_2 B_2 C_2 U_2 \infty K_2 V_2 W_2 A_2$: beide Punktfolgen rücken hinter einander drein, ohne je zusammenzutreffen; dem unendlich fernen Punkt von t_1 entspricht ein Punkt von t_2 zwischen A_2 und Z_2, dem unendlich fernen Punkt von t_2 entspricht ein Punkt von t_1 zwischen U_1 und K_1. — In beiden Figuren 14 und 15 gehört zur Punktreihe t_1 bezw. t_2 der projizierende Büschel der a, b, c, . . . bezw. der u, v, w, . . . so daß man etwa schreiben kann $S_a \overline{\overline{\wedge}}\, t_1 \overline{\wedge}\, t_2 \overline{\overline{\wedge}}\, S_u$. Man hat also erstens die eigentlich zur Behandlung stehende projektivische Verwandtschaft der $S_a \overline{\wedge}\, t_2$ bezw. der $t_1 \overline{\wedge}\, S_u$, zweitens daneben die Verwandtschaften $t_1 \overline{\wedge}\, t_2$ und $S_a \overline{\wedge}\, S_u$. Letztere bilden projektivisch verwandte Gebilde in vereinigter Lage, d. h. zwei Punktreihen mit gemeinsamem Träger bezw. zwei Strahlenbüschel mit gemeinsamem Scheitel. Solche Gebilde wurden früher schon allgemein behandelt in den Aufgaben 84 bis 108 der Aufgabensammlung des I. Teils. Während aber an jener Stelle die Beziehung eine völlig allgemeine Natur aufwies, ist bei den hier gewonnenen Zuordnungen die Verwandtschaft eine so spezielle, daß zu den dort schon behandelten Eigenschaften solcher Gebilde noch ganz besondere hinzukommen. Daher bildet die einzelne Untersuchung auch den Gegenstand eines besonderen Abschnittes, nämlich des Abschnittes von den involutorischen Beziehungen der Gebilde.

* * *

e) Polarität und Dualität.

Frage 23. Welche weiteren Beziehungen polar zugeordneter Figuren lassen sich zu den Aussagen der Antwort 21 hinzufügen?

Erkl. 77. Wenn die sämtlichen Elemente eines ebenen Systems in irgendwelche gesetzmäßige Zuordnung zu bestimmten anderen Elementen desselben oder eines andern ebenen Systems

Antwort. Wenn die sämtlichen Elemente eines ebenen Systems, nämlich einerseits dessen Punkte, andererseits dessen Gerade — durch Vermittlung einer beliebig gewählten Kurve zweiten Grades als Fundamentalkurve einander polar zugeordnet werden, so

gebracht werden, so sagt man auch, das eine ebene System sei auf das andere „abgebildet“, jedes eine der beiden bilde eine „Abbildung“ des andern. Die durch die Polaritätsbeziehung erzeugte Abbildung unterscheidet sich von vielen andern in der Geometrie zur Anwendung gelangenden Abbildungsmethoden dadurch, daß nicht Punkte und Punkte, Gerade und Gerade einander entsprechen, sondern daß den Punkten des einen Systems die Geraden des andern entsprechen und umgekehrt. — Um bei einer Abbildung eines ebenen Systems auf dasselbe ebene System der Anschauung entgegenzukommen, denkt man sich wohl die Ebene als Doppelblatt, d. h. aus zwei getrennten aufeinandergelegten Blättern für die einander zugeordneten Elemente bestehend. Und für die Polaritätsbeziehung bildet nun die Peripherie der Fundamentalkurve selber die einzige Stelle, wo die beiden Blätter einander berühren oder in einander übergehen, denn dort allein liegt der Punkt auf seiner eigenen Polaren, bezw. geht die Polare durch ihren eigenen Polpunkt.

Erkl. 78. Die Ausführungen des ersten Teiles der nebenstehenden Antwort unterscheiden sich wesentlich von den scheinbar ähnlichen der Antwort 20, indem dort nur gesprochen wird von inneren und äußeren Punkten auf der einzelnen Geraden p bezw. von schneidenden und nicht schneidenden Geraden durch den einzelnen Punkt P, während hier nunmehr in allgemeinster Auffassung sämtliche Elemente des ebenen Systems behandelt werden, welchem die gewählte Fundamentalkurve angehört. — Unterscheidet man durch Schreibung mit und ohne Strich die dem einen oder anderen Blatte der Doppelebene angehörenden Elemente und Gebilde, so wird das Erzeugnis zweier projektivisch verwandten Punktreihen in perspektivischer Lage zu schreiben sein nach der Formel $t_1 \overline{\wedge} S_0 \overline{\wedge} t_2$, die polar zugeordneten Gebilde im andern Blatt nach der Formel $S'_1 \overline{\wedge} t'_0 \overline{\wedge} S'_2$. Und dabei wird nicht nur

erhält man noch folgende weiteren Beziehungen:

1) Der Gesamtheit der äußern Punkte der Kurve entspricht die Gesamtheit der die Kurve schneidenden Geraden der Ebene, der Gesamtheit der inneren Punkte entspricht die Gesamtheit der die Kurve nicht schneidenden Geraden der Ebene; der Gesamtheit der auf der Kurvenperipherie liegenden Punkte aber entspricht die Gesamtheit der die Kurve berührenden Geraden: d. h. also der Kurve selbst, aufgefaßt als Punktreihe zweiter Ordnung, entspricht dieselbe Kurve, aufgefaßt als Strahlenbüschel zweiter Klasse, wobei jeder einzelne Kurvenpunkt und seine eigene Tangente polar zugeordnet sind.

2) Einer beliebigen Punktreihe erster Ordnung entspricht ein projektivisch verwandter Strahlenbüschel erster Klasse, so zwar, daß auch rückwärts der Träger der Punktreihe die Polare des Büschelscheitels wird.

4) Dem Erzeugnis zweier projektivisch verwandten Punktreihen in perspektivischer Lage entspricht das Erzeugnis der zwei sowohl mit diesen beiden als auch wieder untereinander projektivisch verwandten Strahlenbüschel in perspektivischer Lage: ersteres Erzeugnis ist ein Strahlenbüschel erster Klasse, letzteres eine mit ihm projektivische Punktreihe erster Ordnung, deren Träger die Polare jenes Scheitels ist.

4) Dem Erzeugnis zweier projektivisch verwandten Punktreihen in schiefer Lage entspricht das Erzeugnis der zwei sowohl mit diesen als auch untereinander projektivisch verwandten Strahlenbüschel in schiefer Lage: also einer Strahlenkurve zweiter Klasse

jede der angeschriebenen projektivischen Verwandtschaften bestehen, sondern auch für $t_1 \overline{\wedge} S'_1$, $t_2 \overline{\wedge} S'_2$, $S_0 \overline{\wedge} t'_0$ — also überhaupt für jedes der zu bildenden 15 Paare von Gebilden, nämlich außer den neun bereits genannten auch für
$t_1 t'_0$, $t_1 S'_2$, $S_0 S'_1$, $S_0 S'_2$, $t_2 S'_1$, $t_2 t'_0$.

Erkl. 79. Daß dem Erzeugnis zweier projektivisch verwandten Punktreihen in schiefer Lage das Erzeugnis zweier projektivisch verwandten Strahlenbüschel in schiefer Lage entsprechen muß, kann nicht nur abstrakt als Folgerung aus dem bisherigen aufgestellt werden, sondern auch am einzelnen Erzeugnis nachgewiesen werden. Denn für zwei Gebilde $t_1 \overline{\wedge} t_2$ lassen sich stets Zwischengebilde auffinden, mittels deren durch eine Aufeinanderfolge von projektivischen Verwandtschaften in perspektivischer Lage die Vermittlung von Element zu Element hergestellt wird, nämlich $t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_0 \overline{\overline{\wedge}} S_2 \overline{\overline{\wedge}} t_2$. Nun entpricht einander polar nicht nur t_1 und S'_1, t_2 und S'_2, sondern auch für jedes der Gebilde S_1, t_0, S_2 besteht das polare Gebilde t'_1, S'_0, t'_2, so daß der obigen Reihe von Gebilden eine neue Reihe gegenübersteht

$$S'_1 \overline{\overline{\wedge}} t'_1 \overline{\overline{\wedge}} S'_0 \overline{\overline{\wedge}} t'_2 \overline{\overline{\wedge}} S'_2.$$

Und diese neue Reihe von Gebilden erzeugt eine Ordnungskurve in gleicher Weise, wie die erste eine Klassenkurve.

Erkl. 80. Wenn eine Figur verschiedene Punkte besitzt, die teils außerhalb teils innerhalb der Fundamentalkurve liegen, und verschiedene Gerade, die die Fundamentalkurve teils treffen, teils nicht treffen, so muß auch die polar zugeordnete Figur Gerade besitzen, welche die Fundamentalkurve treffen und nicht treffen, und Punkte, welche außerhalb und innerhalb der Fundamentalkurve liegen. Und dasselbe gilt nicht nur für polare Abbildungen von gradlinigen Figuren, sondern auch für Kurven beliebiger Art. Bei den Kurven zweiten Grades wird hierdurch die Lage zur Fundamentalkurve bestimmt; über die Gattung der polar zugeordneten Kurve (ob Ellipse, Hyperbel, Parabel) erhält man am besten Aufschluß durch das nächstfolgende Kapitel, in welchem die Mittelpunktseigenschaften im engsten Zusammenhang mit den Beziehungen der Kurve zu ihren unendlich fernen Elementen behandelt werden. Für Kurven höheren Grades ergibt sich aus

entspricht eine Punkt-Kurve zweiter Ordnung, den einzelnen Kurvenpunkten und Kurventangenten der einen die Kurventangenten und Kurvenpunkte der andern, und zwar sowohl im fertigen Kurvengebilde, als in jeder Zwischenstufe der Erzeugungsweise aus den projektivischen Grundgebilden.

5) Irgend welchen projektivischen Eigenschaften der Tangenten und Punkte einer Klassenkurve entsprechen die polaren Eigenschaften der Punkte und Tangenten der zugehörigen Ordnungskurve, wobei die projektivische Verwandtschaft nicht nur besteht zwischen den Gebilden an der Klassenkurve unter sich und wieder zwischen jenen der Ordnungskurve unter sich, sondern auch zwischen den Gebilden an der Klassenkurve einerseits und den polaren Gebilden an der Ordnungskurve andererseits. So stehen auch den auf die Klassenkurve sich stützenden Polaritätsbeziehungen wieder die auf die Ordnungskurve sich stützenden Polaritätsbeziehungen gegenüber.

6) Da jedem beliebigen Punkte der Ebene eine von ihm getrennt laufende Gerade entspricht, und nur den Kurvenpunkten der Fundamentalkurve selber die eigene Tangente, also eine durch ihren eigenen Pol hindurchgehende Polare zugeordnet ist, so entspricht auch jeder beliebigen Klassenkurve der Ebene eine getrennt liegende Ordnungskurve, und die Fundamentalkurve selbst ist die einzige Kurve zweiten Grades der Ebene, welche sich selbst polar zugeordnet ist.

obiger Antwort von selbst die Beziehung, daß die Ordnungszahl der Bildkurve gleich der Klassenzahl der Originalkurve, und umgekehrt die Klassenzahl der Bildkurve gleich der Ordnungszahl der Originalkurve werden muß. Nur bei der Kurve zweiten Grades sind diese beiderlei Zahlen sets gleich groß.

Erkl. 81. Es ist eine sehr nahe liegende Erleichterung der Vorstellung, daß man sich als Fundamentalkurve fast immer eine Ellipse gewählt denkt. Das ist wohl nicht unzulässig und aus dem Grunde auch förderlich, weil aus dieser Auffassungsweise am leichtesten der Anschluß an die gewöhnliche planimetrische Durchführung der Polarität inbezug auf einen Kreis als Fundamentalkurve gefunden wird (vgl. das dieser Encyklopädie angehörige Lehrbuch der Planimetrie, VIII. Teil, Abschnitt 6 a). Jedoch muß dabei stets festgehalten werden, daß die Polarität vollkommen allgemeine Grundlage besitzt inbezug auf jede der drei Gattungen der Kurve zweiten Grades. Dem Studierenden kann daher nur angeraten werden, sich auch manche der Figuren vorzustellen und auch zu zeichnen, in welchen als Fundamentalkurve eine Hyperbel oder Parabel verwendet wird.

Erkl. 82. Beim Studium jeder geometrischen Abbildung einer Originalebene auf eine Bildebene sind besonders zwei Hauptfragen zu untersuchen: nämlich einmal nach dem Vorhandensein selbstentsprechender Elemente, und sodann nach dem Ergebnis der Abbildung der unendlich fernen Elemente beider Ebenen. So findet man in der Planimetrie, daß bei kongruenter Parallel-Verschiebung die unendlich fernen Elemente der Ebene, sowohl Punkte als Gerade, unendlich fern bleiben, und zwar zugleich als einzige selbstentsprechende Elemente; bei der Umklappung (der axialen Symmetrie) sind die Punkte der Achse die selbstentsprechenden Punkte, die Achse selbst zusammen mit der unendlich fernen Geraden die selbstentsprechenden Geraden, während im übrigen die unendlich fernen Punkte wieder ins Unendliche zu liegen kommen, aber auf denselben Punkt, nur in entgegengesetzter Richtung; bei der Drehung um einen Punkt (zentrische Symmetrie im engeren [$\sphericalangle\, 180^0$] und im weiteren Sinne [beliebiger $\sphericalangle\, \alpha$]) ist dieser als Symmetriezentrum der einzige selbstentsprechende Punkt, die unendlich ferne Gerade (und beim engeren Sinne auch die Strahlen durchs Symmetriezentrum) selbstentsprechende Geraden, während unendlich ferne Punkte wieder ins Unendliche zu liegen kommen, aber auf andere Punkte. Bei der projektivischen Abbildung einer Ebene auf eine andere (Antwort 29 des I. Teils dieses Lehrbuches) sind die Punkte der Schnittkante und die Schnittkante selbst die selbstentsprechenden Elemente, während die unendlich fernen Elemente jeder Ebene auf die Gegenachse oder Fluchtgerade der anderen kommen. Läßt man die beiden Ebenen zusammenfallen, so entsteht die Verwandtschaft der sog. Kollinearität, wobei noch der vorherige Projektionsscheitel als selbstentsprechendes Kollineationszentrum zum Scheitel eines Büschels selbstentsprechender Strahlen wird, und die Kante der vorher getrennt liegenden Ebenen als Kollineationsachse zum Träger einer selbstentsprechenden Punktreihe. Vereinfacht sich diese Abbildung zur Verwandtschaft der Ähnlichkeit, so wird der Scheitel (äußerer oder innerer) Ähnlichkeitspunkt, und die unendlich ferne Gerade zur Achse. Für die hier vorliegende Verwandtschaft der Polarität wird die Abbildung der unendlich fernen Elemente zum Gegenstande eines besonderen Abschnittes gemacht; und der Begriff selbstentsprechender Elemente ist im früheren Sinne gar nicht vorhanden, da ja ein Punkt nicht wieder einem Punkte, sondern einer Geraden entspricht. Man kann daher nur die Frage aufstellen nach solchen Elementen, die mit ihren zugeordneten vereinigt liegen. Und durch diese Auffassung erhält die Fundamentalkurve ihre ausgezeichnete Stellung unter allen Figuren und Kurven der Ebene, indem ihre Kurvenpunkte als

Pole ihrer eigenen Kurventangenten, und umgekehrt ihre Tangenten als Polaren ihrer eigenen Berührungspunkte die einzigen Elemente der Ebene sind, welche mit den zugeordneten vereinigt liegen.

Frage 24. Welcher Rückgriff auf frühere Behandlungsweise liegt in den Antworten der letzten Fragen 21 und 23?

Antwort. Die Antworten der Fragen 21 und 23 liefern eine Gegenüberstellung der Elemente Punkt und Gerade, wie sie bereits seit der Einleitung in die projektivische Geometrie zur Anwendung gelangte unter dem Namen der Dualität. An jener Stelle bedurfte es einer besonderen, zunächst willkürlich erscheinenden Festsetzung, daß Punkt und Gerade als gleichwertig gegenüberstehende Elemente der Raumlehre aufgefaßt werden sollten. Hier ist diejenige Stufe der Entwicklung erreicht, auf welcher sich jene Festsetzung nicht mehr als künstlich gemachte erkennen läßt, sondern als notwendige Folgerung aus den Ergebnissen der bisherigen Untersuchungen. Und es kann nunmehr wirklich gesagt werden, daß, wenn nicht von vornherein die projektivische Geometrie in doppelter Durchführung für Punkt- und Strahlengebilde aufgebaut worden wäre, — dann an dieser vorliegenden Stelle wieder von vorne angefangen werden müßte, um alle für bloß einseitige Auffassung gegebenen Entwicklungen auch für die polar zugeordneten Figuren durchzuführen.

Erkl. 83. Die nebenstehende Antwort bildet gewissermaßen die Einlösung einer schon in Erkl. 102 des I. Teils dieses Lehrbuchs gegebenen Ankündigung, daß nämlich das Prinzip der Dualität seiner zunächst anhaftenden scheinbaren Willkürlichkeit entkleidet und als integrierender Bestandteil des gesamten Lehrgebäudes erkannt werden solle. Man darf dabei nicht vergessen, daß in der historischen Entwicklung dieser „neueren Geometrie“ derselbe Gedankengang des Rückwärtsschreitens vom Standpunkte des vorliegenden Abschnittes über Polarität zurück zum dualistischen Aufbau der Anfangskapitel sich tatsächlich vollzogen hat. Denn zuerst erschienen Monge (1795) als Schöpfer und Poncelet (1818) als Vollender der Polarenbeziehung, und erst auf Grund dieser Theorie wurde dann von Gergonne (1826) die eigentliche Dualität als allgemeines Prinzip aufgestellt. Der lange Streit zwischen den beiden letztern französischen Mathematikern über den Vorzug jener Theorie oder dieses Prinzips wurde dann durch Steiner zu gunsten des letzteren unzweideutig entschieden, indem er schreibt (1832): „Das Dualitätsprinzip tritt als das primitivere, der Quelle näherliegende, mit den Grundgebilden zugleich hervor, die Polarentheorie hingegen kommt erst später als Resultat bestimmter Verbindungen der Grundgebilde zum Vorschein.“

Frage 25. Welche Unterscheidungen müssen festgehalten werden zwischen dem allgemeinen Dualitätsprinzip und der polaren Verwandtschaft?

Antwort. 1) Die an der vorliegenden Stelle neu gefundene polare Verwandtschaft oder Polarreziprozität bildet in ver-

Erkl. 84. Im Abschnitt 5 über die Dualität im I. Teil dieses Lehrbuches ist auch der Dualität im Raum [Reziprozität] zwischen Punkt und Ebene gedacht. Dieselbe erhält ganz anologe Begründung wie die Dualität in der Ebene durch die räumliche Polarenbeziehung inbezug auf die Kugel bezw. die Flächen zweiten Grades. Durch die mit den Sätzen 1—8 dieses Abschnittes fast gleichlautenden Aussagen über räumliche Beziehungen wird jedem Punkte eine Ebene und jeder Ebene ein Punkt zunächst inbezug auf die gewählte Fundamentalfläche zugeordnet. Und indem auch hier wieder der Schritt von Poncelet zu Gergonne wiederholt wird, erhält man den dualistischen Aufbau der räumlichen Betrachtungen von Anfang an unter Gegenüberstellung der Elemente Punkt und Ebene, wie solches in Erkl. 168 des I. Teile angedeutet ist. — Selbstverständlich gelten die in nebenstehender Antwort dargelegten Unterscheidungen zwischen dem allgemeinen Dualitätsprinzip und der Polarentheorie für die räumlichen Durchführungen in genau gleicher Weise wie für die ebene Geometrie.

Erkl. 85. Für die ebene (und ganz analog auch für die räumliche) Dualität wurden die Grundlagen nicht nur in der reinen projektivischen, sondern auch in der analytisch-geometrischen Formulierung aufgestellt, letzteres wohl zuerst (und gleichzeitig mit Steiners geometrischen Entwicklungen) durch Ludwig Immanuel Magnus. Die Überführung der Koordinaten $x_1\ x_2\ x_3$ eines Punktes zu den Koordinaten $u_1\ u_2\ u_3$ der dualistisch zugeordneten Geraden geschieht dabei durch Gleichungen von der Form

$$\varrho u_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3$$

bezw. rückwärts

$$\sigma x_i = A_{1i} u_1 + A_{2i} u_2 + A_{3i} u_3.$$

Und solange diese Gleichungen ihre acht unabhängigen Koeffizienten behalten, entstehen zweierlei ausgezeichnete Kegelschnitte: der eine mit der Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ als Ort der Punkte, welche auf der ihnen entschiedener Hinsicht nur einen speziellen Fall derjenigen Dualität, welche ursprünglich als Grundsatz für die Gegenüberstellung je zweier nebeneinanderstehenden Durchführungen in der projektivischen Geometrie gewählt wurde. Dort war nämlich einem ersten bestimmt gewählten Punkte eine ganz beliebige Gerade gegenüberzustellen und umgekehrt, ebenso einem bestimmten zweiten Elemente eine ganz beliebige zweite usw., ganz allgemein einer Figur aus unbestimmt vielen Punkten eine Figur aus ebensovielen beliebig auszuwählenden Geraden mit der einzigen Einschränkung, daß wenn von jenen beliebig auszuwählenden Punkten mehrere auf derselben Geraden liegen, dann auch von diesen beliebig auszuwählenden Geraden die entsprechenden durch einen Punkt gehen sollten. Hier aber wird einem bestimmt gewählten Punkte wieder eine einzige bestimmte Gerade zugeordnet und umgekehrt, einem beliebigen zweiten Elemente ein einziges bestimmtes zweites usw., wobei nun allerdings auch ganz von selbst die Bedingung erfüllt wird, daß wenn mehrere Punkte auf einer Geraden liegen, dann die zugeordneten Geraden durch einen Punkt gehen.

2) Wurde früher in einer aus beliebig vielen Punkten und Geraden gebildeten Figur (z. B. einem vollständigen n-Eck) eine Eigenschaft gefunden, welche sich nur auf Anzahl und gegenseitige Lage ihrer Elemente bezog, so fand sich für eine aus ebensoviel beliebigen Geraden und Punkten gebildete Figur (z. B. ein vollständiges n-Seit) das Bestehen der entsprechenden Eigenschaft, obgleich die Elemente der letzteren Figur keineswegs als durch gesetzmäßige Zuordnung zu den anderen

sprechenden Geraden liegen, der andere mit der Gleichung $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$ als Umhüllungskurve *dieser Geraden, welche durch ihre entsprechenden Punkte gehen*. Erst wenn die acht unabhängigen Koeffizienten auf fünf reduziert werden durch Gleichsetzung der $a_{ik} = a_{ki}$, dann fallen die beiden genannten Kurven zu einer *einzigen Kernkurve* zusammen, und die vorher allgemeine dualistische Verwandtschaft wird *spezialisiert* zu einer *Polarrezipozität*, welche jene Doppelkurve als *Fundamentalkegelschnitt* hat. Die völlig ungeregelte allgemeinste Dualität erscheint also begreiflicherweise auch analytisch ohne Formulierung, die erste schärfere Festlegung liefert analytisch (infolge Gleichheit der Doppelverhältnisse) wie geometrisch allgemein *projektivisch verwandte Gebilde*, und erst die zweite Einschränkung erzeugt analytisch wie geometrisch die *polare Verwandtschaft*, bei welcher auch die projektivische Beziehung die Besonderheiten der Figuren 12 bis 15 aufweist.

Erkl. 86. Wenn zwei *beliebige Figuren* dualistisch aufgebaut werden, z. B. ein Fünfeck aus fünf Ecken ABCDE und ein Fünfseit aus fünf beliebigen Strahlen abcde (vgl. Figur 42 und 43 des I. Teiles), so gehen vom Punkte A vier Strahlen nach BCDE, und auf Gerade a entstehen vier Schnittpunkte mit bcde. Während nun aber *drei* jener Verbindungsgeraden AB, AC, AD jedenfalls als projektivisch angesehen werden können zu den *drei* Schnittpunkten ab, ac, a[illegible], so ist im allgemeinen Falle gewiß nicht auch der vierte Schnittpunkt ae in solche Lage gekommen, daß er der Verbindungsgeraden AE auch noch projektivisch entspricht: die beiden Figuren sind nicht *projektivisch verwandt*, sondern nur ganz allgemein *dualistisch* aufgebaut, und es ist keinesfalls möglich, dieselbe direkt oder durch Zwischengebilde in projektivische Lage zu bringen. Noch mehr gilt dies vom Sechseck, Sechsseit oder von Figuren mit noch mehr willkürlichen Elementen.

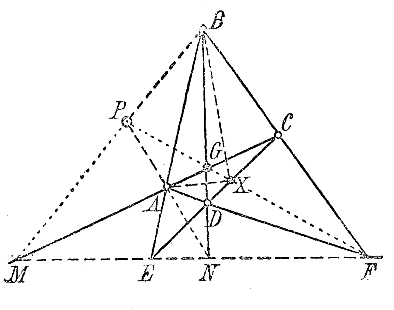
ausgewählte erschienen. Es bildet also das allgemeine Dualitätsprinzip gewissermaßen nur eine *abstrakte Gegenüberstellung* der ungleichartigen Elemente und keine gesetzmäßige Verwandtschaft oder Abbildung aller Elemente der Ebene aufeinander, während die Polarreziprozität eine *konkrete Zuordnung ganz bestimmter Elementepaare* darstellt. Wollte man aber schon durch das allgemeine Dualitätsprinzip eine derartige engere Zuordnung festlegen, so muß man dasselbe seiner Willkürlichkeit entkleiden und die Auswahl der zuzuordnenden Elemente einer gewissen Gesetzmäßigkeit unterwerfen.

3) Solange man nur nach dem allgemeinen Dualitätsprinzip beliebige Punkte und Gerade willkürlich gegenüberstellt, wird auch nicht darauf besondere Rücksicht genommen, daß beide Figuren derselben Ebene angehören, d. h. es werden nicht die Elemente der *einen Figur* zugleich als der *andern Figur* zugehörige Elemente aufgefaßt und umgekehrt. Bei der Polarreziprozität dagegen ist jedes Element doppelt aufzufassen, nämlich als Element der einen Figur und auch wieder als Element der polar zugeordneten Figur. Es wird daher im allgemeinen Falle auch unbeachtet bleiben oder nur als Zufall erscheinen, wenn einmal die einem beliebigen Punkte zugeordnete Gerade durch diesen Punkt selbst hindurchgeht. Bei der Polarreziprozität aber erscheint es als eine ganz fundamentale Beziehung, daß die Punkte bezw. Tangenten der Kernkurve eben die einzigen Elemente der Ebene sind, welche mit ihren *zugeordneten vereinigt* liegen, so zwar, daß diese Kernkurve zugleich nicht nur alle die Punkte enthält, welche auf ihren

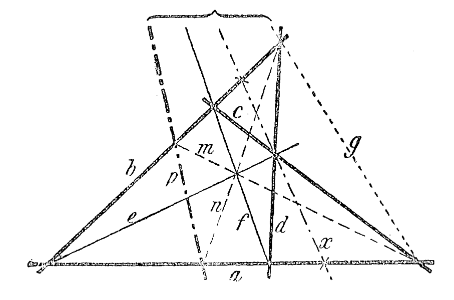
zugeordneten Geraden liegen, sondern auch von allen den Geraden berührt wird, welche durch ihre zugeordneten Punkte hindurchgehen

Erkl. 87. Steht dagegen bloß ein Viereck einem Vierseit gegenüber, wie in Figur 38, 39 des I. Teils oder Figur 1, 2 des II. Teils, so entsprechen *vier harmonischen Elementen des Vierecks* jedenfalls *vier harmonische Elemente des Vierseits*, den vier Verbindungsgeraden AB, AC, AD und etwa AX entsprechen projektivisch die vier Schnittpunkte ab, ac, ad und ax, wenn x und X zwei aus den schon vorhandenen Schnittpunkten und Verbindungsgeraden der Figur analog ausgewählte Elemente sind. Auf solche *aus demselben Viereck bezw. Vierseit aufgebaute Figuren* bezieht sich der Satz 26 des II. Teiles. Die Auswahl jedes Punktes oder jeder Geraden ist auf doppelt unendlich vielfache Weise möglich, also bildet die Zuordnung eines beliebigen Vierseits zum gegebenen Viereck eine Verwandtschaft mit acht willkürlichen Konstanten: es ist eine dualistische Verwandtschaft mit *zwei* ausgezeichneten Kegelschnitten, aber nicht eine Polaritätsverwandtschaft mit *einer* selbstentsprechenden Kernkurve.

Erkl. 88. Kommt zu dem ebengenannten Viereck ABCD ein *beliebiger fünfter Punkt* P (Fig. 16) hinzu, so kann derselbe mit zwei beliebigen der schon vorhandenen Figurenpunkte, z. B. A und B, verbunden werden. Mit je drei anderen Strahlen, z. B. AC, AD, AX und BC, BD, BX derselben beiden Punkte bilden die neuen Strahlen AP und BP je eine *Gruppe von vier Geraden*. Faßt man nun in den den Punkten A und B entsprechenden Geraden a und b der Fig. 17 die entsprechenden Schnittpunkte ac, ad, ax und bc, bd, bx ins Auge und konstruiert zu den drei erstgenannten einen *vierten Schnittpunkt* ap, so daß die Punktgruppe ac, ad, ax, ap *projektivisch* wird zur *Strahlengruppe* AC, AD, AX, AP, und zu den drei letztgenannten einen *vierten Schnittpunkt* bp, so daß die *Punktgruppe* bc, bd, bx, bp *projektivisch* wird zur *Strahlengruppe* BC, BD, BX, BP, — dann ist der neubestimmte Strahl p auch der *projektivisch zugeordnete* zum Punkte P, und das neue Fünfseit abcdp ist *projektivisch verwandt* zum Fünfeck ABCDP. Während aber in der vorigen Erkl. 86 das fünfte Element beider Figuren ganz beliebig ausgewählt war, ist nunmehr die Auswahl des fünften Elementes einer *Gesetzmäßigkeit* unterworfen, sodaß nicht nur eine allgemeine abstrakte, sondern eine zunächst im weiteren Sinne gesetzmäßige Dualität besteht. Allerdings noch keine Polarreziprozität, sondern eine Dualität der allgemeinen, in Erkl. 85 genannten Art, wobei die vereinigt liegenden Elemente beider aufeinander bezogenen Ebenen nicht derselben Kurve angehören.



Figur 16.



Figur 17.

Erkl. 89. An Figur 16 und 17 läßt sich bis ins einzelne die projektivische Beziehung bestätigen. Der Einfachheit wegen ist überhaupt P nicht als völlig willkürlicher Punkt gewählt, sondern als Schnittpunkt der Geraden AN und BM, also für die Zeichnung, nicht aber für die theoretische Auffassung, ähnlich wie der Punkt X in der Erkl. 87. Aber man verfolgt von ganz allgemeinem Gesichtspunkt aus etwa die übereinstimmende Reihenfolge der Elemente beider Figuren:

in Fig. 16 durch Punkt A die Geradenfolge APN, ABE, AGCM, AX, ADF,

in Fig. 16 durch Punkt B die Geradenfolge BPM, BAE, BGDN, BX, BCF,

in Fig. 16 durch Punkt C die Geradenfolge CBF, CP, CGAM, CXDE und etwa CN,

in Fig. 16 durch Punkt D die Geradenfolge DAF, DP, DGBN, DXCE und etwa DM.

in Fig. 17 auf Gerade a die Schnittpunktfolge apn, abe, ∞, agcm, ax, adf,

in Fig. 17 auf Gerade b die Schnittpunktfolge bpm, bae, ∞, bgdn, bx, bcf,

in Fig. 17 auf Gerade c die Schnittpunktfolge cbf, cp, ∞, cgam, cxde nnd cn,

in Fig. 17 auf Gerade d die Schnittpunktfolge daf, dp, ∞, dgbn, dxce und dm.

Ebenso könnte für die andern Elemente die Projektivität durchgeführt werden. Insbesondere zeigt sich auch, daß, weil in Figur 16 der Punkt P auf der Verbindungsgeraden FXG liegt, auch in Figur 17 die Gerade p durch den Schnittpunkt der Strahlen fxg hindurchgehen muß. Die Figuren 16 und 17 sind also tatsächlich nicht in allgemein abstraktem Sinne dualistisch verwandt, sondern projektivisch im engeren konkreten Sinne.

Erkl. 90. Bei entsprechender Erweiterung beider Figuren nach Erkl. 88 entspricht nun jeder Punkt der Ebene — aufgefaßt als Punkt der Figur 16 — einer Geraden der Figur 17 und umgekehrt, und jede Elementengruppe der einen Figur entspricht einer projektivisch verwandten der andern. Daß man dabei aber nicht die spezielle polarreziproke Verwandtschaft hat, zeigt eine einfache Überlegung folgender Art: Dem Punkt A als Punkt der Figur 16 entspricht als Strahl in Figur 17 die Gerade a. In der Zeichnung aber ist zufällig a in Figur 17 die Verlängerung der Geraden MENF der Figur 16. Wird also a als Gerade der Figur 16 aufgefaßt, so entspricht ihr der Schnittpunkt menf der Figur 17, und nicht etwa rückwärts der Punkt A. Betrachtet man weiter dann den Punkt menf in Figur 17 als einen Punkt der Figur 16, so entspricht ihm wieder für Figur 17 irgend eine andere Gerade, die jedenfalls von a verschieden ist. — Bei der Polarreziprozität aber müßte einem Punkt A, aufgefaßt als Element der Figur 16, die Gerade a in Figur 17, und umgekehrt der Geraden a als Element der Figur 16 auch wieder Punkt A als Element der Figur 17 entsprechen. Diese Überlegung verhilft auch dazu, dem Satze seine volle Bedeutung beizulegen. Bei Polarreziprozität zwischen Figur 16 und 17 müßte stets der Wechsel derselben Figurenelemente hin und her gehen, bei der allgemein dualistischen Verwandtschaft wechseln die Elemente stets nach der Art A_{16}, a_{17}, A'_{16}, a'_{17}, A''_{16}, a''_{17} etc. etc. Auch hier gibt es Punkte in Figur 16 bezw. 17, welche auf ihren entsprechenden Geraden der Figur 17 bezw. 16 liegen und Gerade der Figur 16 bezw. 17, welche durch ihre entsprechenden Punkte der Figur 17 bezw. 16 gehen. Aber die Gesamtheit dieser Punkte und Geraden sind nicht Kurvenpunkte und Kurventangenten derselben Kurve zweiten Grades, wie bei der Polarreziprozität.

Erkl. 91. Die Zuordnung der allgemeinen Dualität läßt jedem Element der Ebene ein bestimmtes anderes entsprechen, wenn zwischen den Elementen zweier Vierecke bezw. eines Vierecks und eines Vierseits die Zuordnung

festgelegt ist. Dies zeigt Übereinstimmung mit der projektivischen Zuordnung zweier Ebenen beim Beweis der Eindeutigkeit der harmonischen Beziehung (Figur 5 des II. Teiles). Dort wurden nicht ungleichartige, sondern gleichartige Elemente zugeordnet, und daher brauchen nicht ein Viereck und ein Vierseit, sondern zwei Vierecke und zwei Vierseite einander zugeordnet werden. Geschieht dabei die Auswahl in der Lage, wie Figur 5, so hat man von vornherein die perspektivische Lage der zugeordneten Elemente; hat man allgemeine Lage des Vierecks $A_2 B_2 C_2 D_2$, so zeigt Figur 10 des II. Teils, daß es doch immer möglich ist, auch diese in perspektivische Lage zu bringen. Wenn es aber möglich ist, zwei beliebig gewählte Vierecke $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ durch passende Verlegung im Raum in perspektivische Lage zu bringen, so sind ihre Elemente sicher schon vorher projektivisch verwandt gewesen; und wenn diese projektivische Verwandtschaft durch Wahl von vier Paaren zugeordneter Elemente bei Zuordnung gleichartiger Elemente festgelegt wurde, so muß dieselbe Anzahl auch bei Zuordnung ungleichartiger Elemente bestehen bleiben.

Erkl. 92. Gegenüber der eben betrachteten dualistischen Verwandtschaft allgemeiner Art (welche 8 willkürliche Konstanten zuläßt) bildet nun die Polarreziprozität den besonderen Fall, welcher nur noch fünf willkürliche Bestimmungsstücke zuläßt, nämlich ebensoviele, als zur Bestimmung der Fundamentalkurve erforderlich sind. Dieselbe kann bestimmt sein durch 5 Punkte oder Geraden der Art, daß sie mit ihren entsprechenden Elementen vereinigt liegen sollen, oder durch 4 Punkte (Gerade) der ebengenannten Art nebst zugeordnetem Berührungselement zu einem, oder durch 3 Punkte (Gerade) der genannten Art nebst den in vereinigter Lage befindlichen zugeordneten Berührungselementen zu zweien.

* * *

f) Das Polardreieck.

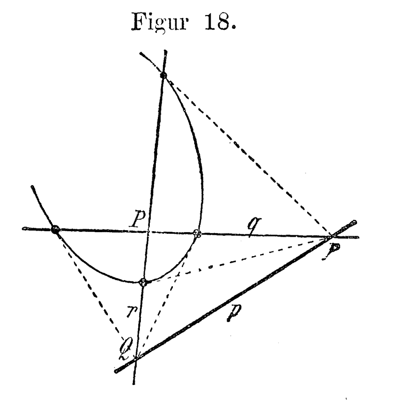
Frage 26. Was versteht man unter einem Polardreieck und wie entsteht ein solches?

Antwort. Unter einem Polardreieck versteht man ein solches Dreieck bezw. Dreiseit, in welchem jeder Eckpunkt der Pol der gegenüberliegenden Seite, also jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke ist — bezogen auf eine beliebig gegebene Fundamentalkurve. Ein Polardreieck entsteht am einfachsten dadurch, daß man — entweder zu zwei beliebig gewählten Punkten die Polargeraden konstruiert denkt und den Schnittpunkt dieser beiden Geraden als dritten Eckpunkt wählt, — oder daß man zu zwei beliebig gewählten Geraden die Polpunkte konstruiert denkt und die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte als dritte Seite wählt.

Erkl. 93. Daß die nebenstehende Definition des Polardreiecks nicht etwa zu weit gefaßt ist, geht aus den Sätzen 1 und 7 hervor. Ist nämlich Q der erste Eckpunkt, q seine Polare, R der zweite Eckpunkt und r dessen Polare, so muß von selbst Punkt (qr) oder P der Polpunkt von QR oder p sein. Denn da die Seite $p = QR$ durch Q geht, muß ihr Pol auf q liegen, und da p durch R geht, muß ihr Pol auf r liegen, also ist der Schnittpunkt (qr) der Pol von QR. Ist umgekehrt die erste Seite q, ihr Pol Q, die zweite Seite r, ihr Pol R, so muß auf Grund gleichlautender Überlegungen die Gerade $QR = p$ die Polare von $P = (qr)$ sein.

Frage 27. Was muß über die Lage der Elemente eines Polardreiecks zur Fundamentalkurve gelten?

Figur 18.



Antwort. 1) Wählt man eine erste Ecke des Polardreiecks innerhalb der Kurve (P in Fig. 18), so läuft deren Polare p jedenfalls ganz außerhalb der Kurve, also liegen die beiden andern Ecken Q und R des Dreiecks sicher außerhalb der Kurve, da sie ja auf p liegen müssen. — Wählt man entsprechend eine erste Seite außerhalb der Kurve (p in Fig. 18), so liegt ihr Polpunkt P sicher innerhalb der Kurve, also müssen die beiden andern Seiten q und r des Dreiecks jedenfalls die Kurve schneiden, da sie ja durch P gehen müssen.

2) Es fragt sich also nur noch, ob diese Lage schon die allgemeinste ist. Wählt man als erste Ecke einen äußeren Punkt (Q in Fig. 18), so muß dessen Polare q die Kurve schneiden, und auf ihr müssen die beiden andern Eckpunkte nach Satz 2aγ so liegen, daß sie durch die Kurvenschnittpunkte harmonisch getrennt werden. Danach muß unbedingt der eine innerhalb, der andere außerhalb der Sehnenstrecke liegen. — Wählt man entsprechend als erste Seite eine schneidende Gerade (q in Fig. 18), so muß deren Pol Q außerhalb der Kurve liegen, und durch ihn müssen die beiden andern Seiten nach Satz 2γ so hindurchgehen, daß sie durch die beiden Kurventangenten aus Q harmonisch getrennt werden. Demnach muß die eine Seite die Kurve schneiden, die andere außerhalb laufen.

3) Man kann also allgemein feststellen: Von den drei Eckpunkten eines Polardreiecks liegt stets einer innerhalb, zwei außerhalb der Kurve; von den drei Seiten eines Polardreiecks liegt stets eine ganz außerhalb der Kurve, die zwei andern schneiden die Kurve.

Erkl. 94. Wie schon die Definition des Polardreiecks zeigt, kann jede Überlegung wegen desselben doppelt angestellt werden, einmal für das Dreieck als Gesamtheit seiner drei Ecken und einmal für das Dreiseit als Gesamtheit seiner drei Seiten. Die Ergebnisse nebenstehender Antworten sind daher auch völlig gleichwertig. Denn wenn eine Ecke innerhalb und zwei außerhalb liegen, so müssen von selbst zwei Seiten schneiden und die dritte nicht — und umgekehrt.

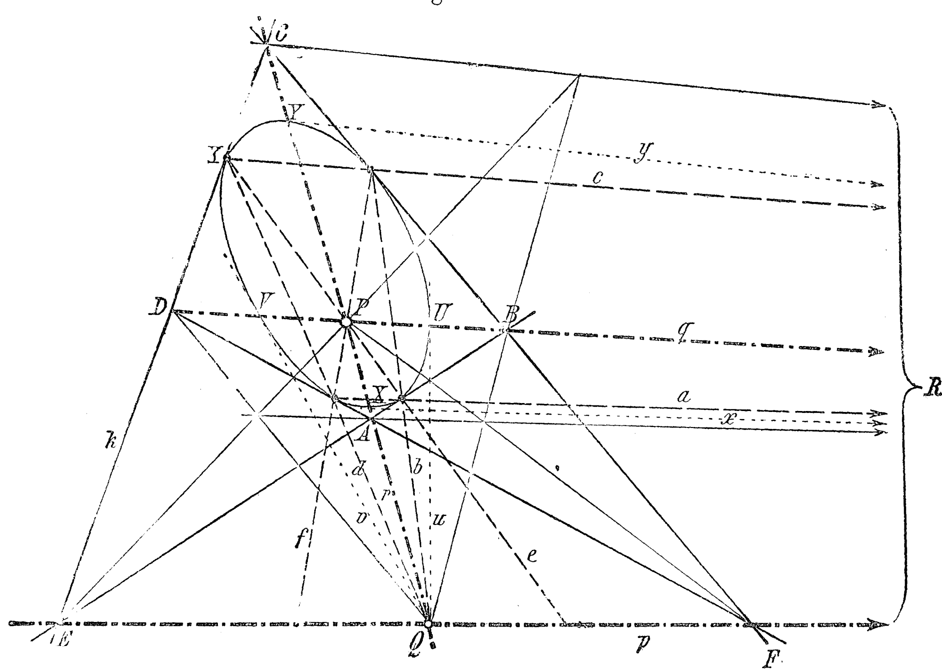
Erkl. 95. Der einfachste Fall ist der einer inneren Ecke bezw. einer nicht schneidenden Seite. Denn dann erhält man für die beiden andern Elemente sofort sichere Auskunft, ohne deren Lage im einzelnen unterscheiden zu müssen. — Geht man aber von einer äußeren Ecke aus, oder von einer schneidenden Seite, so müssen die beiden andern Elemente noch getrennt behandelt werden. Ist der äußere Punkt Q festgesetzt, so muß QP Polare zu R und QR Polare zu P werden: liegt also QR außen, dann P innen, schneidet QP, dann liegt R außen. Die Tangenten von Q aus müssen die Kurve in den Schnittpunkten von q berühren, und mit diesen Tangenten bilden QR und QP vier harmonische Gerade. — Ist umgekehrt die schneidende Gerade q festgesetzt, so

muß (qp) Pol zu r und (qr) Pol zu p werden; liegt (qp) außen, dann schneidet r, liegt (qr) innen, so liegt p außen. Zu jedem (inneren oder äußeren) Punkte auf q schneidet seine Polare den vierten harmonischen Punkt aus mit den beiden Kurvenschnittpunkten auf q.

Frage 28. Auf welche Weise gelangt man auf Grund bisheriger Überlegungen schon an früherer Stelle zum Polardreieck?

Antwort. Bei den ursprünglichen Definitionen von Pol und Polare war aus einem vollständigen umgeschriebenen Vierseit bezw. einem vollständigen eingeschriebenen Viereck je ein einfaches Tangentenviereck bezw. ein einfaches Sehnenviereck herausgehoben worden. So erhielt man (Fig. 19) nach Antwort 4 und 5 in dem vollständigen Vierseit der Tangenten ABE, BCF, CDE, ADF:
durch das einfache Tangentenvierseit ABCDA den Pol P zur Polaren p,
durch das einfache Tangentenvierseit AECFA den Pol Q zur Polaren q,
durch das einfache Tangentenvierseit BFDEB den Pol R zur Polaren r,

Figur 19.



Erkl. 96. Was in den Antworten 4 bis 9 und an den Figuren 3 bis 5 über die Tangentenvierseite und in den Antworten 10 bis 15 und an den zugehörigen Figuren 6 bis 8 über die Sehnenvierecke gesagt ist, findet sich in der einzigen Figur 19 alles vereinigt. Man hat das umgeschriebene Vierseit der Figuren 3 und 4a im Tangentenvierseit ABCD, das angeschriebene Vierseit der Figuren 5b bezw. 5c in den Tangentenvierseiten AECF bezw. BFDE. Ebenso hat man das konvexe eingeschriebene Viereck der Figuren 6 und 7 in dem Sehnenviereck abcd, das überschlagene Viereck der Figur 8 in dem Sehnenviereck aecf

bez. bedf. Durch den Punkt P als **inneren** Polpunkt gehen nach Antwort 5 sechs gerade Linien, nämlich 1, 2: AC und BD als Verbindungsgeraden der Gegenecken; 3, 4: e und f als Verbindungsgeraden der Berührungspunkte; 5, 6: EP und FP als vierte harmonischen Geraden zu p und den Kurventangenten AE, DE durch E bezw. AF, BF durch F. Dagegen gehen durch Q (bezw. R) als **äußeren** Polpunkt nach Antwort 7 acht gerade Linien, nämlich 1, 2: AC und EF (BD und EF) als Verbindungsgeraden der Gegenecken; 3, 4: b und d (a und c) als Verbindungsgeraden der Berührungspunkte; 5, 6: BQ und DQ (AR und CR) als vierte harmonischen Geraden zu q und den Kurventangenten BA, BC durch B bezw. DA, DC durch D (zu r und den Kurventangenten AB, AD durch A bezw. CB, CD durch C); 7, 8: die Kurventangenten u, v in den beiden Kurvenschnittpunkten von q (die Kurventangenten x, y in den Kurvenschnittpunkten von r). Auf Gerade p als **äußerer** Polargeraden liegen nach Antwort 11 sechs Punkte, nämlich I, II: Q, R als Schnittpunkte der Gegenseiten, III, IV: E, F als Schnittpunkte der Tangenten in Gegenecken, V, VI: (ep), (fp) als vierte harmonischen Punkte zu P und den Kurvenpunkten (ab) und (cd) auf e bezw. (ad) und (bc) auf f. Auf der **schneidenden** Polargeraden q (bezw. r) dagegen liegen nach Antwort 13 acht Punkte, nämlich I, II: P, R (P, Q) als Schnittpunkte der Gegenseiten, III, IV: B, D (A, C) als Schnittpunkte der Tangenten in Gegenecken, V, VI: (bq) und (dq) [(ar) und (cr)] als vierte harmonischen Punkte zu Q und den Kurvenpunkten (ab) und (bc) auf b bezw. (ad) und (cd) auf d (zu R und den Kurvenpunkten (ab) und (ad) auf a bezw. (cb), (cd) auf c); VII und VIII: die Berührungspunkte U, V auf den beiden Kurventangenten aus Q (die Berührungspunkte X, Y auf den beiden Kurventangenten aus R).

und ebenso nach Antwort 10 und 11 in dem **vollständigen Viereck** der Berührungspunkte derselben Tangenten:

durch das einfache Sehnenviereck abcd die Polare p zum Polpunkt P,
durch das einfache Sehnenviereck aecf die Polare q zum Polpunkt Q,
durch das einfache Sehnenviereck bedf die Polare r zum Polpunkt R.

Faßt man also in einem beliebigen umgeschriebenen Vierseit bezw. eingeschriebenen Viereck gleichzeitig alle diese einfachen Tangentenvierseite bezw. Sehnenvierecke ins Auge, so erhält man unmittelbar ein Dreieck PQR bezw. ein Dreiseit pqr von der Eigenschaft, daß je zwei gegenüberliegende Elemente (Ecke und Seite) einander **polar zugeordnet** sind, — oder in Worten:

Satz 9. Die drei **Nebenseiten** eines vollständigen **Tangentenvierseits**, bezw. die drei **Nebenecken** eines vollständigen **Sehnenvierecks** einer Kurve zweiten Grades bilden jedesmal ein **Polardreieck**.

Erkl. 97. Man erkennt in Figur 19 leicht, daß alle durch große Buchstaben bezeichneten **Punkte** und die durch dieselben **kleinen** Buchstaben des Alphabets bezeichneten **Geraden** der Figur einander polar zugeordnet sind: Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, Pp, Qq, Rr; Uu, Vv, Xx, Yy, wobei die letzteren vier Paare Elemente sich je in vereinigter Lage befinden, weil Kurvenpunkt und Kurventangente einander polar sind. Die **Seiten** des Tangentenvierseits, welche ohne kleine Buchstaben geblieben sind, hätten dieselben Buchstaben zu erhalten, wie entsprechend die ebenfalls unbezeichneten **Ecken** des Sehnenvierecks. Die Buchstabierung dieser Elemente wäre ohne besonderen Vorteil gewesen, da sonst die in dem vollständigen Viereck bezw. Vierseit enthaltenen einfachen Vierecke bezw. Vierseite nicht durch verschiedene Buchstaben, sondern nur durch verschiedene Reihenfolge **derselben** Buchstaben hätten bezeichnet werden können.

Erkl. 98. Daß die Eigenschaften des Polardreiecks, welche in Antwort 27 ausgesprochen sind, auch an dem aus dem Tangentenvierseit oder Sehnenviereck hervorgehenden Polardreieck Geltung haben, geht aus Figur 19 ebenfalls hervor. Denn das aus vier Kurvenpunkten bezw. aus den Berührungspunkten von vier Tangenten gebildete vollständige Viereck wird immer eine Nebenecke innerhalb der Kurve haben und die beiden andern außerhalb der Kurve.

Frage 29. Welche Beziehungen des Polardreiecks ergeben sich aus den vorigen Antworten?

Erkl. 99. Keinerlei Figur außer einem Polardreieck kann sich selbst polar zugeordnet sein, da jedem Punkt, der außerhalb der Polaren von P liegt, auch wieder eine Polare entspricht, die nicht durch P geht. Als einzige Analogie könnte die Fundamentalkurve selber gelten, da deren Punkten die eigenen Tangenten zugeordnet sind, so daß die Fundamentalkurve, aufgefaßt als Punktkurve, sich selber als Fundamentalkurve polar zugeordnet ist, und umgekehrt.

Erkl. 100. Wählt man erst Punkt P innen, so muß Q außerhalb der Kurve auf p liegen; und sind P und Q fest gewählt, so ist R ebenfalls außerhalb als Schnittpunkt von p und q. Wird aber erst Punkt R außerhalb der Kurve gewählt, so muß der zweite Punkt auf r entweder innerhalb (wie P) oder außerhalb (wie Q) der Kurve liegen. Im ersten Falle ist Q, im andern Falle P ohne Auswahl fest bestimmt als Schnittpunkt von r und p bezw. von r und q. — Wählt man erst Seite p außen, so muß q die Kurve schneidend durch P gehen; und sind p und q fest gewählt, so ist r ebenfalls schneidend als Verbindungsgerade von P und Q. Wird aber erst Seite r als schneidende der Kurve gewählt, so muß die zweite Seite durch R entweder außerhalb (wie p) oder schneidend (wie q) laufen. Im ersten Falle ist q, im andern Fall p ohne Auswahl fest bestimmt als Verbindungsgerade von R und P bezw. von R und Q. — Demnach können zu jedem von ∞^2 ersten Elementen des Polardreiecks noch ∞^1 verschiedene zweite

Antwort. 1) Aus der Definition des Polardreiecks ergibt sich, daß das Polardreieck eine zu sich selbst polare Figur darstellt, Denn wählt man die drei Punkte PQR der Figur 19 als Dreieck, so ist die polare Figur das Dreiseit pqr, also dieselbe Figur; und umgekehrt entsteht zu pqr als Polarfigur wieder PQR.

2) Um ein Polardreieck zu bilden, kann man willkürlich wählen einen ersten Punkt (eine erste Seite) beliebig irgendwo in der Ebene, sodann aber als zweiten Punkt (Seite) nur noch einen beliebigen Punkt (Seite) auf der Polaren (durch den Pol) des ersten; der dritte Punkt (Seite) ist dann schon festgelegt als Schnittpunkt der Polaren (Verbindungsgerade der Pole) des ersten und zweiten. Man hat also erst doppelt unendliche, dann noch einfach unendliche Auswahl, so daß die Gesamtheit der Polardreiecke einer gegebenen Kurve eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit bildet, — eine Kurve besitzt ∞^3 Polardreiecke.

3) Bei der Erzeugung des Polardreiecks durch das Vierseit bezw. Viereck erhält man dasselbe Polardreieck PQR, ob man von den vier Tangenten ausgeht oder von dem Viereck ihrer Berührungspunkte, bezw. ob man von vier Kurvenpunkten ausgeht oder von dem Vierseit ihrer Berührungsgeraden. Denn nach dem Satze von Brianchon bezw. Paskal für das Vierseit bezw. Viereck gehen im ersten Fall die Verbindungsgeraden zu je vieren durch dieselbe Neben-

Elemente hinzugewählt werden, so daß die Kurve ∞^3 verschiedene Polardreiecke besitzen muß.

Erkl. 101. Die Sätze von Brianchon und Paskal gelten nach den Aufgaben 285 und folgenden des vorigen II. Teiles für jedes einfache Vieleck, welches aus denselben gegebenen Elementen gebildet werden kann. So ist in Figur 19 Punkt P der Punkt des Brianchon für das einfache Tangentenvierseit ABCD, Q für das Vierseit CEAF, R für das Vierseit BEDF; und dann ist p die Paskalsche Gerade für das einfache Sehnenviereck abcd, q für das Viereck aecf, r für das Viereck bedf. Man kann daher den Sätzen von Brianchon und Paskal über das Vierseit bezw. Viereck für die nebenstehende Verwendung folgende gemeinsame Ausdrucksweise geben:

> Werden vier beliebige Kurvenpunkte nebst ihren Tangenten (bezw. vier beliebige Tangenten nebst ihren Berührungspunkten) in übereinstimmender Reihenfolge zu einem einfachen Sehnenviereck bezw. Tangentenvierseit zusammengefaßt, so gehen die Verbindungsgeraden der Gegenecken beider Vierecke je durch denselben Punkt, und liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten beider Vierecke je auf derselben Geraden.

Erkl. 102. Eine Klassenkurve ist bestimmt durch fünf Tangenten oder durch vier Tangenten nebst Berührungspunkt auf einer derselben. Sind also vier Tangenten festgelegt, so kann noch irgend eine fünfte Tangente oder irgend ein Berührungspunkt auf einer der vier Tangenten beliebig hinzugewählt werden. Wie diese Wahl aber auch getroffen wird, — das Vierseit der vier ersten Tangenten bleibt dasselbe, und dessen drei Nebenseiten bilden dasselbe Polardreieck für alle diese Kurven. Man wird daher an dieser Stelle erstmals veranlaßt, die Gesamtheit derjenigen Klassenkurven als Ganzes ins Auge zu fassen, welche vier gemeinsame Tangenten besitzen: man nennt diese Gesamtheit eine Kurvenschar, und man sagt, die Kurvenschar ist bestimmt durch jene vier Tangenten, oder die Kurvenschar stützt sich auf jene vier Tangenten.

ecke als den einen Eckpunkt des Polardreiecks, und im zweiten Falle liegen die Schnittpunkte zu je vieren auf derselben Nebenseite als Seite des Polardreiecks.

4) Da das Dreieck der Nebenseiten fürs einfache Tangentenvierseit dasselbe bleibt, wie auch die Lage eines und folglich aller vier Berührungspunkte der dazu gewählten Kurve sich ändert, so bleibt auch das Polardreieck dasselbe für alle die Kurven, welche dieselben vier Tangenten besitzen. Deren gibt es aber soviele, als auf irgend einer der vier Tangenten Punkte vorhanden sind, die als Berührungspunkt ausgewählt werden können. Folglich haben alle diejenigen (∞^1) Kurven zweiter Klasse, welche dieselben vier Tangenten in beliebigen Punkten berühren, das Dreieck ihrer Nebenseiten als gemeinsames Polardreieck.

5) Da das Dreieck der Nebenecken fürs einfache Sehnenviereck dasselbe bleibt, wie auch die Lage einer und folglich aller vier Berührungsgeraden der dazugewählten Kurve sich ändert, so bleibt auch das Polardreieck dasselbe für alle die Kurven, welche durch dieselben vier Punkte hindurchgehen. Deren gibt es aber soviel, als durch irgend einen der vier Punkte Geraden vorhanden sind, die als Tangenten ausgewählt werden können. Folglich haben alle diejenigen (∞^1) Kurven zweiter Ordnung, welche durch dieselben vier Punkte in beliebigen Richtungen hindurchgehen, das Dreieck ihrer Nebenecken als gemeinsames Polardreieck.

Erkl. 103. Eine Ordnungskurve ist bestimmt durch fünf Kurvenpunkte oder durch vier Kurvenpunkte nebst Tangente durch einen derselben. Sind also vier Kurvenpunkte festgelegt, so kann noch irgend ein fünfter Kurvenpunkt oder irgend eine Tangente durch einen der vier Punkte beliebig hinzugewählt werden. Wie diese Wahl aber auch getroffen wird, — das Viereck der vier ersten Kurvenpunkte bleibt dasselbe, und dessen drei Nebenecken bilden dasselbe Polardreieck für alle diese Kurven. Man wird daher an dieser Stelle erstmals veranlaßt, die Gesamtheit derjenigen Ordnungskurven als Ganzes ins Auge zu fassen, welche durch vier gemeinsame Kurvenpunkte hindurchgehen: man nennt diese Gesamtheit einen Kurvenbüschel, und man sagt, der Kurvenbüschel ist bestimmt durch jene vier Kurvenpunkte, oder der Kurvenbüschel stützt sich auf jene vier Kurvenpunkte.

Erkl. 104. Auch in der Planimetrie erscheinen die Begriffe Kreisbüschel und Kreisschar: ersterer als Gesamtheit der Kreise, welche durch zwei feste Punkte gehen, letztere als Gesamtheit der Kreise, welche zwei feste Tangenten haben (s. Planimetrie, VIII. Teil und Figuren 133 und 139 des IV. Teiles). Wie dort für die Kreise desselben Büschels bezw. derselben Schar gewisse gemeinsamen Eigenschaften aufgefunden werden, so gilt hier als erste gemeinsame Eigenschaft der sämtlichen Kegelschnitte eines Büschels bezw. einer Schar, daß dieselben ein gemeinsames Polardreieck besitzen.

Frage 30. In welcher Beziehung steht das Polardreieck zu den Teildreiecken des umgeschriebenen bezw. des eingeschriebenen Vierecks?

Antwort. 1) Bildet man aus beliebigen dreien von den vier Tangenten des umgeschriebenen Vierseits (Figur 20) ein Dreiseit, so muß von demselben je eine der Ecken auf einer der drei Seiten des Polardreiecks liegen, weil letztere gebildet sind von der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte je zweier der vier Tangenten. So liegt z. B. für das Teildreieck AED die Ecke A auf r, E auf p, D auf q. Berücksichtigt man außerdem die Zuordnung entsprechender Seiten beider Dreiecke, so findet sich, daß die Schnittpunkte von AE mit q (= B), von ED mit r (= C), und von DA mit p (= F) auf einer Geraden liegen, nämlich auf derjenigen Seite BCF des Tangentenvierseits, welche zur Bildung des Teildreiecks nicht verwendet wurde. Als Folgerung aus dieser letzgenannten Beziehung ergibt sich aber weiter (vergl. Erkl. 106), daß dann die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt gehen müssen, also die Verbin-

Erkl. 105. Dreiecke von der Art wie AED, welche ihre drei Punkte auf den drei Seiten des Polardreiecks haben oder von der Art aed, welche ihre drei Seiten durch die drei Eckpunkte des Polardreiecks gehend haben, lassen sich auch, abgesehen von den vorliegenden Elementen der Figur 20, in unbegrenzter Anzahl aufstellen, sobald mittels eines beliebig gewählten Tangentenvierseits oder Sehnenvierecks das Polardreieck konstruiert ist. Denn es läßt sich nachweisen (vergl. Aufgabe 40 und Erklärung 383 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teils), daß, wenn zwei Elemente des Dreiecks in vereinigter Lage mit zwei Elementen des Polardreiecks beliebig ausgewählt sind, dann das dritte Element des Dreiecks von selbst mit dem dritten Element des Polardreiecks in vereinigter Lage sein muß. Der Ausdruck „vereinigte Lage" ist eine zusammenfassende und abkürzende Bezeichnung dafür, daß irgend welche Punkte auf gegebenen Geraden

liegen, bezw. daß irgend welche Gerade durch gegebene Punkte gehen.

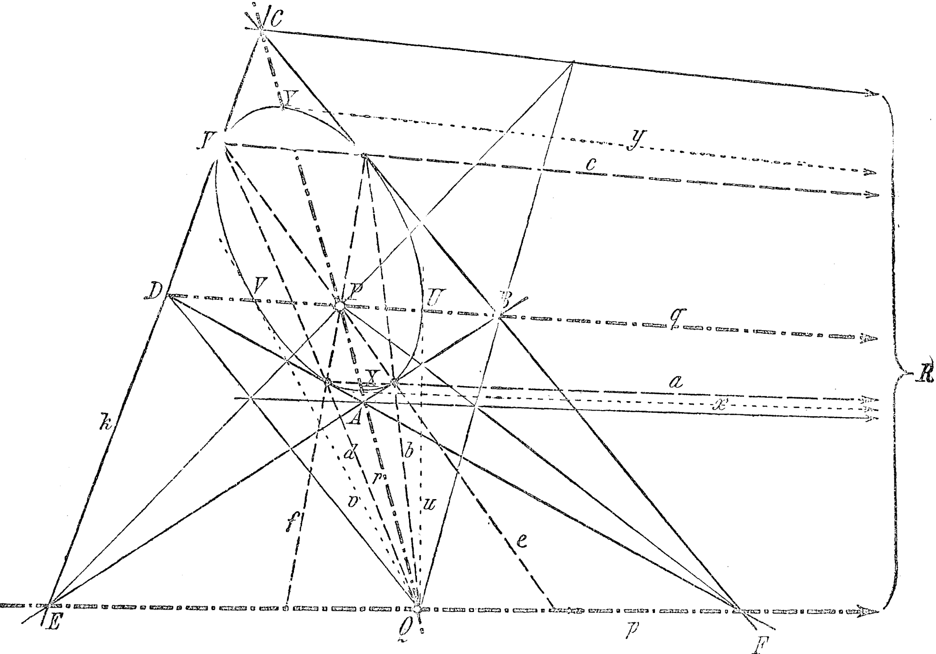
Erkl. 106. Aus Antwort 6 der Frage 29 des I. Teils ergaben sich die auch in Antwort II der Frage 4 des II. Teils angewandten Folgerungen (vergl. Aufgabe 73 des I. Teils):

> Liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier Dreiecke auf einer Geraden, so gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt. — Und umgekehrt: Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte zweier Dreiecke durch einen Punkt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden.

dungsgeraden von A mit R,
E „ P,
D „ Q.

2) Bildet man aus beliebigen dreien von den vier Eckpunkten des eingeschriebenen Vierecks (Fig. 20) ein Dreieck, so muß von demselben je eine der Seiten durch einen der drei Eckpunkte des Polardreiecks gehen, weil letzteres gebildet wird von den Schnittpunkten der Verbindungsgeraden je zweier der vier Kurvenpunkte. So geht z. B. für das Teildreieck aed die Seite
a durch R
e „ P
d „ Q.

Figur 20.



Solche Dreiecke heißen kollineare Dreiecke; wenn also von zwei Dreiecken ausgesagt ist, daß sie kollinear seien, so ist damit gleichzeitig jede der beiden obigen Beziehungen aufgestellt. Und diese Eigenschaft zum Polardreieck besteht nach nebenstehendem Satze 10 sowohl für jedes aus Kurvenpunkten gebildete Dreieck, wenn seine Seiten durch die Ecken eines Polardreiecks

Berücksichtigt man außerdem die Zuordnung entsprechender Eckpunkte beider Dreiecke, so findet sich, daß die Verbindungsgeraden von (ae) mit Q (= b),
von (ed) mit R (= c),
und von (da) mit P (= f) durch einen Punkt gehen, nämlich durch denjenigen Eckpunkt (bcf) des Sehnenvierecks, welcher zur

gehen, als auch für jedes aus Kurventangenten gebildete Dreiseit, wenn seine Ecken auf den Seiten eines Polardreiecks liegen.

Erkl. 107. Die beiden Ableitungen (1 und 2) der nebenstehenden Antwort sind einander völlig dualistisch; es könnte also die zweite unmittelbar aus der ersten gefolgert werden statt selbständiger Aufstellung derselben. Es ist demnach auch jedes Element des erstbehandelten Dreiecks AED polar zugeordnet dem entsprechenden Element des zweiten Dreiecks aed, und dementsprechend die Gerade CBF der ersten Ableitung polar zum Punkt (cbf) der zweiten, nämlich beides als Berührungspunkt und Tangente in vereinigter Lage. Ebenso ist daher auch der gemeinsame Schnittpunkt der drei Geraden AR, EP, DQ der Pol der Verbindungsgerade durch die drei Punkte (ar) (ep) (dq).

Erkl. 108. In der Figur 20 sind aus den vier Tangenten des umgeschriebenen Vierecks vier Teil-Dreiecke zu bilden, nämlich AED, AFB, CEB, CFD, und ebenso aus den vier Eckpunkten des eingeschriebenen Vierecks vier Teildreiecke, nämlich aed, afb, ceb, cfd. Man erhält daher durch vorstehende Antwort zugleich den Beweis, daß die sechs in Figur 20 dünn ausgezogenen Geraden viermal zu je dreien durch einen Punkt gehen müssen, nämlich 1) AR, EP, DQ, 2) AR, FP, BQ, 3) CR, EP, BQ, 4) CR, FP, DQ (letztere in Figur 20 nicht ganz ausgezogen). Dazu kommt aber ferner die weitere Tatsache, daß auch gewisse sechs Schnittpunkte der Figur 20 viermal zu je dreien auf einer Geraden liegen, nämlich auf den Polaren der vorgenannten vier Punkte: Es sind die Schnittpunkte 1) (ar) (ep) (dq), 2) (ar) (fp) (bq), 3) (cr) (ep) (bq), 4) (cr) (fp) (dq). Da die vorgenannten vier Schnittpunkte (der dünnen Linien) alle außerhalb der Kurve lagen, so müssen die letztgenannten vier Verbindungsgeraden alle die Kurve schneiden. Von den durch jene Schnittpunkte gehenden (dünnen) Linien ist aber jeweils nur eine eine Sekante der Kurve, und folglich liegt auch von den drei Punkten der letztgenannten Geraden immer nur ein einzelner außerhalb der Kurve, beide andern innerhalb der Kurve.

Bildung des Teildreiecks nicht verwendet worden war. Als Folgerung aus dieser letztgenannten Beziehung ergibt sich aber weiter (vergl. Erkl. 106), daß dann die Schnittpunkte entsprechender Dreiecksseiten auf einer Geraden liegen müssen, also die Schnittpunkte von

a mit r,
e „ p,
d „ q.

3) Man erhält also die zusammenfassende Aussage:

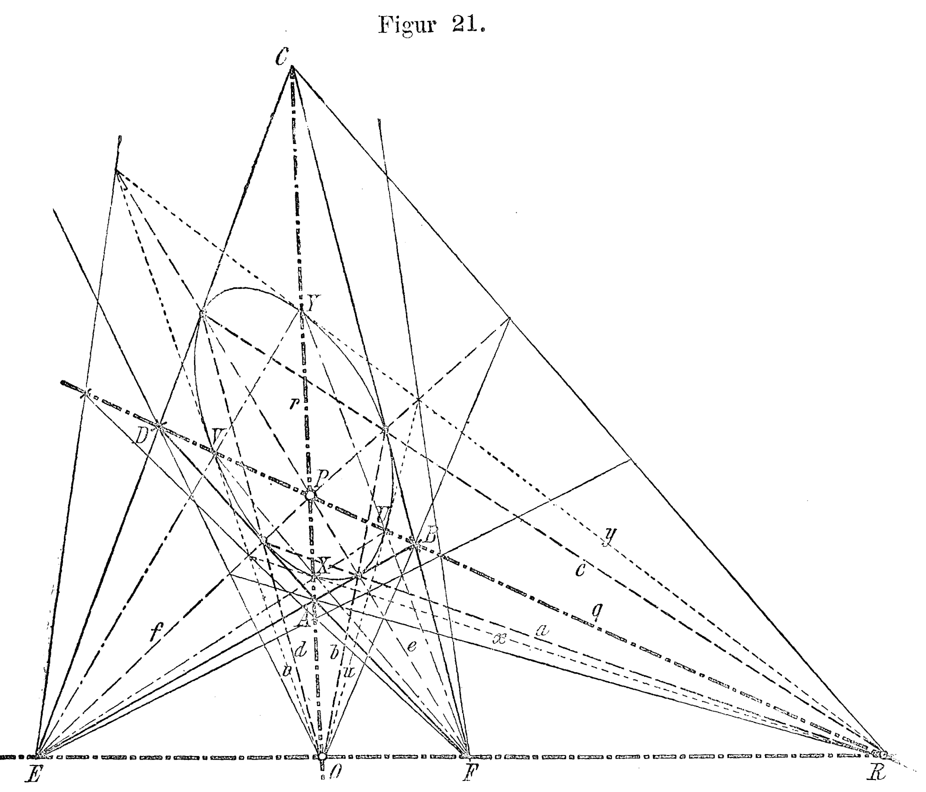
Satz 10. Ein Polardreieck ist stets kollinear mit jedem der Kurve umgeschriebenen oder eingeschriebenen Dreieck, von welchem zwei und folglich alle drei Elemente mit den ungleichartigen zwei bezw. drei Elementen des Polardreiecks sich in vereinigter Lage befinden (d. h. Ecken des umgeschriebenen auf den Seiten, Seiten des eingeschriebenen durch die Ecken des Polardreiecks).

Frage 31. Welche Vereinfachung erfährt die Figur 20 des Polardreiecks, wenn der Punkt F und die Gerade e in vereinigte Lage kommen?

Erkl. 109. Aus nebenstehender Antwort erhellt, daß die Auswahl für Figur 21 um eine Stufe beschränkter ist, als

Antwort. Die Figur 20 entstand durch ein beliebiges umgeschriebenes Vierseit ABCD oder eingeschriebenes Viereck abcd. Es konnte also zu beliebigem Punkte E ein ganz beliebiger Punkt F hinzukommen, bezw. zu beliebiger Sekante e

Figur 21.



die für die vorhergehende Figur 20. Dort ist willkürlich sowohl Punkt E als F bezw. die Sekanten e und f beliebig in der Ebene, so daß die Figur in vierfach unendlicher Weise ausgeführt werden kann. Für Figur 21 dagegen ist willkürlich zwar Punkt E bezw. Sekante e, aber dann ist F bezw. f dadurch beschränkt, daß es vereinigte Lage besitzen muß mit e bezw. E, welche durch E bezw. e als deren Polarelemente bestimmt sind, daher besteht für Figur 21 nur noch dreifach unendliche Auswahl. Eine ebensovielfache, nämlich dreifache Mannigfaltigkeit bildet die Gesamtheit der Polardreiecke. Dasselbe Polardreieck kann nämlich erzeugt werden durch einfach unendlich viele Vierecke bezw. Vierseite von der Art nach Fig. 20, aber nur durch ein einziges Viereck bezw. Vierseit von der besonderen Art der Figur 21.

Erkl. 110. Schon in Figur 20 waren q und r zwei Sekanten durch P, also eine ganz beliebige Sekante f. Nun soll die Figur dahin vereinfacht werden, daß nach beliebiger Wahl von E der Punkt F auf die Berührungssehne e, d. h. auf die Polare e verlegt wird, bezw. daß nach beliebiger Wahl von e die Sekante f durch den Schnittpunkt E der zu e gehörigen Tangenten, d. h. durch den Pol E von e gelegt wird. Beide Vorschriften erzeugen dieselbe Figur 21, denn da F auf e liegt, so muß auch E auf f liegen, bezw. da f durch E geht, muß auch e durch F gehen.

Es fallen daher von den in Figur 20 vorkommenden Schnittpunkten und Verbindungsgeraden einige zusammen, nämlich (ep) mit F, (fp) mit E, — EP mit f, FP mit e u. s. w.

Jetzt ist nicht nur PQR ein Polardreieck, sondern auch PEF, und

mußten schon dort die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden ihrer Kurvenpunkte auf p als der Polaren von P liegen, nämlich der Schnittpunkt von XU und YV und der von XV und YU. Denkt man nun in Figur 21 einen der vier Kurvenpunkte mit einem der Punkte E oder F verbunden, z. B. EV, und bezeichnet den zweiten Kurvenpunkt von EV für den Augenblick mit Y', so ist jedenfalls Y' der vierte harmonische Punkt zu E, V, und dem Schnittpunkte von EV mit der Polaren e zu E. Da aber in Figur 21 PE, PF, PQ, PR vier harmonische Geraden sind (und das waren dieselben Geraden in Figur 20 nicht, da e nicht mit PF zusammenfiel) so wird derselbe vierte harmonische Punkt Y' auf EV auch ausgeschnitten durch den vierten harmonischen Strahl r zu PE, PF und PV. Demnach geht die Kurve und die Gerade r durch denselben Punkt der Geraden EV, d. h. die Gerade EV muß hindurchgehen durch den Schnittpunkt von r mit der Kurve, also durch den Punkt Y, d. h. Y' und Y sind identisch. Daher geht umgekehrt die Gerade VY durch Punkt E; und da VY und XU einander auf p schneiden müssen, so geht auch XU durch E. Nun werden r und q Diagonalen des Vierecks XYUV, also müssen XV und YU beide durch den vierten harmonischen Punkt zu EQR gehen, nämlich durch F.

zwar erzeugt durch das Tangentenvierseit xyuv der Tangenten aus Q und R bezw. durch das Sehnenviereck XYUV der Berührungspunkte dieser Tangenten bezw. der Kurvenpunkte auf den Sekanten q und r. Die ganze Figur ist also die verdoppelte Figur 20, nämlich:

Zwei umgeschriebene Vierseite ABCD und xyuv mit gemeinsamer Nebenseite p und deren Polpunkt P — und:

Zwei eingeschriebene Vierecke abcd und XYUV mit gemeinsamer Nebenecke P und deren Polare p.

Erkl. 111. Da nach voriger Erklärung 110 die Sekante VY durch E geht, so muß der Pol von VY auf der Polaren zu E, also auf e liegen. Dieser Pol zu VY wird aber gebildet durch die Schnittpunkte der Tangenten in V und Y, v und y. Daher müssen nun auch in Figur 21 (was in Figur 20 ebenfalls nicht der Fall war) die Schnittpunkte der Tangentenpaare vy und ebenso ux auf e, die Schnittpunkte der Tangentenpaare vx und uy auf f liegen. Und somit ist bewiesen, daß die Geraden e uuf f zusammen mit p für das eingeschriebene Viereck XYUV bezw. für das umgeschriebene Vierseit xyuv dieselbe Bedeutung haben, wie die Geraden q und r mit p für das eingeschriebene Viereck abcd bezw. das umgeschriebene Vierseit ABCD. Beide eingeschriebenen Vierecke haben die Gerade p als Gerade des Paskal, beide umgeschriebenen Vierseite haben den Punkt P als Punkt des Brianchon — nur jeweils mit vertauschter Bedeutung der Punkte RQ bezw. EF auf p und der Geraden rq bezw. ef durch P.

Erkl. 112. Um die Analogie der Polardreiecke PEF und PQR vollzumachen, wären noch für PEF diejenigen Verbindungsgeraden hinzuzunehmen, welche den dünnen Linien in Figur 21 entsprechen, nämlich die Verbindungsgeraden von E, F nach den Schnittpunkten des Tangentenvierseits xyuv, wie in Figur 20 die Verbindungsgeraden von Q, R nach den Eckpunkten ABCD. Wie dort die Schnittpunkte auf PE und PF liegen müssen, so jetzt auf PQ und PR. Und sonach gehen nun in Figur 21 durch EFQR je acht Gerade, nämlich:

	durch E	durch F	durch Q	durch R
1./2. Die zwei Seiten des Polardreiecks:	p, f	p, e	p, r	p, q
3./4. die beiden Kurventangenten als Seiten des umgeschriebenen Vierseits:	AB, CD	BC, AD	u, v	x, y

5./6.	zwei Sekanten der Kurve als Seiten des eingeschriebenen Vierecks:	XU, VY	XV, UY	b, d	a, c
7./8.	die beiden Verbindungsgeraden nach den Eckpunkten des nicht durch dieselben Ecken gehenden Tangentenvierseits, also nach:	(xu), (vy)	(xv), (uy)	B, D	A, C.

* * *

g) Konjugierte Elemente.

Frage 32. Was versteht man unter konjugierten Elementen?

Erkl. 113. Zu dem Begriff der „konjugierten Elemente“ gehört als selbstverständlich zunächst die Zuordnung zu einer gegebenen Kurve, mit welcher die behandelten Elemente, Punkte bezw. Geraden, in einer Ebene liegen. Die Elemente sind also konjugiert „inbezug auf die gegebene Kurve“. Und zwar gehört zum Begriff des konjugiertseins als Voraussetzung die Zuordnung der Polarität inbezug auf die gegebene Fundamentalkurve. Wenn für eine andere Fundamentalkurve die Polarität aufgestellt wird, so hat auch jeder beliebige Punkt bezw. jede beliebige Gerade wieder verschiedene konjugierte Elemente.

Erkl. 114. Sind P und Q zwei konjugierte Punkte und p, q deren Polaren, so liegt P auf q, Q auf p, bezw. p geht durch Q, q geht durch P; zu P ist nicht nur Q konjugierter Punkt, sondern auch jeder andere Punkt auf p, zu Q ist jeder Punkt auf q ein konjugierter Punkt, darunter also auch P. Ist also Q ein konjugierter Punkt zu P, so ist auch P ein konjugierter Punkt zu Q.

Sind p und q zwei konjugierte Geraden, und P und Q deren Polpunkte, so geht p durch Q, q durch P bezw. P liegt auf q, Q liegt auf p; zu p ist nicht nur q konjugierte Gerade, sondern auch jede andere Gerade durch P, zu q ist jede Gerade durch Q eine konjugierte Gerade, darunter also auch p. Ist also q eine konjugierte Gerade

Antwort. 1) Unter konjugierten Elementen versteht man je zwei solche Elemente, deren eines mit dem Polarelement des anderen sich in vereinigter Lage befindet: Dann muß nach Satz 7 auch das andere Element mit dem konjugierten des ersten sich in vereinigter Lage befinden. Von zwei konjugierten Punkten liegt daher jeder auf der Polargeraden des anderen, von zwei konjugierten Geraden geht jede durch den Polpunkt der anderen.

2) Zu einem beliebig gegebenen Punkte P gibt es also in der Ebene unendlich viele konjugierte Punkte, nämlich jeden Punkt seiner Polaren p; auf einer bestimmten Geraden g aber gibt es zu einem sonstigen beliebig gegebenen Punkte P nur einen einzigen konjugierten Punkt, nämlich den Schnittpunkt (gp) dieser Geraden g mit der Polaren p des ersten. Und unter den sämtlichen Punkten einer gegebenen Geraden g sind bloß je zwei bestimmte einander konjugiert, nämlich je ein Punkt P bezw. Q usw. und der Schnittpunkt der Geraden g je mit der zugehörigen Polaren p, q..., also P und (gp), Q und (gq).. usw.

3) Zu einer beliebig gegebenen Geraden p gibt es in der Ebene unendlich viele konjugierten Geraden, nämlich jede Gerade durch ihren Pol P; durch einen bestimmten Punkt A aber gibt

zu p, so ist auch p eine konjugierte Gerade zu q.

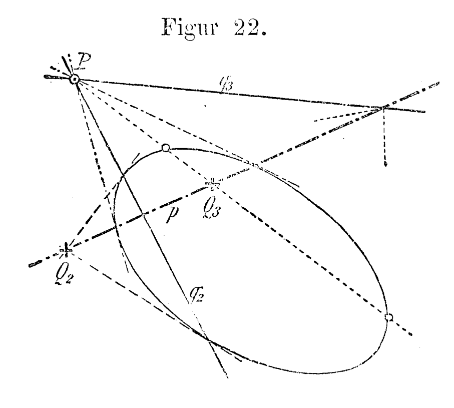
Erkl. 115. Die Zuordnung der konjugierten Elemente in der ganzen Ebene der Kurve ist keine eindeutige Zuordnung, denn zu jedem Elemente gehören unendlich viele andere als konjugierte; auch liegen konjugierte Elemente im allgemeinen getrennt, und die Kurvenelemente selber bilden, wie schon in Antwort 25 erwähnt wurde, die einzigen Ausnahmselemente, welche mit ihren konjugierten vereinigt liegen, also sich selbst konjugiert sind. Nur wenn konjugierte Punkte derselben Geraden oder konjugierte Gerade durch denselben Punkt behandelt werden, wird die Zuordnung zu einer ein — eindeutigen, indem dann jedem Element ein bestimmtes anderes zugeordnet ist, und dazu noch von der besonderen Art, daß wenn zu einem gegebenen ersten ein bestimmtes zweites gehört, dann auch zu diesem zweiten wieder dasselbe erste zugeordnet ist. Ganz besondere Art der Zuordnung aber entsteht, wenn die vorgenannten Kurvenelemente selbst betrachtet werden: Zu einem Kurvenpunkt gehören als konjugierte Punkte sämtliche Punkte seiner Tangente, darunter er selber, und umgekehrt gehören zu einem Punkt dieser Tangente als konjugierte sämtliche Punkte seiner durch den Berührungspunkt gehenden Polaren, darunter wieder der Berührungspunkt selbst; zu einer Tangente gehören als konjugierte Gerade sämtliche Geraden durch ihren Berührungspunkt, darunter sie selber, und umgekehrt gehören zu einer Geraden durch diesen Kurvenpunkt als konjugierte sämtliche Strahlen durch ihren auf der Tangente des Kurvenpunktes liegenden Pol, darunter wieder die Tangente selbst.

es zu einer sonstigen beliebigen Geraden p nur eine einzige konjugierte Gerade, nämlich die Verbindungsgerade AP dieses Punktes A mit dem Pol P der ersteren. Und unter den sämtlichen Strahlen eines gegebenen Punktes A sind bloß je zwei bestimmte einander konjugiert, nämlich je ein Strahl p bezw. q usw. und die Verbindungsgerade des Punktes A je mit dem zugehörigen Polpunkte P, Q,.. also p und AP, q und AQ... usw.

4. Kurvenpunkte und Kurventangenten sind jedes sich selbst konjugiert, da sie mit ihrem eigenen polar zugeordneten Elemente vereinigt liegen.

Frage 33. Welche besondere Lagebeziehungen bestehen zwischen konjugierten Elementen?

Figur 22.



Antwort. 1) Ein Punkt Q_3 innerhalb der Kurve und ein Kurvenpunkt selber haben ihre konjugierten Punkte sämtlich außerhalb der Kurve; ein äußerer Punkt Q_2 dagegen besitzt sowohl innere als äußere konjugierte. — Eine außerhalb der Kurve verlaufende Gerade q_3 und eine Tangente haben nur schneidende Geraden als konjugierte; eine schneidende Grade q_2 dagegen hat sowohl schneidende als nichtschneidende konjugierte.

2) Sind zu einem Punkt P zwei andere Punkte Q_2 und Q_3 als kon-

Erkl. 116. In Figur 22 sind die Punkte P und Q_2 äußere Punkte, folglich gibt es für dieselben sowohl konjugierte Punkte innerhalb der Kurve, nämlich auf der Innenstrecke der zugehörigen Berührungssehne, als auch außerhalb der Kurve, nämlich auf den beiden Außenstrecken derselben zwei Berührungssehnen. Ebenso hat die schneidende Gerade q_2 als konjugierte Geraden sowohl alle die Kurve schneidenden Strahlen im Innenwinkel der Tangenten von Q_2, als auch alle die Kurve nicht schneidenden Strahlen in den Nebenwinkeln dieses Winkels. — Für einen Kurvenpunkt sind konjugiert alle Punkte seiner Tangente, und diese liegen sämtlich außerhalb; außerdem ist der Kurvenpunkt auch noch sich selber konjugiert. Für eine Tangente sind konjugiert alle Strahlen durch ihren Berührungspunkt, und diese schneiden sämtlich die Kurve; außerdem ist die Tangente auch noch sich selbst konjugiert.

Erkl. 117. Man kann den Inhalt des zweiten Teils nebenstehender Antwort folgendermaßen in Worte kleiden:

Satz a: *Die Verbindungsgerade zweier zum gleichen Punkte konjugierten Punkte ist die Polare dieses Punktes.*

Satz b: *Der Schnittpunkt zweier zur gleichen Geraden konjugierten Geraden ist der Pol dieser Geraden.* Dabei brauchen durchaus nicht $Q_2 Q_3$ bezw. $q_2 q_3$ selber konjugierte Elemente zu sein. Ebenso lassen sich für den dritten Teil die Sätze formulieren:

Satz c: *Sind zwei Punkte konjugiert, so sind auch ihre Polaren konjugierte Strahlen.*

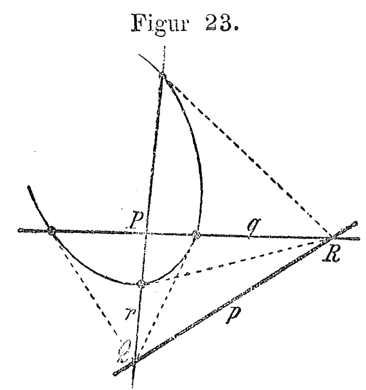
Satz d: *Sind zwei Geraden konjugiert, so sind auch ihre Pole konjugierte Punkte.*

Erkl. 118. Der vierte Abschnitt nebenstehender Antwort gilt für jedes Paar konjugierter Punkte, von welchem *der eine Punkt innerhalb der Kurve* liegt. Denn sowie ein Punkt innerhalb der Kurve liegt, so muß jeder Strahl durch ihn, also auch die Verbindungsgerade der beiden Punkte P, Q die Kurve *schneiden*; und auf dieser Verbindungs-

jugierte Punkte bekannt, so muß die Verbindungsgerade $Q_2 Q_3$ die *Polare zu P sein*, da ja sowohl Q_2 als Q_3 auf der Polaren zu P liegen müssen. — Sind zu einer Geraden p zwei andere Gerade q_2 und q_3 als konjugierte Gerade bekannt, so muß der Schnittpunkt $(q_2 q_3)$ der Pol zu P sein, da ja sowohl q_2 als q_3 durch den Pol von P gehen muß.

3) Sind P und Q zwei konjugierte Punkte, p und q ihre Polaren, so liegt Q auf p, P auf q: also geht p durch Q, q durch P, d. h. jede der zwei Geraden p und q geht durch den Pol der andern. — Sind umgekehrt p und q zwei konjugierte Geraden, P und Q ihre Pole, so geht p durch Q, q durch P: also liegt Q auf p, P auf q, d. h. jeder der zwei Punkte P und Q liegt auf der Polaren des andern. Demnach sind *die polaren Elemente zweier konjugierten Punkte oder Geraden selber wieder konjugierte Elemente.*

Figur 23.



4) Wenn von zwei konjugierten Punkten P, Q der Punkt P innerhalb der Kurve, also der andere Q außerhalb der Kurve liegt, so entsteht der Pol R zur Verbindungsgeraden PQ als Schnittpunkt der Tangenten in den Kurvenpunkten dieser Geraden r. Nun muß die Polare zu P durch Q gehen, weil Q und P konjugiert sind, und sie muß durch

geraden müssen die beiden konjugierten Punkte mit den beiden Kurvenschnittpunkten harmonisch liegen. Der dritte Punkt R, welcher zum Beweis benützt wird, muß als Tangentenschnittpunkt außerhalb der Kurve liegen, und da er auf q liegt, muß er zu Q konjugiert sein. Demnach sind sowohl P und Q, als P und R, als Q und R konjugierte Punkte. Aber die Verbindungsgerade von QR trifft die Kurve nicht. Will man also diese Möglichkeit auch im Wortlaut ausschließen, so würde man folgenden Satz auszusprechen haben:

Satz. Wenn die Verbindungsgerade zweier konjugierter Punkte die Kurve schneidet, so muß stets einer der beiden Punkte innerhalb der Kurve liegen und zwar als vierter harmonischer Punkt zu den Kurvenschnittpunkten der Verbindungsgerade und dem anderen konjugierten Punkte.

Erkl. 119. Dieselbe Überlegung gilt für jedes Paar konjugierter Strahlen, von welchem der eine Strahl die Kurve nicht schneidet. Denn sowie eine Gerade außerhalb der Kurve liegt, so muß jeder Punkt auf ihr, also auch der Schnittpunkt beider Geraden pq, außerhalb der Kurve liegen und zwei Tangenten an dieselbe ergeben; und zu diesen Tangenten müssen die beiden konjugierten Geraden harmonisch liegen. Die dritte Gerade r, welche zum Beweis benutzt wird, muß als Verbindungsgerade mit einem inneren Punkte die Kurve schneiden, und da sie durch Q geht, muß sie zu q konjugiert sein. Demnach sind sowohl p und q, als p und r, als q und r konjugierte Geraden. Aber der Schnittpunkt von q r liegt innerhalb der Kurve. Soll also diese Möglichkeit auch im Wortlaute ausgeschlossen werden, so wäre das Ergebnis folgendermaßen auszusprechen:

Satz. Wenn der Schnittpunkt zweier konjugierten Geraden außerhalb der Kurve liegt, so muß stets eine der beiden Geraden durch die Kurve hindurchgehen und zwar als vierter harmonischer Strahl zu den Kurventangenten aus dem Schnittpunkt und der anderen konjugierten Geraden.

R gehen, weil P auf r liegt, also ist RQ die Polare von P. Auf ihr liegt aber Q, und folglich müssen nach Absatz γ der Sätze 2a, 5a, 6a P und Q notwendig vier harmonische Punkte bilden mit den Kurvenschnittpunkten von PQ.

Wenn von zwei konjugierten Geraden p q die eine Gerade q die Kurve in zwei Punkten, also die andere Grade p die Kurve gar nicht trifft, so entsteht die Polare r zum Schnittpunkt (pq) als Berührungssehne der Kurventangenten aus diesem Schnittpunkte R. Nun muß der Pol von p auf q liegen, weil q und p konjugiert sind, und er muß auf r liegen, weil p durch R geht, also ist (rq) der Pol von p. Durch ihn geht aber q, und folglich müssen nach Absatz γ der Sätze 2, 5, 6 p und q notwendig vier harmonische Strahlen bilden mit den Kurventangenten aus (pq).

Frage 34. Welche allgemeine Lageverwandtschaft konjugierter Elemente ergibt sich aus den Sätzen 8 und 8a?

Antwort.

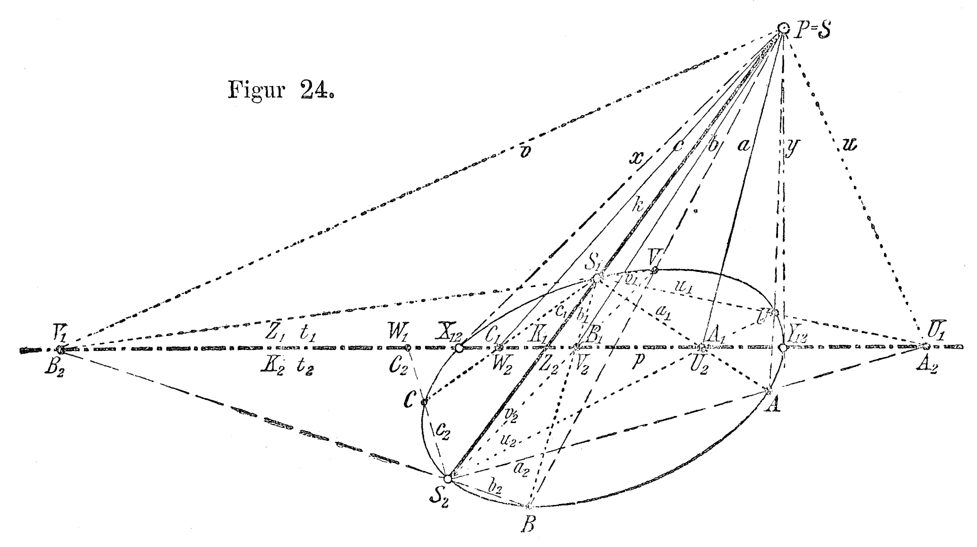
1) Denkt man sich zu jedem Punkte einer Punktreihe t_1 in Fig. 24 oder 25 die Polare konstruiert, so bilden die Polaren, welche nach Satz 7 sämtlich durch den Pol P

1) Denkt man sich zu jedem Strahl eines Strahlenbüschels mit Scheitel S oder P in Figur 24 oder 25 den Pol konstruiert, so bilden diese Polpunkte, welche nach Satz 7

des Trägers t hindurchgehen müssen, einen Büschel S, und nach Satz 8 ist $t_1 \barwedge S$. Bezeichnet man mit t_2 die Punktreihe, welche durch den Büschel S auf demselben Träger der Punktreihe t_1 ausgeschnitten wird, so besteht die Punktreihe t_2 aus eben den Punkten auf t, welche auf den Polaren der Punkte der Reihe t_1 liegen, also aus den konjugierten Punkten der Reihe t_1. Da aber $S \overline{\barwedge} t_2$, so ist auch $t_1 \barwedge t_2$. Also bilden die auf derselben Geraden t liegenden Paare konjugierter Punkte die zugeordneten Punktpaare zweier auf vereinigtem Träger liegenden projektivisch verwandten Punktreihen.

sämtlich auf der Polaren p des Scheitels P liegen müssen, eine Punktreihe t_1; und nach Satz 8 ist $t_1 \barwedge S$. Bezeichnet man mit S′ den Strahlenbüschel, durch welchen die Punktreihe t_1 aus demselben Scheitel P des Büschels S projiziert wird, so besteht dieser Strahlbüschel S′ aus eben den Strahlen durch P, welche durch die Polpunkte der Strahlen des Büschels S hindurchgehen, also aus den konjugierten Strahlen des Büschels S. Da aber $S' \overline{\barwedge} t_1$, so ist auch $S \barwedge S'$. Also bilden die durch denselben Punkt P gehenden Paare konjugierter Strahlen die zugeordneten Strahlenpaare zweier durch vereinigten Scheitel laufenden projektivisch verwandten Strahlenbüschel.

Figur 24.



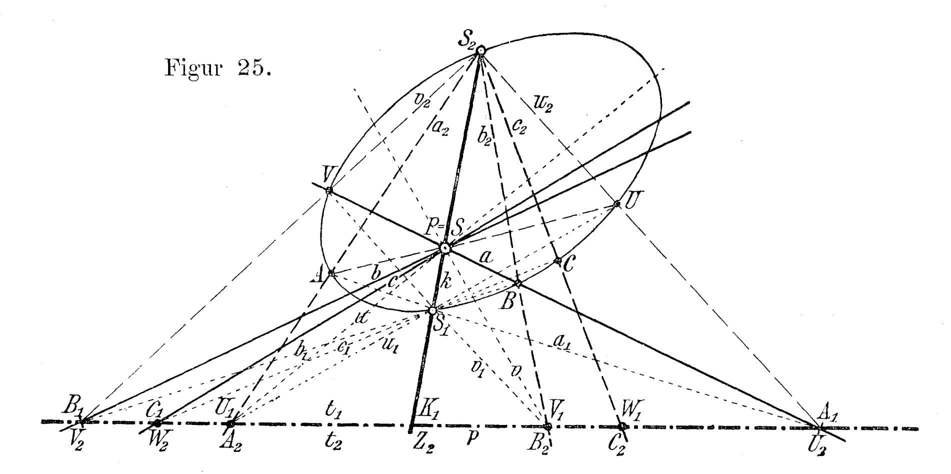
2) Denkt man sich nun den Strahlenbüschel S von einer andern Geraden t_3 geschnitten, so wird durch die Gesamtheit der Strahlen des Büschels S auch auf t_3 eine zu S perspektivisch liegende Punktreihe t_3 ausgeschnitten, deren Punkte also projektivisch zugeordnet sind zu S und zu t_1. Man hat also auf t_1 und t_3 zwei projek-

2) Denkt man sich nun die Punktreihe t_1 aus einem andern Scheitel S_3 projiziert, so wird durch die Gesamtheit der Punkte von t_1 auch in S_3 ein zu t_1 perspektivisch liegender Strahlenbüschel S_3 erzeugt, dessen Strahlen also projektivisch zugeordnet sind zu t_1 und zu S. Man hat also in S und S_3 zwei projektivische Strahlen-

tivische Punktreihen $t_1 \barwedge t_3$, indem man jedem Punkte A, B, C von t_1 denjenigen Punkt von t_3 zuordnet, welcher auf dem Träger t_3 durch die Polare des Punktes A, B, C ausgeschnitten wird, d. h. durch Zuordnung der konjugierten Punkte von t_1 und t_3.

büschel $S \barwedge S_3$, indem man jedem Strahle a, b, c von S denjenigen Strahl von S_3 zuordnet, welcher den Pol der Strahlen a, b, c mit S verbindet, d. h. durch Zuordnung der konjugierten Strahlen von S_1 und S_3.

Figur 25.



3) Solche zwei projektivisch verwandte Punktreihen erzeugen aber durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einen Strahlenbüschel zweiter Klasse, wenn der Schnittpunkt beider Träger nicht etwa sich selbst zugeordnet, d. h. im vorliegenden Falle sich selbst konjugiert ist. Da lezteres nur für Kurvenpunkte zutrifft, so könnte diese Ausnahme an Fig. 24 nur dann eintreten, wenn die Gerade t_3 gerade durch einen der beiden Punkte X oder Y hindurchginge. In Fig. 25 ist das Zerfallen der Kurve zweiten Grades unmöglich, da t_1 gar keine sich selbst konjugierten Punkte besitzt.

4) Man erhält also die Sätze:

Satz 11. Die Verbindungsgeraden der inbezug auf eine gegebene Kurve konjugierten Punkte zweier beliebigen Geraden:

.... gehen durch einen Punkt, wenn der Schnittpunkt der beiden

3) Solche zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel erzeugen aber durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Punktreihe zweiter Ordnung, wenn die Verbindungsgerade beider Büschelscheitel nicht etwa sich selbst zugeordnet, d. h. im vorliegenden Falle sich selbst konjugiert ist. Da letzteres nur für Kurventangenten zutrifft, so könnte eine Ausnahme an Fig. 24 nur dann eintreten, wenn der Scheitel S_3 gerade auf einer der beiden Tangenten x oder y liegen würde. In Fig. 25 ist das Zerfallen der Kurve zweiter Ordnung unmöglich, da S gar keine sich selbst konjugierten Strahlen besitzt.

4) Man erhält also die Sätze:

Satz 11a. Die Schnittpunkte der inbezug auf eine gegebene Kurve konjugierten Strahlen zweier beliebigen Punkte:

.... liegen auf einer Geraden, wenn die Verbindungsgerade der

Geraden auf der gegebenen Kurve liegt, bezw.

.... umhüllen eine Kurve zweiter Klasse, wenn der Schnittpunkt der beiden Geraden nicht ein Kurvenpunkt der gegebenen Kurve ist.

beiden Punkte die gegebene Kurve berührt, bezw.

..... erfüllen eine Kurve zweiter Ordnung, wenn die Verbindungsgerade der beiden Punkte nicht Kurventangente der gegebenen Kurve ist.

Erkl. 120. Die in den früheren Erklärungen 118, 119 formulierten Sätze lassen sich ausnützen als weitere Beweise für die in Satz 8a aufgestellten Behauptungen an der Figur 24, woselbst die Sekante XY die Kurve schneidet, bezw. der Punkt P=S außerhalb der Kurve liegt. Dagegen sind dieselben nicht anwendbar auf die Lage der Elemente in Fig. 25, wo die Verbindungsgerade p die Kurve nicht trifft bezw. Punkt P innerhalb der Kurve liegt. Schon in Erkl. 65 war vorläufig für die zugeordneten Elemente der Name konjugierter Punkte bezw. konjugierter Strahlen angeführt worden. Die Art und Weise dieser Lagebeziehung besteht aber nicht nur für die Lage der Elemente an Fig. 24, sondern auch an Fig. 25, und sie ist so besonderer und wichtiger Art, daß ihrer Untersuchung ein besonderes Kapitel (Abschnitt 3 dieses Bandes) gewidmet wird.

Erkl. 121. Die projektivischen Gebilde in vereinigter Lage, welche im ersten Teile der obenstehenden Antwort aufgeführt sind, erzeugen keine neuen Gebilde. wohl aber jene getrennten projektivischen Gebilde, welche im folgenden auftreten, Bemerkenswert bleiben dabei die gemeinschaftlichen Elemente der beiden projektivisch verwandten Gebilde. Denn wenn diese selbstentsprechend sind, so befinden sich die Gebilde in perspektivischer Lage, und das Erzeugnis ist keine allgemeine Kurve zweiten Grades, sondern zerfällt in Gebilde erster Stufe. Daher muß ausdrücklich die Unterscheidung getroffen werden, welche im Satz 11 zur Zweiteilung des Satzes führt.

Erkl. 122. Es ist nicht schwer, die nach den Sätzen 11 und 11a erzeugten Gebilde durch Festlegung einzelner Elemente näher zu bestimmen. Liegt der Schnittpunkt der beiden Geraden in Satz 11 auf der Kurve, so liefern die beiden Geraden zwei weitere Kurvenschnittpunkte und der Pol ihrer Sehne ist der erzeugte Punkt. Berührt die Verbindungsgerade der beiden Punkte in Satz 11a die Kurve, so liefern die beiden Scheitel zwei weitere Kurventangenten, und die Polare ihres Schnittpunktes ist die erzeugte Gerade.

Erkl. 123. Ebenso können einzelne Elemente der nach Satz 11 erzeugten Kurven festgelegt werden. Denn die Träger der beiden Punktreihen sind jedenfalls Tangenten der Kurve, und die Berührungspunkte auf ihnen werden ausgeschnitten als Schnittpunkte der beiden Geraden mit der Polare des Trägerschnittpunktes, welche selbst stets Berührungssehne der erzeugten Kurve ist. Auf gleiche Weise ergeben sich als Elemente der nach Satz 11a erzeugten Kurve zunächst die Scheitelpunkte der beiden Strahlenbüschel als Kurvenpunkte, und die Tangenten in ihnen entstehen als Verbindungsgeraden der Büschelscheitel nach dem Pol des Verbindungsstrahls beider Scheitel, welcher selbst stets Tangentenschnittpunkt der erzeugten Kurve ist, also stets außerhalb der Kurve liegt.

---

2. Ueber die Mittelpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades.

a) Der Kurvenmittelpunkt.

Frage 35. Wie gelangt man in der projektivischen Geometrie zu den Maßbeziehungen der Kurven?

Erkl. 124. Auch die strengste Durchführung der projektivischen Geometrie wird nicht verzichten können auf das Hereinbeziehen der unendlich fernen Elemente der Ebene, also des Parallelenziehens usw. So wie man aber die Eigenschaften der harmonischen Beziehung und der Polarität auf unendlich ferne Punkte und Geraden anwendet, so erhält man ganz von selbst die Mittelpunktseigenschaften der Strecke und der Kurve.

Antwort. Obgleich die projektivische Geometrie an sich vollkommen absieht von der Untersuchung solcher Eigenschaften, welche Maßbeziehungen enthalten, so drängt sich manchmal derartiges dennoch der Betrachtung auf. Und zwar bieten sich die Mittelpunktseigenschaften ungezwungen dar als einfache Anwendung der Polaritätsbeziehungen auf die unendlich fernen Elemente der Kurvenebene.

Frage 36. Welche Besonderheiten zeigt der Polpunkt einer gegebenen Geraden, wenn diese Gerade zur unendlich fernen Geraden der Ebene wird?

Erkl. 125. Die Eigenschaften des Polpunktes zur unendlich fernen Geraden entspringen aus den zweierlei Quellen, deren erste von den Beziehungen des Poles zu gegebener Gerade, deren zweite von den Beziehungen der Polaren zu gegebenem Punkte geliefert wird: die ersteren ergeben sich aus Satz 2, wenn p als unendlich ferne Gerade gegeben ist, die letzteren aus Satz 2a, wenn P so gewählt werden soll, daß p zur unendlich fernen Geraden werden muß. Nach dem ersten Teil wird der zu untersuchende Punkt zum Punkt des Brianchon für jedes Tangentenparallelogramm, nämlich zum Diagonalenschnittpunkt, d. h. zum Mittelpunkt jedes umgeschriebenen Parallelogramms. — Die vierte harmonische Gerade zu zwei Parallelen wird dann deren Mittelparallele, wenn die vierte zugeordnete unendlich fern rückt; denn auf jeder Schneidenden müssen vier harmonische Punkte ausgeschnitten werden, und da deren einer unendlich fern liegt, so muß der andere stets in der Mitte liegen.

Antwort. 1) Wenn der Pol gesucht wird zu der unendlich fernen Geraden der Ebene, so rücken die Punkte E und F der Fig. 4 und 5 ins Unendliche, das um- bezw. angeschriebene Vierseit wird ein Tangenten-Parallelogramm, und durch den Polpunkt P gehen nach Satz 2:

α) die Diagonalen jedes Tangentenparallelogramms,

β) die Berührungssehne jedes parallelen Tangentenpaares,

γ) die Mittelparallelen jedes Tangentenparallelogramms,

δ) die Kurventangenten durch die etwa vorhandenen unendlich fernen Kurvenpunkte.

2) Wenn umgekehrt durch die Konstruktion der Polaren eines bestimmten Punktes P die unendlich ferne Gerade der Ebene erhalten werden soll, so müssen in der Fig. 7 und 8 alle Punkte I bis VIII ins Unendliche rücken, das eingeschriebene Viereck wird zu einem Sehnenparallelogramm, und nach Satz 2a wird

α) jedes eingeschriebene Viereck,

Erkl. 126. Nach dem zweiten der vorgenannten Gesichtspunkte wird die unendlich ferne Gerade zur Geraden des Paskal für jedes Sehnenparallelogramm, also der zu untersuchende Punkt zu dessen Mittelpunkt. Die Ergebnisse β und δ beider Teile besagen je dieselben Eigenschaften in entgegengesetzter Auffassungsrichtung, γ in beiden Teilen ist selbstverständlich nach den planimetrischen Eigenschaften des Parallelogramms. Aber gerade daß für die Kurven, welche aus rein geometrischer Erzeugung hervorgegangen sind, auch ein solcher Punkt besteht, wie der Mittelpunkt eines Parallelogramms, das ist das bemerkenswerte Ergebnis. Denn ein Punkt, der für alle durch ihn gehenden Sehnen der Kurve Mittelpunkt ist, hat auf jeder seiner Sekanten beiderseits gleichen Abstand nach dem Kurvenpunkt, muß also als Mittelpunkt der Kurve angesprochen werden.

dessen Diagonalen durch P gehen, ein Sehnenparallelogramm,

β) jedes Tangentenpaar wird parallel, dessen Berührungssehne durch P geht.

γ) Auf jeder Sekante durch P wird P zum Mittelpunkt der Kurvenschnittpunkte, da sein vierter harmonischer Punkt auf die unendlich ferne Gerade fällt.

δ) Die durch P etwa möglichen Kurventangenten berühren die Kurve im Unendlichen.

3) Auf Grund der dritten unter den zuletzt genannten Eigenschaften besitzt eine Kurve zweiten Grades einen Punkt, welcher alle durch ihn gehenden Sekanten halbiert, also einen **Kurvenmittelpunkt.** Und diesem Punkte kommt zugleich noch die ganze Reihe anderer Eigenschaften zu, welche in den übrigen Beziehungen ausgedrückt sind.

Frage 37. Welches sind auf Grund der vorigen Überlegungen die Haupteigenschaften des Kurvenmittelpunktes?

Antwort. Man erhält folgende Zusammenstellung für den Kurvenmittelpunkt:

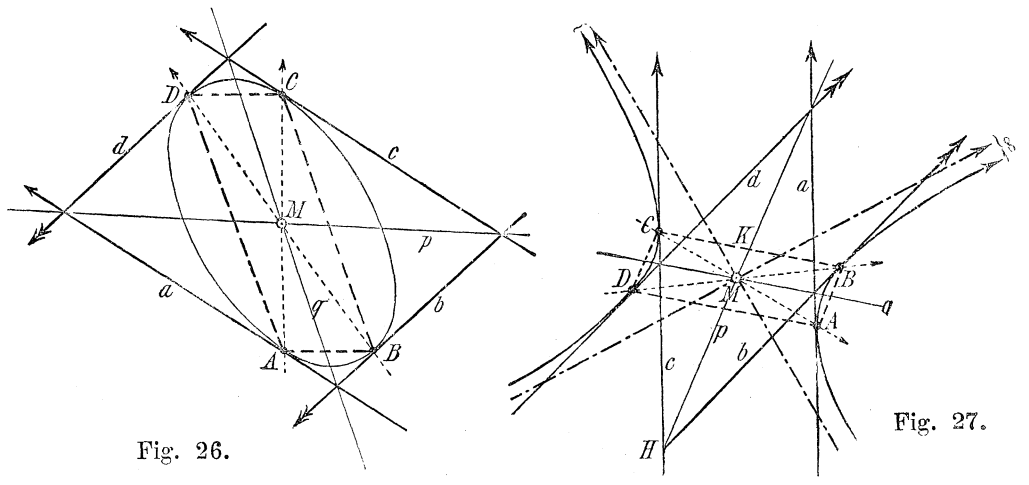


Fig. 26.

Fig. 27.

Erkl. 127. Von der Parabel wurde schon früher bewiesen, daß sie überhaupt keine parallelen Tangenten besitzt, also ist bei ihr auch kein Tangentenparallelogramm möglich. Daher geben Figur 26

Satz 12. Jede Kurve zweiten Grades besitzt einen Mittelpunkt, d. h. einen Punkt, welcher der gemeinsame Mittelpunkt aller seiner Sekanten ist.

und 27 die Verhältnisse für Ellipse und Hyperbel. Dabei sind die Mittelparallelen der Parallelogramme (γ der Antwort 36, 1 und 5, 6 der Figuren 4 und 5) als selbstverständliche Geraden durch M nicht eingezeichnet. Der Fall δ der vorigen Antwort kann nur bei der Hyperbel zutreffend werden; denn nur diese wird von der unendlich fernen Geraden überhaupt geschnitten. Und die Tangenten in ihren unendlich fernen Kurvenpunkten sind als Asymptoten benannt. (Antwort der Frage 39 des 2. Teils.)

Derselbe ist zugleich gemeinsamer Mittelpunkt jedes der Kurve umgeschriebenen oder eingeschriebenen Parallelogramms, sowie aller Berührungssehnen paralleler Tangentenpaare; und er ist der Schnittpunkt der Asymptoten bei der Hyperbel.

Frage 38. Welche Lagebeziehung besitzt der Mittelpunkt bei jeder der drei Kurvengattungen?

Erkl. 128. Daß die Parabel keinen eigentlichen Mittelpunkt haben kann, geht auch daraus hervor, daß bei ihr keine zwei Sehnen einander halbieren können. Denn denkt man sich durch irgend einen Punkt O der Ebene zwei Sekanten einer beliebigen Kurve, welche diesen Punkt O als gemeinsamen Mittelpunkt hätten, so müßte jeweils der vierte harmonische Punkt zu O und den Kurvenschnittpunkten im Unendlichen liegen, also müßte die unendlich ferne Gerade die Polare dieses Punktes sein. Dies trifft zu bei der Ellipse, wo die unendlich ferne Gerade außerhalb der Kurve liegt, und bei der Hyperbel, wo dieselbe die Kurve schneidet, nicht aber bei der Parabel, welche von der unendlich fernen Geraden berührt wird.

Erkl. 129. Die Eigentümlichkeit, daß der Mittelpunkt bei der Hyperbel außerhalb der Kurve liegt, findet außer der Lagebeziehung der unendlich fernen Geraden als Polaren auch fürs Auge darin ihre Erklärung, daß die beiden Hälften jeder Sekante durch den Mittelpunkt nach den beiden getrennten Aesten hingehen. Während es aber bei der Ellipse überhaupt keine Geraden durch den Mittelpunkt gibt, welche die Kurve nicht treffen, weil ja der Mittelpunkt im Innern der Kurve liegt, so ist bei der Hyperbel der Mittelpunkt ein

Antwort. Da der Kurvenmittelpunkt der Pol der unendlich fernen Geraden ist, so muß die Lage desselben bestimmt werden je nach der Lagebeziehung der unendlich fernen Geraden zur Kurve:

1) Für die Ellipse ist die unendlich ferne Gerade eine ganz außerhalb der Kurve verlaufende Gerade; folglich muß deren Pol ein innerer Punkt sein. In der Tat liegt der Ellipsenmittelpunkt im Innern der Ellipse, kann also auch z. B. keine Tangenten an die Kurven aussenden.

2) Für die Parabel ist die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Kurve; folglich muß deren Pol auf der Kurve selber im Berührungspunkt liegen. Dieser Berührungspunkt der Parabel mit der unendlich fernen Tangente ist also der Mittelpunkt der Parabel, d. h. die Parabel besitzt keinen Mittelpunkt im Endlichen, alle nach ihrem Mittelpunkt gehenden Geraden laufen parallel.

3) Für die Hyperbel ist die unendlich ferne Gerade eine Sekante, da die Hyperbel zwei Punkte mit der unendlich fernen Geraden gemeinsam hat; folglich muß deren Polpunkt ein Punkt außerhalb der Kurve sein. Es gehen vom Mittelpunkt der Hyperbel zwei

äußerer Punkt, folglich gibt es durch denselben nicht nur Geraden, welche die Kurve, nämlich die beiden Äste, schneiden, sondern auch Geraden, welche die Kurve überhaupt nicht treffen, und dazu zwei Tangenten an die Kurve, nämlich die Asymptoten.

Tangenten an dieselbe, nämlich die Asymptoten; und die Berührungssehne derselben ist eben die unendlich ferne Gerade, denn für jeden Punkt außerhalb einer Kurve ist die Polare die Berührungssehne seiner Kurventangenten.

Erkl. 130. Wenn man zur Unterstützung der Vorstellung Maßbeziehungen zu Hilfe nehmen will, so kann man sich den Übergang von Ellipse durch Parabel zu Hyperbel in der Weise vorstellen, daß etwa ein Scheitel der Ellipse samt seinem Brennpunkt und der zugehörigen Leitgeraden festgehalten wird, und alle anderen Elemente gegen die Unendlichkeit hin fortgeschoben werden. Bei dieser allerdings nur als Hilfsmittel aufzufassenden, aber keineswegs als strenge Durchführung anzusehenden Entwicklung rücken in stets zunehmende Entfernung hinaus: erstens der entgegengesetzte Scheitel der Kurve, zweitens der jenseitige Brennpunkt samt seiner Leitlinie, drittens der Mittelpunkt. Ist aber der veränderliche Scheitel wirklich bis in die Unendlichkeit hinausgerückt, so hat jener Kurvenastbogen die Gestalt einer unendlich lang gestreckten Ellipse angenommen, er wird von der unendlich fernen Geraden berührt, und die ganze Kurve ist zur Parabel geworden. Dabei sind ins Unendliche gerückt der Scheitel der Kurve als Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden, und in denselben Berührungspunkt sind hineingerückt sowohl der eine Brennpunkt, als auch der Mittelpunkt der Kurve, während die unendlich ferne Gerade zugleich Scheiteltangente und Leitlinie geworden ist. Beim Weiterschreiten von dieser Vorstellung aus kann als Beispiel dienen eine gerade Linie, welche als Kreis mit unendlich großem Radius anzusehen ist, und den Zusammenhang ihrer Enden zur geschlossenen Kurve durch die eine oder andere, die diesseitige oder jenseitige Hälfte der unendlich fernen Geraden ergänzen kann. Ebenso kann der Berührungspunkt samt Scheiteltangente der Parabel in der einen oder anderen Richtung ins Unendliche gedacht werden, und der Übergang zur Hyperbel geschieht, indem man den Wechsel vollzieht von der einen zur anderen Sehrichtung nach derselben unendlich fernen Lage. Dabei findet eine Art Überholung der Punkte statt, indem nunmehr beim Wiederhereinkommen der Elemente aus der Unendlichkeit von der entgegengesetzten Seite her der Mittelpunkt der Leitlinie, dem Scheitelpunkt und dem Brennpunkt vorangeht. Denn der veränderliche Scheitelpunkt überschreitet die unendlich ferne Gerade, der Kurvenbogen schneidet die unendlich ferne Gerade in zwei Punkten beiderseits des vorigen Berührungspunktes, und die Kurventangenten in diesen beiden Punkten, die Asymptoten, treffen einander in einem dem Scheitelpunkte voraneilenden Punkte, dem Mittelpunkte — einerlei ob man diese Tangenten in der einen oder anderen Richtung aus ihrem unendlich fernen Berührungspunkte ins Endliche hereingezogen denkt. Der Brennpunkt aber, welcher im Zustande der Überschreitung der unendlich fernen Geraden zugleich mit dem Scheitelpunkt auf die unendlich ferne Tangente und Leitlinie gefallen war, bleibt wieder hinter dem Scheitelpunkt zurück und läßt daher auch seine Leitgerade wieder vor dem Scheitel vorangehen. So rücken nunmehr aus dem Unendlichen von entgegengesetzter Seite der ursprünglichen Kurvenwölbung herein: erst der Mittelpunkt, dann die Leitlinie, dann der Kurvenscheitel des zweiten Astes und endlich dessen Brennpunkt. Und die beiden Kurvenäste wenden einander gewissermaßen die Rückenwölbungen zu, indem sie zwischen sich den Mittelpunkt haben, der auf jeder durch ihn gelegten Sekante den Abstand der beiden Schnittpunkte mit beiden Aesten halbiert.

* * *

b) Die Kurvendurchmesser.

Frage 39. Welche Besonderheiten zeigt die Polare eines gegebenen Punktes, wenn dieser Punkt auf der unendlich fernen Geraden liegt?

Erkl. 131. Die Aussage 1 α der nebenstehenden Antwort könnte auch so gefaßt werden, daß auf der Polaren liegen: die Schnittpunkte der beiden Geradenpaare, durch welche die Kurvenschnittpunkte irgend zweier nach P laufenden parallelen Sekanten kreuzweise verbunden werden. Von diesen beiden Schnittpunkten liegt natürlich immer der eine innerhalb, der andere außerhalb des Parallelstreifens der parallelen Sekanten. Jedoch ist schon hier zu beachten, daß wenn P außerhalb der Kurve liegt, dann nicht jede Gerade durch P auch eine Sekante der Kurve sein muß. Nur wenn P innerhalb der Kurve liegt, ist jede Gerade durch P sicher eine Sekante. Dies trifft aber bei der Hyperbel nur zu, wenn P auf demjenigen Teil der unendlich fernen Geraden liegt, welcher innerhalb der Hyperbel fällt. Denn die beiden Schnittpunkte der Hyperbel mit der unendlich fernen Geraden erzeugen auf dieser ebenso wie auf einer im Endlichen liegenden Geraden eine innerhalb und eine außerhalb dieser Punkte, also eine innerhalb und eine außerhalb der Kurve liegende Strecke: erstere ermöglicht nur Sekanten an die Kurve, letztere entsendet für die Kurve Sekanten, Tangenten und nicht treffende Geraden.

Erkl. 132. Nach dem ersten Gesichtspunkte der nebenstehenden Antwort wird der Durchmesser zur Paskalschen Geraden für jedes überschlagene eingeschriebene Viereck mit parallelen Diagonalen, zugleich zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte dieser Diagonalen und der Berührungspunkte solcher Tangenten, welche zu denselben Diagonalen parallel sind. — Nach dem zweiten Gesichtspunkte wird der unendlich ferne Schnittpunkt dieser vorgenannten Diagonalen und Pol des Durchmessers zum

Antwort. 1) Wenn die Polare gesucht wird zu einem unendlich fernen Punkte P der Ebene, so werden die Geraden e und f der Figur 7 bezw. 8 parallel miteinander und mit x und y, alle Elemente der Figur außer dem Punkt P aber verbleiben im Unendlichen; das eingeschriebene Viereck wird auf jeden Fall zu einem überschlagenen, und auf der Polaren p liegen nach Satz 2a:

α) Die Schnittpunkte der beiden Paare von Gegenseiten jedes eingeschriebenen überschlagenen Vierecks, dessen Diagonalen parallel nach P gehen,

β) die Schnittpunkte der Tangenten durch die Kurvenpunkte aller nach P laufenden parallelen Sekanten der Kurve,

γ) der Mittelpunkt der beiden Kurvenschnittpunkte auf allen nach P laufenden parallelen Kurvensekanten, da ja der vierte harmonische Punkt P unendlich fern liegt,

δ) die Berührungspunkte auf den beiden nach dem Punkte P etwa gehenden parallelen Tangenten.

2) Wenn umgekehrt durch die Konstruktion des Poles einer bestimmten Geraden p ein unendlich ferner Punkt P erhalten werden soll, so müssen in den Figuren 4 und 5 alle Geraden 1 bis 8 parallel werden, das Tangentenviereck erhält zwei parallele Nebenseiten, und nach Satz 2 ergibt sich:

α) die Verbindungsgeraden der beiden Schnittpunktpaare je zweier Tangentenpaare, welche von Punkten auf p ausgehen, werden parallel nach P;

β) die Berührungssehnen je zweier Tangenten, die einander

Punkte des Brianchon für jedes Tangentenvierseit, welches zwei Gegenecken auf dem Durchmesser hat. — Die Teile γ beider Antworten enthalten insofern die gleiche Eigenschaft, als die Verbindungsgeraden eines Punktes mit zwei Streckenpunkten, deren Mittelpunkt und unendlich fernem Punkte stets vier harmonische sind. Antwort 1γ benennt diese vier harmonischen Punkte, 2γ besagt, daß die vier Verbindungsgeraden nach denselben vier harmonische Geraden sind. — Ebenso besagen die Fälle β und δ beider Antworten die gleiche Eigenschaft des Durchmessers.

auf p schneiden, werden parallel nach P;

γ) die vierten harmonischen Strahlen zu p und je zwei Tangenten, die einander auf p schneiden, werden parallel nach P;

δ) die Kurventangenten durch die beiden auf p etwa vorhandenen Kurvenschnittpunkte werden parallel nach P.

3) Da jeder unendlich ferne Punkt auf der unendlich fernen Geraden liegt, so muß die Polare jedes solchen Punktes durch den Pol der unendlich fernen Geraden gehen, also durch den Kurvenmittelpunkt. Auf Grund dieser Lage zusammen mit der dritten der zuerst aufgezählten Eigenschaften nennt man jede dieser Geraden einen **Durchmesser** der Kurve. Und jedem Kurvendurchmesser kommt zugleich noch die ganze Reihe anderer Eigenschaften zu, welche im vorigen aufgezählt sind.

Erkl. 133. Geht man von dem Vorhandensein des Mittelpunktes aus, so läßt sich umgekehrt schließen, daß jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht, ihren Pol auf der Polaren des Mittelpunktes, also in unendlicher Ferne haben muß. Mit dem Vorhandensein eines Mittelpunktes ist also das Vorhandensein von Durchmessern von selbst gegeben. Auch enthält ja Antwort 36 bereits einige der Eigenschaften des Durchmessers. Jedoch ist es der Vollständigkeit halber wichtig, die Eigenschaften der Kurvendurchmesser durch selbständige Ableitung aufzustellen. Der Mittelpunkt zeigt eine zentrische (diametrale) Symmetrie der Kurve; der Durchmesser zeigt eine gewisse Art von axialer Symmetrie: Eine halbe Umdrehung um den Mittelpunkt um 180° bringt jeden Halbstrahl eines Durchmessers mit seinem Gegenstrahl, also jeden Kurvenpunkt mit seinem zentrisch symmetrischen oder diametral gegenüberliegenden Kurvenpunkte zur Deckung. Die beiden Hälften der durch einen beliebigen Durchmesser halbierten Sekanten (1γ obiger Antwort) lassen sich dagegen nicht durch Drehung oder Umklappung zur Deckung bringen: es ist nicht die gewöhnliche axiale Symmetrie, sondern eine Art von schiefer Symmetrie, so lange die halbierten Sekanten zum halbierenden Durchmesser einen schiefen Winkel bilden.

Frage 40. Welches sind auf Grund der vorigen Überlegungen die Haupteigenschaften der Kurvendurchmesser?

Erkl. 134. Da ein Durchmesser der Kurve die Polare eines unendlich fernen Punktes ist, so muß es ebensoviele Durchmesser geben, als unendlich ferne Punkte. In der Tat ist jede Gerade durch den Kurvenmittelpunkt ein Durchmesser, und es gehen ebensoviele Gerade

Antwort. Man erhält folgende Zusammenfassung für die Kurvendurchmesser:

Satz 13. Legt man durch eine Kurve zweiten Grades eine beliebige Anzahl paralleler Geraden, so liegen auf einer bestimmten Geraden durch den Kurvenmittelpunkt, also einem Durchmesser: die Mittelpunkte

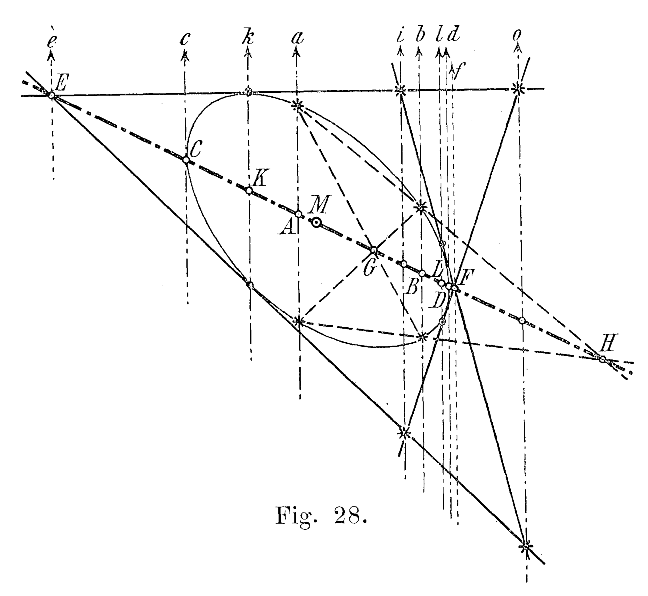


Fig. 28.

durch einen Punkt, als Punkte auf einer Geraden liegen. Dagegen ist der Mittelpunkt selber der Pol der unendlich fernen Geraden, also gibt es nur einen *einzigen Kurvenmittelpunkt*, dagegen *unendlich viele Durchmesser*: der Pol jedes Durchmessers liegt auf der unendlich fernen Geraden, und jeder Durchmesser geht durch den Pol der unendlich fernen Geraden.

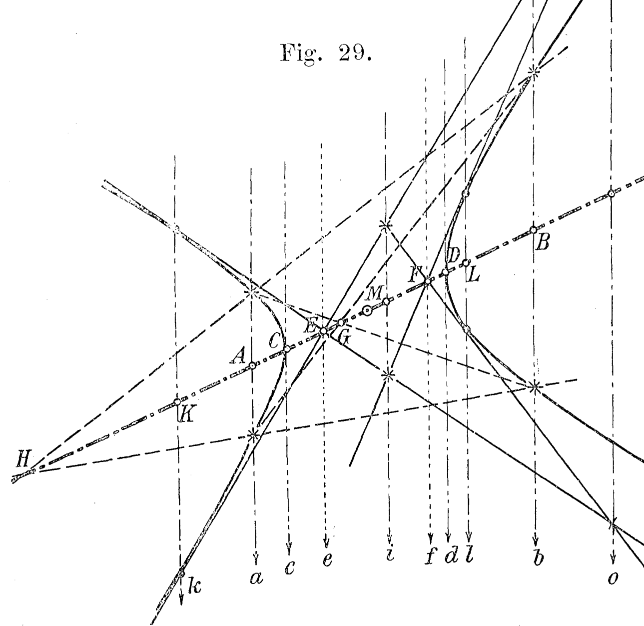


Fig. 29.

der sämtlichen parallelen Sekantenstrecken und die *Berührungspunkte der dazu parallelen Tangenten*, sowie die *Schnittpunkte der Tangenten in den Kurvenpunkten* aller der parallelen Sekanten und die *Schnittpunkte der beiden Geradenpaare*, durch welche die Kurvenpunkte je zweier paralleler Sekanten verbunden werden.

Und in der umgekehrten *Auffassungsweise*:

Satz 14. Legt man durch beliebige äußere Punkte eines *Kurvendurchmessers* die Tangenten an die Kurve, so erhalten *parallele Lage* die *Tangenten in den Kurvenpunkten* des Durchmessers, die *Berührungssehnen* beliebiger *Tangentenpaare*, sowie die beiden *Verbindungsgeraden* der *Schnittpunkte* je zweier *Tangentenpaare*, und der *vierte harmonische Strahl* zum Durchmesser und jedem Tangentenpaare.

Während also Satz 12 nur für einen einzigen Punkt der Kurvenebene gilt, so besitzt der Satz 13 bezw. 14 Giltigkeit für unendlich viele Geraden bei jeder Kurve.

Fig. 30.

Erkl. 135. Nicht weniger als zehn Punkte bezw. Geraden sind es, über welche in den Sätzen 13 und 14 Angaben gemacht werden. Über soviele Elemente also wird Verfügung getroffen, wenn zu einem unendlich fernen Punkte die Polare gesucht bezw. zu einem Durchmesser der Pol gesucht wird. Diese Elemente sind in den Figuren 28 bis 31 an den verschiedenen Kurvengattungen in übereinstimmender Weise gezeichnet und benannt, um die gegenseitige Beziehung herzustellen: Es müssen zunächst, wenn man ausgeht vom Parallelstrahlenbüschel der parallelen Sekanten aus dem gegebenen unendlich fernen Polpunkte, auf Grund des Satzes 13 auf dem Durchmesser liegen

Satz 15. Bei der Parabel sind sämtliche Durchmesser parallel; die Hyperbel besitzt sowohl schneidende als nichtschneidende Durchmesser. (Vgl. Erkl. 138, 139.)

- die Punkte A und B bezw. K und L als Mittelpunkte zweier aus allen Parallelen beliebig ausgewählten Sekantenpaare a und b bezw. k und l,
- die Punkte C und D als Berührungspunkte der im Parallelstrahlenbüschel enthaltenen parallelen Tangenten c und d,
- die Punkte E und F als Schnittpunkte je eines der beiden Tangentenpaare, welche in den Kurvenschnittpunkten der Parallelsekanten k und l die Kurve berühren,
- die Punkte G und H als Schnittpunkte der beiden Geradenpaare, welche die Kurvenschnittpunkte der einen Parallelsekante a mit denen einer anderen b verbinden.

Erkl. 136. Sodann müssen, wenn man umgekehrt ausgeht von einer beliebigen durch den gegebenen Kurvenmittelpunkt gelegten Geraden, auf Grund des Satzes 14 parallel werden:

- die Geraden c und d als Kurventangenten in den Schnittpunkten des gewählten Durchmessers,
- die Geraden k und l als Berührungssehnen der aus beliebigen Punkten E und F des Durchmessers ausgehenden Kurventangenten,
- die Geraden i und o als Verbindungsgeraden der übrigen Eckpunkte des Tangentenvierseits der vorigen beiden Tangentenpaare,
- die Geraden e und f als vierte harmonische Geraden zu dem Durchmesser und den aus E und F ausgehenden Kurventangenten.

Erkl. 137. Die in den Sätzen 13, 14 bezw. in Erklärung 135 und 136 aufgestellten Beziehungen der Kurvendurchmesser sind an den vier Figuren 28 bis 31 jedesmal einzeln abzulesen und zu vergleichen, damit deren Allgemeingiltigkeit erkannt wird. Man erkennt dabei, daß die Sekantenpaare a, b und k, l nicht gerade unbedingt hätten von einander getrennt gehalten werden müssen: die Punkte

E und F hätte man sich aus den durch die Kurvenschnittpunkte von a und b gehenden Tangenten erzeugen können, bezw. die Punkte G und H aus den Verbindungsgeraden der Kurvenschnittpunkte von k und l. Jedoch ist der Zusammen-

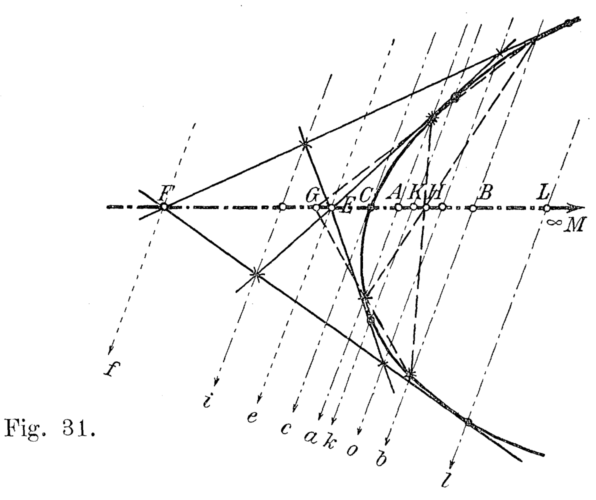


Fig. 31.

hang zwischen dem umgeschriebenen und dem eingeschriebenen Viereck kein so wesentlicher wie z. B. bei der Mittelpunktserzeugung nach Figur 27. Schon dort hätten die beiden Vierecke getrennt dargestellt werden können, konnten aber auch ohne Verlust der Übersichtlichkeit vereinigt bleiben. Hier ist der Vollständigkeit halber die getrennte Darstellung vorgezogen worden. Im einzelnen wird das durch a und b bestimmte Sehnenviereck stets ein überschlagenes sein müssen, da die Parallelen a und b nicht seine Seiten, sondern seine Diagonalen werden müssen. Dagegen wird das durch k und l bestimmte Tangentenvierseit verschiedene Lagen zur Kurve annehmen können je nach Lage von K und L zum Kurvenmittelpunkte. Liegen die Punkte K und L und damit auch E und F wie in Figur 28 auf verschiedenen Seiten von M, so entsteht ein konvexes Vierseit, welchem die Ellipse eingeschrieben ist, liegen K und L bezw. E und F, wie in Figur 31, gleicherseits von M, so entsteht ein konvexes Vierseit, in dessen einem Außenraum die Kurve angeschrieben ist. Bei der Hyperbel kann natürlich ebensowenig wie bei der Parabel ein Vierseit die Kurve umschließen; es entsteht daher immer ein konvexes Vierseit mit Kurven in zwei Außenräumen. Die beiden Äste liegen dabei in Figur 30 stets so, daß einerseits zwei Tangenten den einen und andererseits zwei den anderen Ast in einem der zwei entgegengesetzten Außenräume berühren. Dasselbe findet statt bei Figur 29, wenn K und L bezw. E und F beiderseits von M liegen. Wird aber in Figur 29 K und L und damit auch E und F auf gleicher Seite von M gewählt, so entsteht ein konvexes Vierseit, dessen Tangenten wie bei der Parabel der Figur 31 im einen Außenraum alle vier denselben einen Hyperbelast berühren, während der andere Hyperbelast im entgegengesetzten Außenraum des Vierseits ohne jede unmittelbare Berührung zum Vierseit scheinbar abgelöst frei liegt.

Erkl. 138. Unterschiede der Durchmessereigenschaften bei den dreierlei Kurvengattungen zeigen sich besonders hinsichtlich der Punkte C, D bezw. der Tangenten c, d in den Schnittpunkten des Durchmessers. Da die Ellipse den Mittelpunkt im Innern, also jeden Durchmesser zur Sekante hat, so gibt es bei der Ellipse in jeder Richtung einen die Kurve zweimal schneidenden Durchmesser, also zwei Tangenten c und d. Bei der Parabel liegt der Mittelpunkt unendlich fern, also gibt es Durchmesser überhaupt nur in dieser einzigen

Richtung, und jeder Durchmesser trifft die Kurve nur noch in einem im Unendlichen gelegenen Punkte, so daß in Figur 31 kein Punkt D und Tangente d, sondern nur Punkt C und Tangente c auftreten kann. Bei der Hyperbel aber ist der Mittelpunkt ein äußerer Punkt, also muß es sowohl Hyperbeldurchmesser geben, welche die Kurve schneiden, als solche, welche die Hyperbel nicht schneiden, und zwei Hyperbeldurchmesser müssen die Kurve berühren. In der Tat hat ja die unendlich ferne Gerade für die Hyperbel die Eigenschaft einer Sekante, besitzt also sowohl Punkte außerhalb der Kurve — und deren Polaren müssen die Kurve schneiden —, als Punkte innerhalb der Kurve — und deren Polaren müssen außerhalb der Kurve verlaufen —, als auch zwei Punkte auf der Kurve, — und deren Polaren müssen die Kurve berühren. Diese letzteren Tangenten sind die vom Hyperbelmittelpunkt an die Kurve gezogenen Tangenten, welche durch ihren eigenen Pol hindurchgehen, die Asymptoten. Sie berühren die Kurve in ihren Schnittpunkten mit der Polaren des Mittelpunktes, nämlich eben in den unendlich fernen Kurvenpunkten. Demnach sind die Asymptoten der Hyperbel ebenfalls zwei Durchmesser derselben, und zwar diejenigen, welche im Strahlenbüschel aller Durchmesser die schneidenden und nichtschneidenden Durchmesser von einander trennen. Figur 29 zeigt einen Durchmesser der ersten Art, welcher folglich zwei Punkte C und D, zwei Tangenten c, d erzeugt. Figur 30 zeigt einen Durchmesser der zweiten Art, welcher folglich keine Schnittpunkte C, D und keine Tangenten c, d aufweist.

Erkl. 139. Jeder Durchmesser einer Kurve geht durch den Mittelpunkt, und folglich müssen bei der Parabel zwei besondere Erscheinungen eintreten, da diese ihren Mittelpunkt im Unendlichen hat. Als Berührungssehne zum Punkte E ist nämlich in Figur 31 k die Polare zu Punkt E, enthält also auf jeder Sekante durch E den vierten harmonischen Punkt zu E und den Kurvenschnittpunkten der Sekante. Auf dem Durchmesser EM sind also vier harmonische Punkte E, C, K, $M\infty$, weil k Polare zu E oder weil e Polare zu K. Und folglich ist C Mittelpunkt der Strecke EK; ebenso ist aber auch C Mittelpunkt der Strecke F L, weil auch l Polare zu F, bezw. f Polare zu L. Legt man ferner bei der Parabel (Figur 32) in verschiedenen Richtungen parallele Sekanten und Tangenten an die Kurve, so müssen stets Durchmesser entstehen durch Verbindung des Berührungspunktes einer Tangente mit den Mittelpunkten ihrer Parallelsekanten. Diese Durchmesser müssen nun aber jedesmal parallel laufen nach dem unendlich fernen Mittelpunkt der Parabel. Dies ist in Figur 32 dargestellt in drei verschiedenen Fällen, und jedesmal sind eine Tangente c und zwei Parallelsekanten nebst dem von ihnen erzeugten Durchmesser in gleicher Liniengattung gezeichnet. Für jeden dieser Durchmesser ist der zweite Kurvenschnittpunkt D der unendlich ferne, für jede dieser Tangenten c ist also die unendlich ferne Tangente die parallele Tangente d. In der Tat muß die unendlich ferne Gerade als Parallele zu jeder durchs Endliche gehenden Geraden angesehen werden.

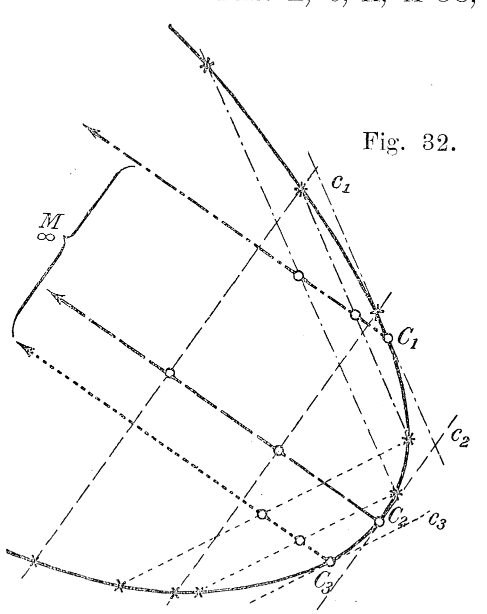


Fig. 32.

* * *

c) Konjugierte Durchmesser.

Frage 41. Welche Zuordnung je zweier Durchmesser ist schon in deren Einführung durch die Sätze 13 und 14 festgelegt?

Erkl. 140. Wenn man in den Figuren 28 bis 31 die konjugierten Durchmesser zur Darstellung bringen will, so braucht man nur durch den Punkt M jeweils die Parallele m zu den vielen anderen Parallelstrahlen einzuzeichnen. Dann ist m der konjugierte Durchmesser zum anderen bezw. dieser andere der konjugierte zu m. Denn nach Antwort 32 und folgenden geht von zwei konjugierten Geraden die eine durch den Pol der anderen und folglich auch die andere durch den Pol der einen. Hier wird dieselbe Zuordnung, welche dort für die Strahlen beliebiger Punkte durchgeführt wurde, angewendet auf die Strahlen des Kurvenmittelpunktes, d. h. auf die Durchmesser der Kurve.

Erkl. 141. Die Einzelheiten der Sätze 13 und 14, besonders in der nebenstehenden Ausdrucksweise für diese beiden Sätze, ließen sich auf Grund der Figuren 28 bis 31 noch mannigfach vermehren. So bietet z. B. das eingeschriebene Viereck mit den Paralleldiagonalen a und b den Ausgangspunkt mehrfacher Eigenschaften folgender Art:

1) Verbindet man die Kurvenschnittpunkte einer beliebigen Geraden a (oder b) mit einem beliebigen Punkte G (oder H) des zur Richtung a konjugierten Durchmessers, so bestimmen die neuen Kurvenschnittpunkte dieser beiden Verbindungsgeraden miteinander eine Parallelsekante b zur vorigen a, und die Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte (auf b) mit den vorigen Schnittpunkten (auf a) erzeugen ebenfalls einen Schnittpunkt H (oder G) auf dem konjugierten Durchmesser.

2) Legt man durch eine Kurve aus einem beliebigen Punkte G (oder H) eine beliebige Sekante und zieht durch deren Kurvenschnittpunkte Parallelen zu dem der Richtung G M (H M) konjugierten

Antwort. Ein Durchmesser wird nach Satz 13 erzeugt durch einen Parallelstrahlenbüschel, oder ein Durchmesser bestimmt nach Satz 14 selber einen Parallelstrahlenbüschel von Sekanten bezw. Tangenten, welcher seinen Scheitel im Pole des Durchmessers hat. Unter den unendlich vielen Geraden dieses Parallelbüschels ist aber immer auch eine, welche durch den Mittelpunkt der Kurve geht, also wieder ein Durchmesser. Man nennt daher diesen zweiten Durchmesser, welcher durch den Pol des ersten geht, seinen konjugierten Durchmesser. Man könnte hiernach die Sätze 13 und 14 auch in der Weise formulieren, daß man das darin auftretende Parallelbüschel jeweils bezeichnete als Büschel von Strahlen, welche sämtlich zum konjugierten Durchmesser parallel seien. Dadurch würde **Satz 13** etwa folgende Gestalt annehmen:

Zieht man zu einem Durchmesser einer Kurve zweiten Grades eine beliebige Anzahl paralleler Geraden, so liegen auf dessen konjugiertem Durchmesser: die Mittelpunkte aller Parallelsehnen, die Berührungspunkte der Paralleltangenten u. s. w.

Und ebenso entstände aus **Satz 14:** Legt man durch beliebige Punkte eines Kurvendurchmessers die Tangenten an die Kurve, so werden zum konjugierten Durchmesser parallel: die Tangenten in den Durchmesserschnittpunkten, alle Berührungssehnen u. s. w., sowie die vierten harmonischen Strahlen zu jedem dieser Tangentenpaare und dem gegebenen Durchmesser.

Zugleich kann festgestellt werden, daß der Winkel, welchen ein Durchmesser mit einem der

Durchmesser, so liefern die Parallelen zwei neue Kurvenpunkte, welche mit dem zuvor gewählten Punkte G (H) in einer Geraden liegen.

3) Wenn eine Transversale a des Winkels H (oder G) durch den Durchmesser H M halbiert wird, so halbiert der Durchmesser H M jede zum konjugierten Durchmesser parallele Transversale des Winkels H.

Strahlen des Parallelstrahlenbüschels, z. B. mit der Tangente seines Kurvenschnittpunktes bildet, gleich sein muß dem Winkel dieses Durchmessers mit seinem konjugierten Durchmesser.

Erkl. 142. In gleicher Weise, wie in voriger Erklärung aus dem eingeschriebenen Viereck, können auch aus dem Tangentenvierseit neue Eigenschaften abgeleitet werden:

1) Schneidet man die Kurventangenten eines beliebigen Punktes E (oder F) mit einer beliebigen Parallelen i (oder o) zur Richtung des zu E M konjugierten Durchmessers, so bestimmen die zwei neuen Kurventangenten ihrer Schnittpunkte miteinander ebenfalls einen Schnittpunkt F (oder E) auf dem vorigen Durchmesser E M, und ihre Schnittpunkte mit den vorigen Tangenten liefern als Verbindungsgeraden wieder eine Parallele zum konjugierten Durchmesser.

2) Schneidet man die Tangenten eines beliebigen Punktes E (oder F) durch eine dritte Tangente und zieht durch deren Schnittpunkte Parallelen i und o zu dem der Richtung E M konjugierten Durchmesser, so erzeugen die Parallelen auf den beiden Tangenten zwei Schnittpunkte, deren Verbindungsgerade wieder die Kurve berührt, und zwar so, daß der Schnittpunkt F (oder E) der dritten und vierten Tangente ebenfalls auf dem Durchmesser E M liegt, also die Berührungssehne derselben ebenfalls dem konjugierten Durchmesser parallel läuft.

3) Wenn eine Transversale k (oder i) des Winkels E (oder F) durch den Durchmesser E M halbiert wird, so halbiert der Durchmesser E M jede zum konjugierten Durchmesser parallele Transversale des Winkels. Hiernach sind z. B. die Tangentenabschnitte auf c und d gleich groß zwischen dem Berührungspunkt und den Tangenten aus E oder F, ferner die Abschnitte auf den Sekanten a und b zwischen ihren Kurvenschnittpunkten und den Tangenten aus E und F, sowie die Abschnitte auf den Sekanten i und o sowohl vom Durchmesserpunkt als auch vom Kurvenschnittpunkt bis zu den Tangenten aus einem beliebigen Punkte des zu ihrer Richtung konjugierten Durchmessers. (Man vergleiche die in den Aufgaben 66 und 72 aufgestellten allgemeinen Sätze.)

Frage 42. Welche Haupteigenschaften der konjugierten Durchmesser ergeben sich aus den bisherigen Überlegungen?

Antwort. Als Haupteigenschaften konjugierter Durchmesser ergeben sich folgende:

Satz 16. Von zwei konjugierten Durchmessern geht jeder durch den Pol des andern; jeder halbiert die zum andern parallelen Sekanten, geht durch die Berührungspunkte der zum andern parallelen Tangenten und ist also selbst

Erkl. 143. Wenn man nach Erkl. 133 die Beziehung der beiden Kurvenhälften beiderseits eines Durchmessers als eine Art schiefer Symmetrie auffaßt, so bilden zwei konjugierte Durchmesser gewissermaßen zwei zusammengehörige Axen solcher Symmetrie. Denn immer der eine von beiden gibt die Richtung an,

nach welcher diese schiefe Symmetrie in Bezug auf den andern stattfindet. Der Winkel, unter welchem diese Symmetrie für einen beliebig ausgewählten Durchmesser stattfindet, ist bestimmt durch den Winkel dieses Durchmessers gegen die beiden Tangenten in seinen Kurvenpunkten. Ist letzterer Winkel ein schiefer, so ist die Symmetrie eine schiefe; würde letzterer Winkel ein rechter werden, so würde auch die Symmetrie eine rechtwinkelige. Über die wirkliche Größe dieses Winkels in jedem einzeln herausgegriffenen Falle eines beliebigen Paares konjugierter Durchmesser nach Graden, Minuten, Sekunden gibt die Maßgeometrie vollständige Auskunft.

parallel zu den Tangenten in den Kurvenschnittpunkten des andern. Die Winkelgröße eines Durchmessers mit seinem konjugierten ist zugleich der Neigungswinkel jedes der beiden Durchmesser mit den Tangenten in seinen Kurvenpunkten.

Frage 43. Welche Beziehung zu den konjugierten Durchmessern besitzen die in Satz 12 auftretenden Parallelogramme?

Antwort. 1) Wird ein beliebiges Parallelogramm A B C D (Figuren 33 und 34) einer Kurve eingeschrieben, so gehen seine Diagonalen AC und BD, also auch seine Mittelparallelen p und q durch den Mittelpunkt der Kurve. Da nun die Mittelparallele p//AB//CD jedenfalls die Parallelogrammseiten und Kurvensehnen BC und AD halbiert, und ebenso die Mittelparallele q//BC//AD die Parallelogrammseiten und Kurvensehnen AB und CD halbiert, so stehen die Durchmesser p und q in derjenigen

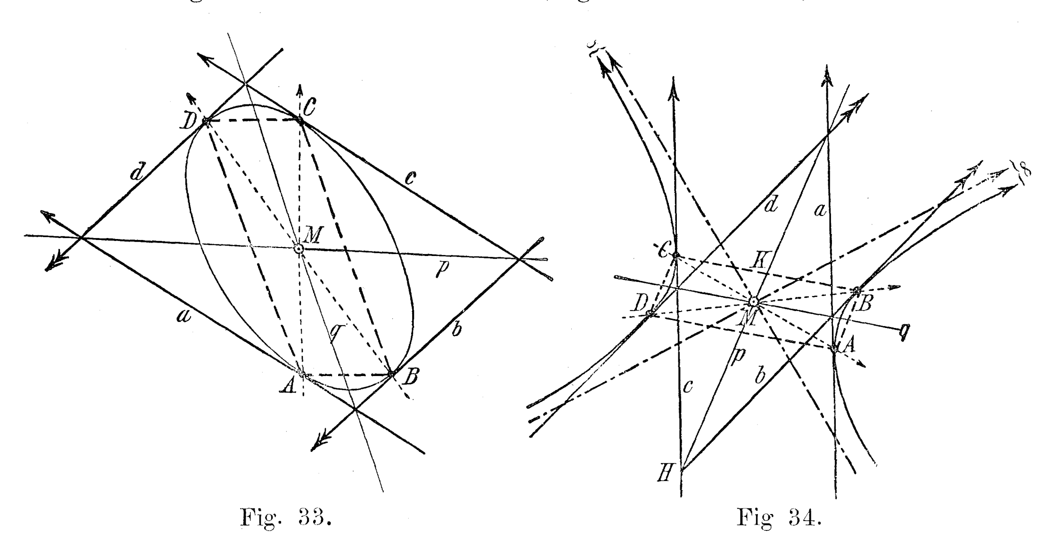


Fig. 33. Fig 34.

Erkl. 144. Die bisher aufgestellten Eigenschaften konjugierter Durchmesser beziehen sich bloß auf die Definition der Kurvendurchmesser und deren Eigentümlichkeiten als Polaren unendlich ferner Pole; aber auch schon die Definition des Mittelpunktes der Kurve als Pol der unendlich fernen Geraden in Antwort 36 bis 38 enthält Beziehungen, aus welchen sich Eigenschaften der konjugierten Durchmesser ergeben. Diese werden in nebenstehender Antwort abgeleitet. Während aber die in Satz 16 ausgesprochenen und an den Figuren

28 bis 31 dargestellten Eigenschaften der konjugierten Durchmesser für alle diese Kurvengattungen ziemlich gleichwertig auftreten, so gelten diese neuen nur für Ellipse und Hyperbel, da bei der Parabel weder ein umgeschriebenes noch ein eingeschriebenes Parallelogramm möglich ist. (Vergl. die folgende Antwort 44 und Erklärung 150 ff.)

Erkl. 145. Denkt man sich den Durchmesser A C der Figuren 33 und 34 etwa festliegend und den Punkt B die Kurve durchlaufend, so durchläuft der Winkel A B C alle die Winkelgrößen, welche an der gewählten Kurve der Peripheriewinkel über dem Durchmesser A C annehmen kann, und stets bilden dabei die Durchmesser A C und B D die Diagonalen eines eingeschriebenen Parallelogramms. Beginnt dabei der Punkt B seinen Umlauf im Punkte A, so fallen C B, M B und q mit C M A zusammen, B A fällt in die Tangente a, also wird $p // a$. Der Wert des Peripheriewinkels C B A, welcher gleich dem Winkel (p q) ist, hat also in diesem Grenzfall die Größe des Sehnentangentenwinkels (C A, a); er nimmt dann aber beim Umlauf des Punktes B stets verschiedene Werte an, bis Punkt B nach C gelangt ist. In diesem zweiten Grenzfalle fallen A B, M B und p mit A M C zusammen, B C fällt in in die Tangente c, also wird $q // c$, und der Wert des Peripheriewinkels A B C = (p q) hat nunmehr wieder die Größe des Sehnentangentenwinkels (A C, c), der nach der einen Seite als spitzer, nach der anderen als stumpfer Winkel zu nehmen ist. — In jedem der vielen so entstandenen Parallelogramme sind die Mittelparallelen p, q zwei konjugierte Durchmesser; nur in einem davon werden auch die Diagonalen zu konjugierten Durchmessern, wenn nämlich B in die Richtung des zu M A konjugierten Durchmessers fällt, also wenn $MB // a // c$ gewählt wird (s. Fig. 35)

Erkl. 146. Nach Satz 12 müssen die Berührungspunkte A B C D unbedingt ebenfalls ein Parallelogramm bilden, weil die Tangenten a b c d eines bilden.

Beziehung zu einander, welche in Satz 16 als Grundbeziehung konjugierter Durchmesser aufgestellt wurde, indem jeder die zum anderen parallelen Kurvensekanten halbiert.

2) Ein eingeschriebenes Parallelogramm entsteht aber, indem einem erstgewählten Durchmesser M A C ein beliebiger zweiter M B D zugesellt wird, also enthält man zwei Nachbarseiten, indem man mit den Endpunkten A und C eines erstgewählten Durchmessers einen beliebigen dritten Punkt B der Kurvenperipherie verbindet. Und da die Mittelparallelen des entstehenden Parallelogramms jedesmal konjugierte Durchmesser werden müssen, so geben auch die aus einem beliebigen Kurvenpunkte B nach den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers A C laufenden Sehnen stets die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser an.

3) Wird ein beliebiges Parallelogramm a b c d (Fig. 33, 34) einer Kurve umgeschrieben, so ist der Schnittpunkt zweier seiner Seiten, z. B. (a b) jedenfalls der Pol der Berührungssehne A B, und (c d) Pol von C D; folglich ist die Diagonale q die Polare des Schnittpunktes von A B und C D, oder dieser Schnittpunkt von A B und C D ist Pol von q. Durch denselben Schnittpunkt mit A B und C D als den Verbindungsgeraden der Berührungspunkte auf den Gegenseiten a und b, c und d geht aber nach dem Satz des Brianchon für das Vierseit a d b c a auch die Diagonale p, und zwar ist dieser Schnittpunkt der unendlich ferne Punkt von p, weil das Viereck A D B C A ein Parallelogramm wird. Daher geht p durch den Pol von q, oder p und q sind konjugierte Durchmesser.

4) Ein umgeschriebenes Parallelogramm entsteht aber, indem einem

Damit nun für den dritten Teil der nebenstehenden Antwort a und b bezw. c und d als Gegenseiten des Tangentenvierseits im Satz des Brianchon auftreten können, müssen A und B bezw. C und D Gegenecken des eingeschriebenen Vierecks sein, also muß letzteres in der Umlaufsweise A C B D oder A D B C, ersteres in der entsprechenden Umlaufsweise a c b d bezw. a d b c genommen werden (vgl. Fig. 90, 7 des I. Teiles dieses Lehrbuches). Das Tangentenparallelogramm hat sodann zwei Ecken (a d) und (b c) mit Diagonale p im Endlichen, und zwei Ecken (d b) und (c a) im Unendlichen, deren Diagonale die unendlich ferne Gerade ist. Und auf letzterer müssen einander schneiden, d. h. es müssen parallel werden die Geraden A B, C D und p. Da aber der Schnittpunkt von A B und C D Pol zu q ist und p durch ersteren hindurchgeht, so ist p wirklich derjenige Kurvendurchmesser, welcher durch den unendlich fernen Pol des Durchmessers q hindurchgeht, d. h. p und q sind konjugierte Durchmesser.

Erkl. 147. Denkt man sich das Tangentenpaar a c der Figuren 33 und 34 etwa festliegend und die Tangente b die Kurve umhüllend, so durchläuft der Winkel (p q) alle die Winkelgrößen, unter welchen der zwischen den Paralleltangenten a und c ausgeschnittene Tangentenabschnitt der veränderlichen Tangente b vom Kurvenmittelpunkt M aus gesehen wird, und stets bilden dabei p und q die Diagonalen eines Tangentenparallelogramms. Beginnt hierbei die Tangente b ihren Umlauf mit der Lage a, so fällt (a b) mit A, also q mit M A zusammen, (bc) mit dem unendlich fernen Punkte von c, also wird q // a, und der Winkel (p q) hat wie in Erklärung 145 den Anfangswert gleich dem Sehnentangentenwinkel (C A, a); er nimmt dann aber beim Umlauf der Tangente b stets verschiedene Werte an, bis Tangente b mit c zusammenfällt. In diesem zweiten Grenzfalle fällt (b c) mit C, p mit M C zusammen, (a b) mit dem unendlich fernen Punkte von a, also wird q // c, und der erstgewählten parallelen Tangentenpaar a c ein beliebiges zweites b, d zugesellt wird, also erhält man zwei Nachbarecken, indem man ein erstgewähltes Paar von Paralleltangenten a, c durch eine beliebige dritte Tangente b der Kurve schneidet. Und da die Diagonalen des entstehenden Parallelogramms jedesmal konjugierte Durchmesser sein müssen, so ergeben auch die auf einer beliebigen Tangente b durch zwei beliebige Paralleltangenten a, c erzeugten Punkte stets die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser an.

5) Ein Vergleich der Figuren 33 und 34 mit Figur 19 zeigt, daß die Durchmesser p und q zusammen mit der unendlich fernen Geraden das Dreieck der Nebenseiten eines umgeschriebenen bezw. der Nebenecken eines eingeschriebenen Vierecks bilden. Daher bilden je zwei konjugierte Durchmesser mit der unendlich fernen Geraden ein Polardreieck der Kurve. Und nur in dem besonderen Falle, daß das zweite Gegenseitenpaar des Tangentenparallelogramms mit der Berührungssehne des ersten parallel gelegt, bezw. die zweite Diagonale des Sehnenparallelogramms mit den zur ersten gehörenden Kurventangenten parallel gewählt wird, — dann entsteht ein doppeltes Polardreieck nach Figur 21, indem sowohl Diagonalen als Mittelparallelen beider Parallelogramme konjugierte Durchmesser sind. (Figur 35).

6) Man erhält hiernach folgende weitere Aussage über konjugierte Durchmesser:

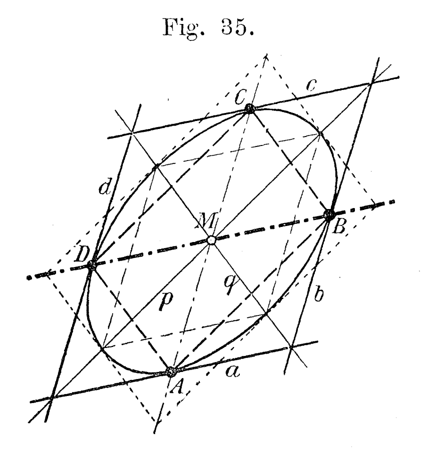
Satz 17. Die Mittelparallelen jedes Sehnenparallelogramms und die Diagonalen jedes Tangentenparallelogramms einer Kurve zweiten Grades sind zwei

Winkel (p q) hat wieder die Größe des Sehnentangentenwinkels (A C, c), der nach der einen Seite als stumpfer, nach der anderen als spitzer Winkel zu messen ist. Man hat also nicht etwa bloß eine ähnliche, sondern tatsächlich dieselbe Durchlaufung des Winkels (p q) wie in Erklärung 145. — In jedem der vielen so entstandenen umgeschriebenen Parallelogramme sind die Diagonalen p und q zwei konjugierte Durchmesser; nur in einem derselben werden auch die Mittelparallelen konjugierte Durchmesser, wenn nämlich b die Richtung des zur Richtung a // c konjugierten Durchmessers annimmt, also wenn b // A C gewählt wird (s. Fig. 35).

konjugierte Durchmesser und bilden mit der unendlich fernen Geraden ein Polardreieck der Kurve.

Erkl. 148. In Figur 35 ist B D // a // c gewählt bezw. b // A C gewählt. Folglich ist hier einerseits sowohl p und q ein Paar konjugierter Durchmesser, und zwar zugleich Diagonalen des umgeschriebenen Parallelogramms a b c d und Mittelparallelen des eingeschriebenen Parallelogramms A B C D, als auch andererseits M A und M B ein Paar konjugierter Durchmesser, weil jeder durch die Berührungspunkte der zum anderen parallelen Tangenten geht. Daher müssen auch A C und B D zugleich Diagonalen eines Tangentenparallelogramms sein und Mittelparallelen eines Sehnenparallelogramms. Wählt man nämlich die Kurvenschnittpunkte von p und q als Ecken eines eingeschriebenen und als Berührungspunkte eines umgeschriebenen Parallelogramms, so gehen die Seiten des ersteren parallel A C und B D, die Seiten des letzteren parallel p und q; die Ecken des ersteren liegen auf p und q, die Ecken des letzteren auf A C und B D. Und jedesmal ist der Viececkswinkel des einen Parallelogramms gleich dem Diagonalenwinkel des anderen, und umgekehrt. — Auch in Figur 33 könnten p und q als Diagonalen eines Sehnenparallelogramms gewählt werden; die Mittelparallelen desselben fallen dann aber nicht mit A C und B D zusammen. Und ebensowenig fallen in Figur 33 auf A C und B D die Ecken des umgeschriebenen Parallelogramms, welches die Kurvenschnittpunkte von p und q zu Berührungspunkten hat, sondern ebenfalls auf die vorgenannten Mittelparallelen. Wohl aber sind in Figur 33 und 34 wegen des Sehnenparallelogramms A B C D die beiden konjugierten Durchmesser p und q vier harmonische Geraden mit den Diagonalen A C und B D, also bilden auch in Figur 35 die beiden zusammengehörigen Paare konjugierter Durchmesser p, q und A C, B D zusammen eine Gruppe von vier harmonischen Geraden.

Fig. 35.



Erkl. 149. Bei dem Durchlauf des Kurvenpunktes B durch den Kurvenbogen A C in Erklärung 145 nimmt der Durchmesser M B der Reihe nach jede Lage zwischen M A und M C an, und jeder Durchmesser bildet einen bestimmten Winkel mit seiner zugehörigen Tangente; und bei dem Umlauf der veränderlichen Tangente b längs dem Kurvenbogen A C in Erklärung 147 nimmt die Tangente b der Reihe nach jede Lage der Kurventangente zwischen A und C an, und jede Tangente bildet einen bestimmten Winkel mit ihrem zugehörigen Durchmesser. Es treten daher bei dem Durchlauf des Kurvenpunktes in Erklärung 145 und bei

dem Umlauf der Tangente in Erklärung 147 nach Lage und Größe genau dieselben Lagen und gleichen Größen der Winkel zwischen Durchmesser und Tangente auf, und zwar jedesmal sämtliche am Kurvenbogen A B C überhaupt vorkommenden Winkel. Das sind aber auch sämtliche Winkelgrößen des Winkels zwischen Tangente und Durchmesser an der ganzen Kurve überhaupt: denn einerseits sind die Tangenten an den beiden Endpunkten eines Durchmessers A B parallel, bilden also auf jeder Seite gleiche Winkel; andererseits gehört zu jeder Tangente b eine parallele Tangente d, deren Berührungspunkt der zweite Endpunkt desselben Durchmessers ist, so daß auch hier gleiche Winkel entstehen. Man erhält daher sämtliche an einer Kurve auftretenden Winkel zwischen Durchmesser und Tangente, wenn man einen Kurvenpunkt oder eine Tangente den Umlauf von einem Endpunkt eines Durchmessers zum andern machen läßt.

Erkl. 150. In den Figuren 33 und 34 ist a b c d ein der Kurve umgeschriebenes Vierseit, und p und q bilden mit der unendlich fernen Geraden das Dreiseit der Nebenseiten dazu, also ein Polardreiseit der Kurve; ebenso ist A B C D in den Figuren 33 und 34 jeweils ein der Kurve eingeschriebenes Viereck, und die Schnittpunkte von p und q mit der unendlich fernen Geraden sind zugleich die Schnittpunkte der Gegenseiten dieses Vierecks, bilden also mit M zusammen das Dreieck der Nebenecken und folglich wieder ein Polardreieck der Kurve. Daher lassen sich in Bezug auf die Figuren 33 und 34 dieselben Erörterungen anstellen, welche in den Antworten der Fragen 26 bis 31 über das Polardreieck durchgeführt sind; — dabei muß nur berücksichtigt werden, daß anstelle der einen Seite des Polardreiecks der Figur 19 die unendlich ferne Gerade eintreten muß. Insbesondere erhält man bei Figur 35 den Einzelfall der Figur 21, indem nach Erklärung 148 sowohl p und q als auch A C und B D je ein Paar konjugierte Durchmesser bilden. Es müssen daher in Figuren 33 und 34 schon die in Figur 19 angegebenen, in Figur 35 sogar die in Figur 21 angegebenen Besonderheiten der gegenseitigen Lage bestimmter Punkte und Geraden auftreten. Vergl. Erkl. 112.

Erkl. 151. Der obenstehende Satz 17 gibt bestimmte Eigenschaften für die Mittelparallelen von Sehnenparallelogrammen und für die Diagonalen von Tangentenparallelogrammen, aber keine bestimmten Aussagen über Mittelparallelen von Tangentenparallelogrammen oder Diagonalen von Sehnenparallelogrammen. In der Tat sind die Geraden der beiden letztgenannten Arten vollständig willkürlich und keinerlei Gesetzmäßigkeit unterworfen, wohl aber diejenigen der ersteren Art. Man kann zwei ganz beliebige Durchmesser der Kurve als Mittelparallelen eines Tangentenparallelogramms wählen, d. h. man kann zu einem parallelen Tangentenpaar jedes beliebige zweite Paar zur Bildung eines Tangentenparallelogramms hinzunehmen, — man kann aber durchaus nicht zwei beliebig gewählte Durchmesser als Diagonalen eines Tangentenparallelogramms verwenden, sondern nur zwei konjugierte Durchmesser. Ebenso kann man zwei ganz beliebige Durchmesser der Kurve als Diagonalen eines Sehnenparallelogramms verwenden, denn jedes beliebige Durchmesserpaar bestimmt auf der Kurve die Ecken eines eingeschriebenen Parallelogramms, — man kann aber durchaus nicht zwei beliebig gewählte Durchmesser als Mittelparallelen eines Sehnenparallelogramms nehmen, sondern nur zwei konjugierte Durchmesser.

Frage 44. Welche Besonderheiten zeigen die konjugierten Durchmesser bei den drei Gattungen der Kurven zweiten Grades?

Antwort. Da die Kurvendurchmesser alle durch den Kurvenmittelpunkt gehen, so besteht

Erkl. 152. Auf jedem Ellipsendurchmesser gibt es unendlich viele Punkte innerhalb der Kurve, unendlich viele Punkte außerhalb der Kurve und zwei Punkte auf der Kurve, die beide im Endlichen liegen.

Auf jedem Parabeldurchmesser gibt es unendlich viele Punkte innerhalb der Kurve, unendlich viele Punkte außerhalb der Kurve und zwei Punkte auf der Kurve, deren einer im Endlichen, deren anderer im Unendlichen liegt.

Auf einem schneidenden Hyperbeldurchmesser gibt es (ebenso wie auf jedem Ellipsendurchmesser) unendlich viele Punkte innerhalb der Kurve, unendlich viele Punkte außerhalb der Kurve und zwei Punkte auf der Kurve, die beide im Endlichen liegen.

Auf einem nichtschneidenden Hyperbeldurchmesser gibt es bloß unendlich viele Punkte außerhalb der Kurve, keine innerhalb und keine auf der Kurve.

Auf einer Hyperbelasymptote gibt es unendlich viele Punkte außerhalb der Kurve, keine Punkte innerhalb der Kurve und einen Punkt auf der Kurve, welcher unendlich fern liegt.

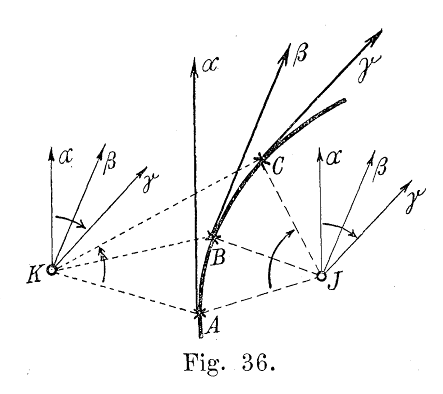


Fig. 36.

Erkl. 153. Denkt man sich (Fig. 36) irgend einen Kurvenbogen einer Kurve zweiten Grades in beliebiger Richtung A—B—C durchlaufen, und in jedem seiner Punkte die Tangente gezogen und je eine Verbindungsgerade einerseits nach einem Punkte J auf der Innenseite, andererseits nach einem Punkte K auf der Außenseite des Bogens, so zeigt die

zunächst der engste Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Durchmesser der dreierlei Kurven überhaupt und jenen des Kurvenmittelpunktes, welche in Antwort 38 erörtert wurden. Dazu gesellen sich dann noch die besonderen Eigentümlichkeiten der konjugierten Durchmesser.

1) Für die Ellipse ist der Mittelpunkt ein Punkt innerhalb der Kurve, also sind sämtliche Durchmesser Sekanten der Kurve und treffen dieselbe in zwei Punkten. Dieselbe Eigenschaft kommt also auch unterschiedslos je zwei konjugierten Durchmessern der Ellipse zu; und zu einem beliebigen Durchmesser p (Fig. 33) kann man den konjugierten q finden entweder durch Halbierung einer zu p parallelen Sekante AB, oder durch ein sich auf p schneidendes Tangentenpaar b, c mit seinen Paralleltangenten a, d. Das von dem konjugierten Durchmesser mit der unendlich fernen Geraden gebildete Polardreieck hat eine Ecke, nämlich den Kurvenmittelpunkt, innerhalb der Kurve, die zwei anderen Ecken auf dessen Polare, nämlich der unendlich fernen Geraden, also außerhalb der Kurve.

2) Für die Parabel ist der Mittelpunkt der unendlich ferne Kurvenpunkt, in welchem die Parabel die unendlich ferne Gerade berührt; dorthin laufen also sämtliche Parabeldurchmesser. Ebendahin läuft aber auch jede Parallelsehne zu einem beliebigen Durchmesser: d. h. jede Parallele zu einem Durchmesser ist selbst ein Durchmesser, kann also nicht im Endlichen halbiert werden. Daher besitzt die Parabel keine eingeschriebenen Parallelogramme, also im eigentlichen Sinne auch keine konjugierten Durchmesser. Das letztere folgt auch aus der Tatsache, daß die Parabel keine parallelen

Beobachtung der Umdrehungsrichtungen folgenden Unterschied:

Die unendlich fernen Punkte der Tangenten in A, B, C (Fig. 36) durchlaufen die unendlich ferne Gerade im Umlaufsinne mit dem Uhrzeiger, die Verbindungsgeraden JA, JB, JC drehen sich ebenfalls mit dem Uhrzeiger, die Verbindungsgeraden KA, KB, KC dagegen drehen sich gegen den Uhrzeiger. Daher haben die Kurvensekanten des inneren Punktes die gleiche, die Kurvensekanten des äußeren Punktes dagegen die entgegengesetzte Umlaufsrichtung wie die Tangenten der von diesen Sekanten getroffenen Kurvenpunkte. Nun hat für die Ellipse der Mittelpunkt die Lage des Punktes J, für die Hyperbel die Lage des Punktes K; und die Parallelen durch J bezw. K zu den Tangenten in ABC geben die Richtungen der zu den Durchmessern JA, JB, JC bezw. KA, KB, KC konjugierten Durchmesser an. Demnach erkennt man schon aus der Lage des Mittelpunktes zur Kurve, daß bei der Ellipse der Drehung eines Durchmessers auch die gleichgerichtete Drehung eines konjugierten entspricht, bei der Hyperbel dagegen die entgegengesetzte Drehung des konjugierten. Es wird also ein zweites konjugiertes Durchmesserpaar JB, $J\beta$ bei der Ellipse zu einem ersten Paar JA, $J\alpha$ in getrennten Winkelräumen liegen, d. h. JB im Innenwinkel von JA, $J\alpha$, und $J\beta$ im Nebenwinkel. Bei der Hyperbel dagegen liegt ein zweites konjugiertes Durchmesserpaar KB, $K\beta$ im gleichen Winkelraume des ersten Paares KA, $K\alpha$ — beide im Innenwinkel oder beide im Nebenwinkel.

Erkl. 154. Bei der Parabel versagen alle vorstehenden Erwägungen, denn der Mittelpunkt liegt unendlich fern, würde also in Figur 36 mit J unendlich weit nach rechts, oder mit K unendlich weit nach links übereinstimmen können. Es ist eben die unendlich ferne Gerade selber als konjugierter Durchmesser zu jedem anderen aufzufassen, und daher verlieren die Angaben über die Größe

Tangenten, also kein Tangentenparallelogramm besitzt. Vielmehr ist jede Tangente parallel zur unendlich fernen Geraden, wobei letztere als Kurventangente aufgefaßt wird. Andererseits könnte man die unendlich ferne Gerade, da sie auch durch den Parabelmittelpunkt geht, als einen Parabeldurchmesser auffassen und sie dann jedem anderen Parabeldurchmesser als konjugierten zugesellen. Das Polardreieck derselben schrumpft dann so zusammen, daß in die unendlich ferne Gerade selber zwei Seiten desselben hineinfallen.

3) Für die Hyperbel ist der Mittelpunkt ein äußerer Punkt, folglich gibt es bei der Hyperbel dreierlei Durchmesser, nämlich je beliebig viele schneidende und nichtschneidende, und zwei berührende. Die beiden letzteren sind die Asymptoten der Hyperbel: sie trennen die sämtlichen schneidenden Durchmesser (innen und außen) von sämtlichen nichtschneidenden Durchmessern. Ein schneidender Durchmesser hat seinen Pol außerhalb der Kurve und trifft die unendlich ferne Gerade in einem Punkte innerhalb der Kurve, folglich gibt es zu demselben keine parallelen Tangenten, deren Berührungssehne den konjugierten Durchmesser liefern könnte. Wohl aber gehen durch die Kurvenschnittpunkte des Durchmessers zwei parallele Tangenten, welche die Richtung des konjugierten Durchmessers bestimmen. Letzterer geht also durch einen außerhalb der Hyperbel liegenden Punkt der unendlich fernen Geraden, und folglich hat jeder schneidende Durchmesser als konjugierten einen nichtschneidenden. — Umgekehrt hat ein nichtschneidender Durchmesser seinen Pol innerhalb der Kurve und trifft die unendlich ferne Gerade in einem außerhalb der Hyperbel liegenden

und Lage der Winkel zweier konjugierten Durchmesser ihre Bedeutung. Was aber auch bei der Parabel bestehen bleibt, ist die Winkelbeziehung zwischen den Kurvendurchmessern und den Kurventangenten in deren Kurvenpunkten. Dieser Winkel nimmt bei Durchlaufung des Parabelbogens ebenfalls verschiedene Werte an, und die Untersuchungen bei Ellipse und Hyperbel über die Winkel konjugierter Durchmesserpaare beziehen sich bei der Parabel auf den Winkel ihrer Tangenten mit dem Durchmesser des Berührungspunktes. Jeder Durchmesser der Parabel bleibt Axe einer Art schiefer Symmetrie, und deren Richtung wird nicht durch einen geometrischen Durchmesser, sondern bloß durch die Tangentenrichtung angegeben.

Erkl. 155. Bei der Ellipse konnte zur Herstellung des konjugierten Durchmessers zu einem gegebenen verwendet werden 1) eine zum gegebenen Durchmesser parallele Sehne, 2) eine zum gegebenen Durchmesser parallele Tangente, 3) eine Tangente im Kurvenschnittpunkt des gegebenen Durchmessers. Bei der Hyperbel bleibt der erste Weg, nämlich die Verwendung der Parallelsekanten für beiderlei Durchmesser erhalten; von den zwei anderen Mitteln aber erlaubt der schneidende Durchmesser nur das dritte anzuwenden, nämlich die Tangenten in seinen Kurvenschnittpunkten, — der nichtschneidende Durchmesser nur das zweite, nämlich der parallelen Tangenten. Demnach ist aber bei der Hyperbel ein Sehnen- und Tangentenparallelogramm von der in Figur 35 und Erklärung 148 für die Ellipse vorgestellten Art nicht möglich. Denn da von zwei konjugierten Hyperbeldurchmessern nur der eine ein schneidender sein kann, so kann nie ein Sehnenparallelogramm der Hyperbel als Diagonalen zwei konjugierte Durchmesser erhalten. Dasselbe geht auch aus der Ausführung in Erklärung 153 hervor, denn in der Figur 35 bilden die beiden Durchmesserpaare vier harmonische Geraden; bei der Hyperbel aber kann diese Lagebeziehung zwischen zwei konjugierten Durchmesserpaaren nie eintreten, da ja nach Erklärung 153 jedes konjugierte Durchmesserpaar der Hyperbel nicht in den getrennten, sondern in den gleichen Winkelräumen eines anderen Paares liegen muß.

Punkte, folglich gibt es zu demselben zwei parallele Tangenten, deren Berührungssehne den konjugierten Durchmesser liefert. Letzterer trifft also beide Äste der Hyperbel, und daher hat auch wieder jeder nichtschneidende Durchmesser als konjugierten einen schneidenden. In der Tat liegt der Kurvenmittelpunkt als erste Ecke des Polardreiecks der konjugierten Durchmesser außerhalb der Kurve, folglich muß von den auf der unendlich fernen Geraden liegenden beiden anderen Eckpunkten desselben der eine auf der inneren, der andere auf der äußeren Strecke der unendlich fernen Geraden liegen. — Eine Hyperbelasymptote endlich ist zugleich Kurvendurchmesser und Kurventangente; ihr Pol ist also ihr eigener Berührungspunkt, und dessen Verbindungsgerade mit dem Mittelpunkt, nämlich der zur Asymptote konjugierte Durchmesser, fällt mit eben dieser Asymptote selber zusammen. Und nach den Ergebnissen der Antwort 33 bezw. Erklärung 119 müssen zu den Asymptoten als Kurventangenten aus dem Mittelpunkt auch je zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel harmonisch liegen (vgl. die folgende Antwort 45).

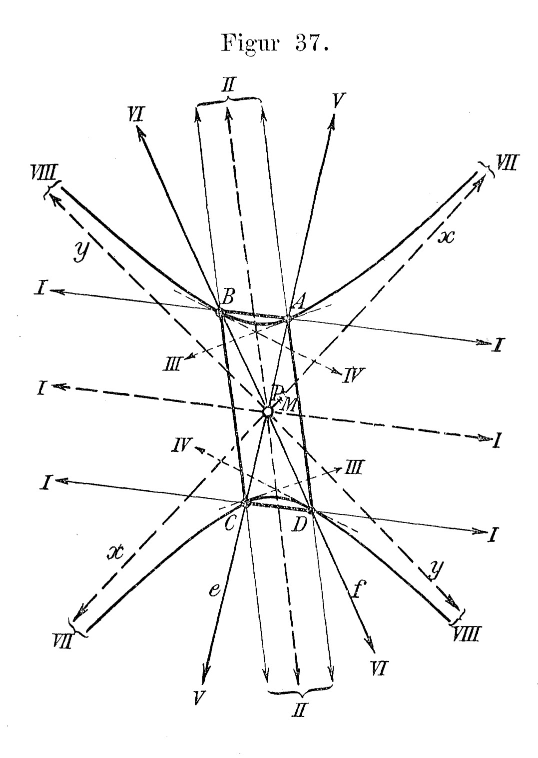
Frage 45. Welche Eigenschaften der Hyperbel ergeben sich aus der Stellung der Asymptoten unter den konjugierten Durchmessern?

Antwort. 1) Um die Stellung der Asymptoten unter den konjugierten Durchmessern im be-



Erkl. 156. Um Figur 23 für die Asymptotenerklärung zu verwenden, kann natürlich nur mit den Punkten Q oder R gearbeitet werden, bezw. zu q oder r als schneidenden Geraden der Pol gesucht werden; denn die unendlich ferne Gerade, welche den Mittelpunkt als Pol erzeugt, ist nicht wie p in Fig. 23 eine außerhalb der Kurve verlaufende, sondern eine Sekante. Die Figur 23 liefert also die Lehre von den Asymptoten, entweder indem man r unendlich fern schneiden läßt, also R zum Kurvenmittelpunkt macht, oder indem man q unendlich fern schneiden läßt, also Q zum Kurvenmittelpunkt werden läßt. Sowohl p, q mit Tangenten von R, als auch p, r mit Tangenten von Q sind vier harmonische Geraden.

Figur 37.



Erkl. 137. Vergleicht man die Figuren 8 und 37, so ist beidemale P ein Punkt außerhalb der Kurve, p eine schneidende Gerade, und zwar in Figur 37 die unendlich ferne Gerade. Daher kann diese letztere nicht wie in Figur 8 die innere sonderen zu studieren, kann man zurückgehen auf Figur 23 Seite 62. Ist dort Q Pol von q, so sind auf jeder durch Q gehenden Sekante r vier harmonische Punkte: P, Q und die Kurvenschnittpunkte auf r. Werden in den beiden letzteren Punkten die Kurventangenten gezogen, so müssen dieselben einander in einem auf q liegenden Punkte R schneiden, also bilden sie mit RP und RQ die Verbindungsgeraden von R nach vier harmonischen Punkten, d. h. sie sind vier harmonische Strahlen. Für die Hyperbel wird nun R zum Mittelpunkt, r zur unendlich fernen Geraden, also p und q zu zwei konjugierten Strahlen des Mittelpunktes, d. h. zu zwei konjugierten Durchmessern; und die Tangenten von R werden zu den Asymptoten: sie trennen harmonisch je zwei konjugierte Strahlen durch R.

2) Zum gleichen Ziele gelangt man, indem man die der Figur 34 analoge Figur 37 als unmittelbares Ergebnis der Fig. 8 entstehen läßt. Wird nämlich Fig. 8 in der Weise entworfen, daß man als Kurve eine Hyperbel und als p die unendlich ferne Gerade wählt, so muß Punkt P der Kurvenmittelpunkt M werden, also alle Geraden durch M zu Durchmessern. Nun wird in Figur 8 (und 37) wegen des Sehnenvierecks ABCD nicht nur die Gerade p die Polare zu P, sondern auch die Gerade P II die Polare zu Punkt I, also die Punkte I, II harmonisch zu VII und VIII, und folglich die Strahlen P I, P II konjugierte Strahlen harmonisch zu x und y. In Figur 37 ist daher auch der Durchmesser M I konjugiert zum Durchmesser M II, und beide harmonisch zu den Asymptoten x und y.

3) Hiernach müssen auf jeder beliebigen Sekante oder Tangente der Hyperbel vier harmonische Punkte

Strecke der Punkte AC und BD treffen, sondern deren äußeren Raum, d. h. A und B fallen auf den einen, C und D auf den anderen Kurvenast. Alle Punkte von p fallen ins Unendliche, die Geraden nach diesen Punkten müssen parallel werden, und zwar bleibt in Figur 37, ebenso wie in Figur 8: I der Schnittpunkt der Sekanten AB // CD, II der Schnittpunkt der Sekanten AD // BC, III der Schnittpunkt der parallelen Tangenten in A und C, IV der Schnittpunkt der parallelen Tangenten in B und D, V der Schnittpunkt von e und p, VI der Schnittpunkt von f und p, VII der Berührungspunkt der Tangente x aus P an die Kurve, nämlich der eine Schnittpunkt von p mit der Kurve, VIII der Berührungspunkt der Tangente y aus P an die Kurve, nämlich der andere Schnittpunkt von p mit der Kurve. — Über die Auffassung eines Parallelogramms als Viereck vgl. Aufgabe 150 und Figur 90 des I. Teiles, sowie Aufgabe 48 und Figur 87 des II. Teiles dieses Lehrbuches.

Erkl. 158. Wenn man sich mehrere Paare konjugierter Durchmesser einer Hyperbel gezogen denkt, also p, q; p', q'; p'', q'', so ist jedes dieser Paare harmonisch getrennt durch die Asymptoten x und y. Folgen also einander die Durchmesser p, p', p'' in der Drehungsrichtung gegen x hin, so folgen einander auch q, q', q'' in der Drehungsrichtung gegen x hin, also entgegengesetzt dem vorigen Drehungssinne. Und wenn ein p''' ganz in x einrückt, so fällt auch das zugehörige q''' ganz in dieselbe Asymptote hinein. Rückt aber etwa p von x ab gegen y hin, so dreht sich auch q bezw. der Scheitelstrahl von q in entgegengesetzter Richtung von x ab, und von der anderen Seite her gegen y hin; und wenn p ganz in y hineinfällt, so fällt gleichzeitig q mit y zusammen. Demnach ist nicht etwa die eine Asymptote der anderen konjugiert, sondern jede Asymptote ist ein sich selbst konjugierter Durchmesser.

erzeugt werden durch ihren Schnitt mit den Asymptoten und irgend zwei beliebigen konjugierten Durchmessern. Und die Beziehung gewinnt besondere Bedeutung, wenn der eine dieser beiden konjugierten Durchmesser durch den Mittelpunkt der Sehne bezw. durch den Berührungspunkt der Tangente hindurchgeht (Fig. 38). Denn dann ist der andere, nämlich der konjugierte Durchmesser parallel zu dieser Sehne bezw. Tangente, er trifft sie im Unendlichen, und folglich wird durch den zugeordneten vierten harmonischen Punkt die Strecke zwischen den beiden andern Punkten halbiert. Daher haben die Asymptotenschnittpunkte auf jeder Tangente oder Sekante der Hyperbel beiderseits gleichen Abstand vom Berührungspunkte der Tangente bzw. vom Mittelpunkte der Sehne.

4) Beiderseits dieses Sehnenmittelpunktes liegen aber auch schon die gleichen Sehnenhälften bis zu den Kurvenschnittpunkten, folglich müssen auch die auf der Sekante zwischen den Kurvenschnittpunkten und den Asymptotenschnittpunkten eingeschlossene Strecken gleiche Länge haben.

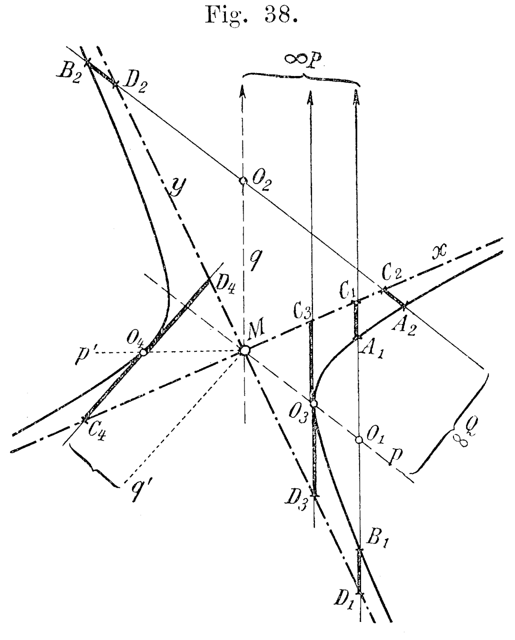
5) Als Ergebnis der Antworten 44 und 45 enhält man daher:

Satz 18. Je zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel liegen harmonisch getrennt durch die Asymptoten: der eine (schneidende) im Innenwinkel, der andere (nichtschneidende) im Außenwinkel derselben.

Satz 19. Auf jeder Hyperbeltangente ist der Berührungspunkt der Mittelpunkt zwischen ihren Asymptotenschnittpunkten. Auf jeder Hyperbelsekante entstehen gleichgroße Strecken zwischen ihren Schnittpunkten mit der Kurve und den Asymptoten.

Erkl. 159. In den Antworten 19, 21, 23, 24 des II. Teiles dieses Lehrbuches sind eine Reihe von Maßbeziehungen aufgestellt, welche für je vier harmonische Strahlen gelten. Man kann daher alle jene Ableitungen in Anwendung bringen für die Beziehung zwischen den Asymptoten und jeglichem Paare konjugierter Durchmesser der Hyperbel. Dabei kommen besonders die Formeln in Betracht, welche für die Halbierungsstrahlen des Winkels der Asymptoten gelten, weil diesen Geraden, wie sich in der Folge zeigen wird, eine besonders wichtige Bedeutung für die Kurve zukommt.

Fig. 38.



Erkl. 160. In Fig. 38 ist p q (bezw. p′ q′) ein Paar konjugierter Durchmesser, also p Polare des unendlich fernen Punktes P auf q, und q Polare des unendlich fernen Punktes Q auf p; p halbiert (in O_1) die zu q parallele Sekante $A_1 B_1$ und geht durch den Berührungspunkt O_3 der zu q parallelen Tangente $C_3 D_3$; q halbiert in O_2 die zu p parallele Sekante $A_2 B_2$. Da p q x y vier harmonische Geraden sind, so schneiden sie auch als Schnittpunkte vier harmonische Punkte aus, nämlich auf $A_1 B_1$ die vier Punkte $C_1 D_1 O_1 P\infty$, auf $A_2 B_2$ die vier Punkte $C_2 D_2 O_2 Q\infty$, auf der Tangente $C_3 D_3$ die vier Punkte $C_3 D_3 O_3 P\infty$. Unter diesen vier Punkten ist aber immer einer unendlich fern, folglich ist diesem zugeordnet der Mittelpunkt der beiden anderen, d. h. $O_1 C_1 = O_1 D_1$, $O_2 C_2 = O_2 D_2$, $O_3 C_3 = O_3 D_3$. Und diese Überlegung gilt vollständig gleichartig, ob die Sekante nur den einen Kurvenast trifft oder beide Kurvenäste. Im ersten Falle liegt der Sehnenmittelpunkt im Innenwinkel der Asymptoten und innerhalb der Kurve, im zweiten Falle liegt der Sehnenmittelpunkt im Außenwinkel der Asymptoten und außerhalb der Kurve. Für Tangenten ist nur der erstere Fall möglich, da bei ihnen Berührungspunkt und Mittelpunkt zusammenfallen muß, also $C_3 O_3 = D_3 O_3$, $C_4 O_4 = D_4 O_4$.

Erkl. 161. Denkt man sich in Figur 38 nicht zuerst p und q gezogen, sondern beginnt mit der Sekante A B, so ist sicher der durch ihren Mittelpunkt O gehende Durchmesser derjenige, dessen konjugierter zu A B parallel werden, also A B im Unendlichen treffen muß. Aus solcher Überlegung findet man ohne Zeichnung des konjugierten Durchmessers, daß O nicht nur Mittelpunkt von A und B, sondern auch von C und D sein muss. — Ist dies festgestellt, so kann das Ergebnis des vierten Teils obenstehender Antwort auch durch Additions- bezw. Subtraktions-Rechnung unmittelbar dargestellt werden wie folgt:

$$\begin{array}{c} O_1 C_1 = O_1 D_1 \\ O_1 A_1 = O_1 B_1 \\ \hline O_1 C_1 - O_1 A_1 = O_1 D_1 - O_1 B_1 \\ A_1 C_1 \quad = \quad B_1 D_1 \end{array} \quad \text{bezw.} \quad \begin{array}{c} O_1 C_1 = O_1 D_1 \\ O_1 B_1 = O_1 A_1 \\ \hline O_1 C_1 + O_1 B_1 = O_1 D_1 + O_1 A_1 \\ B_1 C_1 \quad = \quad A_1 D_1 \end{array}$$

Mit entgegengesetzten Vorzeichen entsteht ebenso auf $A_2 B_2$:

$$\begin{array}{c} O_2 A_2 = O_2 B_2 \\ O_2 C_2 = O_2 D_2 \\ \hline O_2 A_2 - O_2 C_2 = O_2 B_2 - O_2 D_2 \\ A_2 C_2 = B_2 D_2 \end{array} \quad \text{bezw.} \quad \begin{array}{c} O_2 A_2 = O_2 B_2 \\ O_2 D_2 = O_2 C_2 \\ \hline O_2 A_2 + O_2 D_2 = O_2 B_2 + O_2 C_2 \\ A_2 D_2 = B_2 C_2 \end{array}$$

Erkl. 162. Der erste Teil des Satzes 19 war schon gefunden worden auf Grund metrischer Beziehungen zwischen den auf den Asymptoten liegenden projektivisch verwandten Punktreihen im Satze 22 des II. Teiles dieses Lehrbuches. Dazu bildet nun der zweite Teil des vorstehenden Satzes 19 die Ergänzung. Beides ist aber an der vorliegenden Stelle nicht durch Rechnung gefunden worden, sondern nur durch rein projektivische Betrachtung, wobei die einzige Anlehnung an die Maßgeometrie darin beruht, daß der einem unendlich fern liegenden Punkte zugeordnete vierte harmonische Punkt als Mittelpunkt der beiden anderen zugeordneten Punkte bezeichnet wird. Ebenso wie im zweiten Teile dieses Lehrbuches aus den Maßbeziehungen der Asymptoten sonstige metrische Eigenschaften der Hyperbel abgeleitet werden, z. B. die Gleichung der Hyperbel in der Behandlungsweise der analytischen Geometrie, können also an der vorliegenden Stelle Untersuchungen gleicher Art angeknüpft und Verbindungswege zwischen den verschiedenen Auffassungsarten der Kurve zweiten Grades hergestellt werden. Endlich kann auch der zweite Teil des Satzes 19 geradeso wie der erste dazu benutzt werden, um maßgeometrische Konstruktionsmethoden der Hyperbel abzuleiten. Vergleiche die Aufgaben 106, 109, 113, 114 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

* *
*

d) Axen der Kurven.

Frage 46. Kann die schiefe Symmetrie der Kurven zu ihren Durchmessern auch zur senkrechten Symmetrie werden?

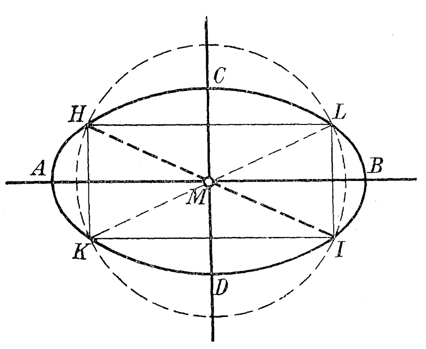
Erkl. 163. Nach Erkl. 145 durchläuft der Peripheriewinkel ABC (Fig. 33 und 34) beim Umlauf des Punktes B durch den Kurvenbogen AC lauter verschiedene Werte. Es fragt sich also, ob etwa unter allen diesen auch einmal ein rechter Winkel ist. Dieser wird dann die senkrechten konjugierten Durchmesser oder Axen liefern. Es fragt sich dann weiter, ob etwa jeder verschieden gewählte Durchmesser zum gleichen Paar von Axen führt, oder ob durch Ausgehen von verschiedenen Durchmessern verschiedene Axenpaare entstehen könnten. Letztere Frage ist aber bereits erledigt durch den Nachweis in Erkl. 149, daß bei dem genannten Umlauf des Punktes B durch den Kurvenbogen AC alle an

Antwort. 1) Nach Satz 16 besteht die schiefe Symmetrie der Kurven zweiten Grades darin, daß jeder von zwei konjugierten Durchmessern die zum anderen parallelen Sehnen halbiert. Wenn sich also zwei konjugierte Durchmesser finden lassen, welche aufeinander senkrecht stehen, so ist jeder die Mittelsenkrechte der zum anderen parallelen Kurvensehnen, und man hat den Fall der axialen Symmetrie im engeren Sinne. Nun ist nach Antwort 2 der Frage 43 bezw. Satz 17 jedesmal ein Neigungswinkel zweier konjugierten Durchmesser angegeben durch den Winkel zweier Kurvensehnen, welche von einem beliebigen Punkte der Kurvenperipherie nach den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers



der Kurve überhaupt vorhandenen Winkelgrößen zwischen Durchmesser und Tangente auftreten müssen. Wenn also Durchmesser und Tangente in irgend welchen Kurvenpunkten senkrecht sind, so muß jede verschiedene Konstruktion zu denselben Kurvenpunkten führen, also jedesmal dieselben Axen liefern, vorausgesetzt bloß, daß nicht überhaupt verschiedene Axenpaare vorhanden wären.

Figur 39.



Erkl. 164. Sobald das Gebiet der reinen projektivischen Geometrie verlassen wird, stellen sich maßgeometrische Betrachtungsweisen ein. So ist schon die Frage nach der Symmetrie der Kurven, insbesondere nach der axigen Symmetrie mit senkrechtem Entsprechen gleichgroßer Strecken und Winkel eine metrische Auffassungsweise. Es kann daher nicht überraschen, daß hier behufs Auffindung der rechtwinkligen Axen auch der Satz vom rechten Peripheriewinkel des Kreises herangezogen wird, um die Axen der Kurve zu finden. In Figur 39 ist bei der Ellipse und in Figur 40 bei der Hyperbel der Durchmesser HJ beliebig angenommen bezw. als beliebiger Durchmesser aufgesucht. Der Halbkreis über HJ trifft die Kurve noch in K einerseits HJ bezw. in L andererseits HJ, folglich sind HKJ bezw. HLJ rechte Winkel, und daher sind die zu HL bezw. LJ parallelen Durchmesser AB und CD senkrechte konjugierte Durchmesser.

Erkl. 165. Daß dieselben beiden senkrechten konjugierten Durchmesser führen. Man muß also einen Punkt der Kurvenperipherie suchen, aus welchem ein beliebig ausgewählter Kurvendurchmesser unter rechtem Winkel gesehen wird: dann hat man die Richtungen zweier senkrechten konjugierten Durchmesser.

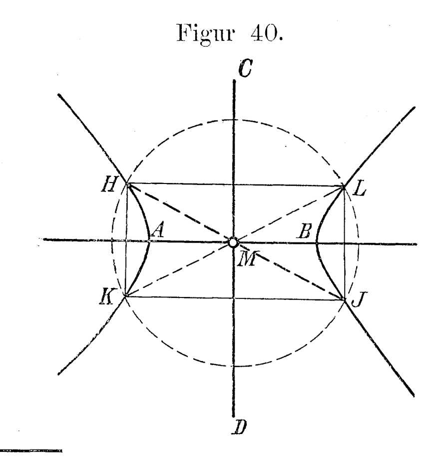
2) Nach bekannten planimetrischen Beziehungen am Kreise liegen aber alle Punkte, aus welchen eine gegebene Strecke unter rechtem Winkel gesehen wird, auf einem Halbkreise über dieser Strecke als Durchmesser (Fig. 39, 40). Konstruiert man also über der Verbindungsstrecke der Schnittpunkte eines beliebigen Kurvendurchmessers einen Halbkreis, stellt dessen Schnittpunkt mit der Kurve fest und verbindet denselben mit den Endpunkten des Durchmessers, so hat man ein der Kurve eingeschriebenes Rechteck. Die Mittelparallelen dieses Rechtecks sind zwei senkrechte konjugierte Durchmesser: man nennt sie die Axen der Kurve; und da sie die Eigenschaften der konjugierten Durchmesser haben müssen, so wird die Ellipse von beiden getroffen, die Hyperbel nur von dem einen derselben.

3) Bei der Parabel erscheint anstelle der schiefen Symmetrie in bezug auf einen Durchmesser und seinen konjugierten dieselbe Beziehung inbezug auf einen Durchmesser und die Richtung der Tangente in seinem Kurvenschnittpunkt. Da nun bei der Parabel alle Durchmesser parallel sind, so tritt bei der Parabel die eigentliche axige, d. h. die senkrechte Symmetrie zu demjenigen der vielen Durchmesser als Axe ein, welcher die zur Richtung aller Durchmesser senkrechte Parabeltangente im Berührungspunkte trifft. (Vgl. Fig. 32.) Ein solcher Kurvenpunkt, in welchem Durchmesser und Tangente

AB und CD auch bei der Wahl eines anderen Durchmessers als HJ entstehen müssen, erkennt man an den Figuren 39 und 40 ohne weiteres daraus, daß man etwa den Punkt H längs der Kurve sich verschieben läßt. Jedesmal läßt sich zu denselben konjugierten Durchmessern AB und CD als Mittelparallelen ein eingeschriebenes Parallelogramm, d. h. ein Sehnenrechteck konstruieren, also würde auch umgekehrt aus jedem dieser Sehnenrechtecke dasselbe Axenpaar AB und CD entstehen. — Daß sowohl bei Ellipse als bei Hyperbel keine anderen Axenpaare als AB und CD möglich sind, geht aus der folgenden Betrachtung über den Kreis hervor.

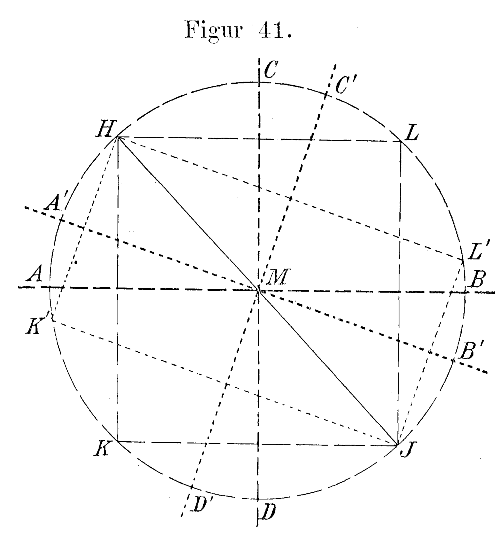
aufeinander senkrecht stehen, hat also auch bei jeder Kurve eine besondere Wichtigkeit: er heißt ein Scheitel der Kurve.

Figur 40.



Frage 47. Welche besonderen Eigenschaften zeigt der Kreis in Hinsicht der Axen?

Figur 41.



Erkl. 166. Die Erzeugungsweisen des Kreises als Kurve zweiten Grades sind ausführlich erörtert im Abschnitt 4b des zweiten Teiles dieses Lehrbuches. Und nach der Zusammenfassung in Satz 20 daselbst entsteht der Kreis als Punktkurve unbedingt durch zwei gleichlaufende kongruente Strahlenbüschel, als Tangentenkurve unter der Bedingung,

Antwort. 1) Beim Kreise ist nach dessen planimetrischen Eigenschaften jeder Durchmesser eine Axe axiger Symmetrie, also jedes konjugierte Durchmesserpaar senkrecht, und in jedem Kurvenpunkte Durchmesser und Tangente senkrecht zueinander. Und daß der Kreis zu den Kurven zweiten Grades der projektivischen Geometrie gehört, ist durch dessen Erzeugung sowohl aus projektivisch verwandten Punktreihen, als auch besonders aus projektivisch verwandten Strahlenbüscheln nachgewiesen.

2) Um zu untersuchen, ob auch eine andere von den Kurven zweiten Grades außer dem Kreise ähnliche Axeneigenschaften haben kann, denke man sich in Figur 41 eine Kurve mit zwei Paar senkrechten konjugierten Durchmesserrichtungen $AB \perp CD$ und $A'B' \perp C'D'$. Dann müssen sich zu einem beliebig ausgewählten Kurvenpunkt H dieser Kurve folgende Elemente ergeben: erstens wegen des Durchmessers HM der Kurvenpunkt J im gleichen Abstand von M, also $HM = MJ$; —

daß die erzeugenden Punktreihen sich in bestimmter Lage zueinander befinden. Auch als *Kegelschnitt* steht der Kreis unter den Kurven zweiten Grades, denn nach dem Satze in Erklärung 184 bezw. Erklärung 412a des II. Teils kann *jede* Kurve zweiten Grades und *jeder* Kreis durch Projektion in einander übergeführt werden, meist sogar auf beliebig vielfache Weise.

Erkl. 167. Von den Durchmessern AB und CD in Figuren 39 und 40 hat AB bei *beiden* Kurven bestimmte Länge, CD nur bei der Ellipse, weil die Hyperbel von diesem Durchmesser CD nicht getroffen wird. In Figur 41 aber sind die Durchmesser AB und CD und ebenso A′B′ und C′D′ zunächst nicht der Länge nach, sondern nur der *Richtung* nach gegeben, und daher sind ABCD A′B′C′D′ nicht als gegebene Kurvenpunkte aufzufassen. Deshalb ist auch nebenstehend immer nur von Durchmesser*richtungen* gesprochen. — Wenn Winkel AMC in Figur 41 ein rechter ist, und A′M im Winkel AMC liegt, so muß die zu MA′ senkrechte Richtung MC′ unbedingt in den Nebenwinkel von AMC fallen. Hieraus erkennt man, daß die konjugierten Durchmesserpaare des *Kreises* in getrennten Winkelräumen zueinander liegen, und nicht, wie bei der *Hyperbel*, in gleichen Winkelräumen, — eine Bestätigung dafür, daß der Kreis wirklich als besonderer Fall einer *Ellipse* aufgefaßt werden muß.

Erkl. 168. Die mehrfache Symmetrie ist auch Gegenstand der planimetrischen Untersuchung im III. Teile des dieser Encyklopädie angehörenden Lehrbuches der Planimetrie. Dort besagen die Ergebnisse der Frage 212: Wenn eine Figur m Axen senkrechter Symmetrie besitzt, so müssen diese gleichgroße Winkel um ihren gemeinsamen Schnittpunkt bilden; und durch Umdrehung um den Mittelpunkt um $360^0 : m$ kommt die Figur mit sich selbst zur Deckung. In der Tat müßten die zwei Axenpaare AB, CD und A′B′, C′D′ in Figur 41, — wenn sie die einzigen Axen der Figur sein sollten, unter gleichen Winkeln von 45^0 gegeneinander stehen; und die Figur müßte acht kongruente Bogenstücke haben, die durch Drehungen um je 90^0 zur Deckung gelangten. Der Kreis hat aber beliebig viele Axen und gelangt bei beliebiger Drehung mit sich selbst zur Deckung.

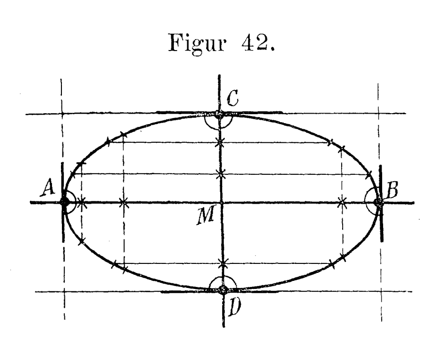
zweitens wegen des einen Paares konjugierter Durchmesserrichtungen $AB \perp CD$ das Sehnenparallelogramm HJKL, indem HL//AB//JK und HK//CD//JL; — drittens wegen des anderen Paares konjugierter Durchmesserrichtungen $A'B' \perp C'D'$ das Sehnenparallelogramm HJK′L′, indem HL′ // A′B′ // JK′ und HK′//C′D′//JL′. Es entstehen also die Kurvenpunkte H, J, K, L, K′, L′ — und planimetrischen Eigenschaften nach liegen diese alle auf dem Kreise um M mit Radius MH.

3) Durch fünf Kurvenpunkte ist aber eine Kurve zweiten Grades eindeutig bestimmt; folglich ist eben der Kreis um M die einzige Kurve zweiten Grades durch H, welche die *beiden Paare* senkrechter konjugierter Durchmesserrichtungen haben könnte. Und hieraus geht hervor, daß keine Kurve außer dem Kreise mehr als *ein Paar* senkrechter konjugierter Durchmesser haben kann. Daher sind AB und CD in den Figuren 39 und 40 tatsächlich die *einzigen* Axenpaare jener Kurve, und man erhält den Satz:

Satz 20. Sobald mehr als *ein Paar* konjugierter Durchmesserrichtungen einer Kurve *senkrecht* sind, so sind *sämtliche Paare* ihrer konjugierten Durchmesser *senkrecht*, und die Kurve ist ein **Kreis.**

Frage 48. Welches sind auf Grund der beiden vorigen Antworten die Symmetrie-Eigenschaften der drei Kurvengattungen?

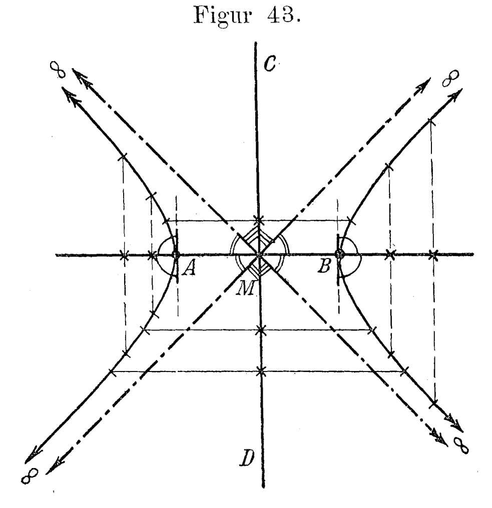
Figur 42.



Erkl. 169. Auf dem Standpunkte der projektivischen Geometrie, welche die Strahlenbüschel zweiter Klasse als Umhüllungsfiguren der Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte zweier in schiefer Lage befindlichen projektivisch verwandten Punktreihen erklärt, und die Punktreihe zweiter Ordnung als Gesamtheit der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier in schiefer Lage befindlichen projektivisch verwandten Strahlenbüschel, — scheint zunächst keinerlei Erwartung zu bestehen auf so enge Zuordnung innerhalb der Kurvenelemente, wie die symmetrische Lage nachträglich erkennen läßt. Derartige Beziehungen liegen wohl von vornherein zu Grunde bei den planimetrischen Erzeugungsweisen der Kurven als „geometrischer Örter" — und man könnte denken, daß der Nachweis solcher Beziehungen aus der projektivischen Erzeugungsweise ganz besonderen Schwierigkeiten begegnen müßte. Um so überraschender wirkt die Tatsache, daß auch die rein metrischen Eigenschaften der Kurve sich ganz von selbst ergeben durch einfache Anwendung des Gesichtspunktes der Polarität auf die unendlich fernen Elemente der Kurve.

Antwort. 1) Aus den beiden vorigen Antworten ergeben sich folgende Eigenschaften:

Figur 43.

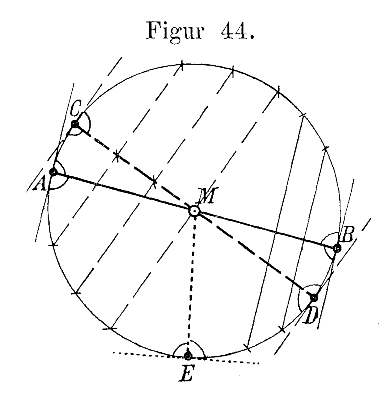


Satz 21. Die Kurven zweiten Grades sind symmetrische Figuren: Ellipse und Hyperbel sind axig symmetrisch zu zwei zueinander senkrechten konjugierten Durchmessern als Axen und zentrisch symmetrisch zum Kurvenmittelpunkt, die Parabel ist axig symmetrisch zu einem ihrer Durchmesser als Axe.

2) Die Ellipse hat also zwei Axen und vier Scheitelpunkte, der Kreis hat unendlich viele Axen und unendlich viele Scheitelpunkte, die Hyperbel hat zwei Axen, eine schneidende Hauptaxe und eine nichtschneidende Nebenaxe, — und zwei Scheitelpunkte.

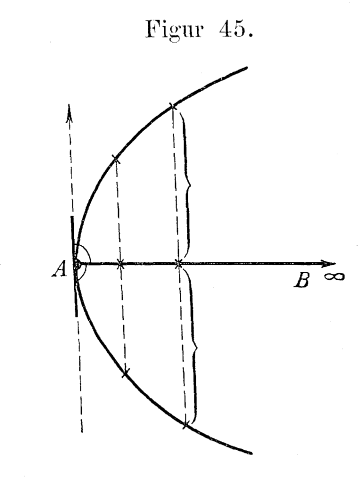
Ellipse und Hyperbel gelangen auch durch Umdrehung um 180° mit sich selbst zur Deckung. Die Parabel hat eine Axe und einen Scheitelpunkt: sie gelangt nur durch Umklappung um die Axe, aber nicht durch Umdrehung mit sich selbst zur Deckung.

Figur 44.



3) Bei der Ellipse wird die längere der beiden Axen die Hauptaxe genannt, die kürzere die Nebenaxe. — Bei der Hyperbel sind die beiden Axen der Symmetrie wegen die Halbierungsgeraden des Asymptotenwinkels, nämlich die Hauptaxe des Innenwinkels, die Nebenaxe des Außenwinkels der Asymptoten.

Figur 45.



Erkl. 170. Die ersten Erscheinungen von Eigenschaften der Symmetrie waren die Beziehungen zu den Durchmessern. Dort war wohl an beiden Endpunkten jedes Durchmessers gleicher Winkel zwischen Durchmesser und parallelen Tangenten, aber schon die Tangenten an beiden Endpunkten einer vom konjugierten Durchmesser halbierten Parallelsehne schneiden zwar einander auf dem konjugierten Durchmesser, bilden aber ungleiche Winkel sowohl mit den Halbsehnen als mit den zugehörigen Durchmessern. Das wird anders bei der senkrechten Symmetrie in Bezug auf die Axen. Eine Sehne senkrecht AB (Figuren 42 bis 45) liefert nicht nur gleiche Sekantenhälften (Halbsehnen) beiderseits AB, sondern auch die Tangenten in ihren Endpunkten haben beiderseits gleiche Winkel mit der Sehne, mit den zugehörigen Durchmessern, mit den Parallelsehnen zu AB, und sie schneiden einander auf der Axe. Aber nicht nur die der Kurve unmittelbar angehörigen Elemente sind symmetrisch, sondern auch die dem ganzen Gebilde zweiten Grades angehörenden Gebilde ersten Grades: Auf zwei Trägertangenten, welche vom gleichen Punkt einer Axe ausgehen, entstehen durch symmetrisch liegende Kurventangenten kongruente Punktreihen, in den Kurvenpunkten der vorgenannten zu einer Axe senkrechten Sehne entstehen durch Verbindung mit allen Kurvenpunkten symmetrisch liegende kongruente Büschel. Sowohl Punktreihen als Strahlenbüschel der eben genannten Art gelangen durch Umklappung um die Axe zur Deckung, also sind die Büschel gegenwendig kongruent. Es sind aber nicht etwa kongruent liegende Elemente dieser Punktreihen oder Strahlenbüschel auch projektivisch zugeordnet; dies erkennt man sofort daraus, daß kongruente Punktreihen nur immer eine Parabel erzeugen, kongruente Strahlenbüschel bei gleicher Umlaufsrichtung einen Kreis, bei entgegengesetzter nur die gleichseitige Hyperbel, während Ellipse und Parabel oder Hyperbel mit Scheiteln auf gleichem Aste überhaupt nur durch gleichwendige Büschel erzeugt werden können.

Erkl. 171. Die Eigenschaften der einzelnen Durchmesser der Kurve bedingen die Beziehungen der sog. zentrischen Symmetrie bei den durch Umdrehung von 180^0 zur Deckung gelangenden Figuren, welche in Abschnitt B 3

des dritten Teiles der Planimetrie behandelt sind; die Eigenschaften der konjugierten Durchmesser bringen eine Steigerung dieses Symmetrieverhältnisses durch das Auftreten einer eigentümlichen schiefen Symmetrie; und die Lagebeziehungen zu den Axen bedingen die sog. axige Symmetrie bei den durch Umklappung zur Deckung gelangenden Figuren, welche im Abschnitt B 2 des dritten Teiles der Planimetrie behandelt wird. An der schon in Erkl. 168 angezogenen Stelle desselben Lehrbuches ist nachgewiesen, 1) daß wenn überhaupt zwei und nur zwei Symmetrieaxen vorhanden sind, dann diese senkrecht zu einander stehen müssen, und die Figur zugleich zentrisch symmetrisch sein muß; und 2) daß wenn die Figur zentrisch symmetrisch ist und zugleich axig symmetrisch zu einer Axe, dann noch eine zweite zur ersten senkrecht stehende Symmetrie-Axe vorhanden sein muß. Die Ergebnisse der vorstehenden Überlegungen entsprechen vollkommen diesen Ausführungen: Ellipse und Hyperbel weisen die ebengenannten Eigenschaften in einfachem Zusammentreffen auf, der Kreis dieselben in beliebig vielfachem Auftreten, die Parabel dagegen, welche keine zentrische Durchmessersymmetrie besitzt, hat zur ersten Axe keine zweite, und da sie umgekehrt keine zweite Axe besitzt, kann sie auch nicht zentrisch symmetrisch sein.

Erkl. 172. Die beiden Axen der Ellipse (Figur 42) schneiden beide die Kurve, und jeder Schnittpunkt ist ein Scheitel, d. h. ein Punkt in welchem Tangente und Durchmesser senkrecht stehen. Außer diesen vier Punkten A, B, C, D besitzt aber die Ellipse keine Punkte, wo Tangente und Durchmesser senkrecht stehen. Von den Durchmessern des Kreises in Figur 44 ist jeder eine Axe der Kurve, jeder schneidet die Kurve in zwei Scheiteln: beim Kreise stehen in jedem Kurvenpunkte Tangente und Durchmesser senkrecht aufeinander, jeder Kurvenpunkt des Kreises ist ein Kurvenscheitel. Bei der Hyperbel (Figur 43) trifft nur die Axe AB die Kurve, die andere Axe als konjugierter Durchmesser zu einem schneidenden Durchmesser kann die Kurve nicht treffen. Daher hat auch die Hyperbel nur zwei Axen-Schnittpunkte, und außer in den Punkten A und B stehen nirgends Tangente und Durchmesser senkrecht zu einander. Bei der Parabel trifft dasselbe nur in dem einzigen Punkte A zu, in welchem die Kurve von derjenigen Tangente berührt wird, die auf der allgemeinen Durchmesserrichtung senkrecht steht. — Da die schneidende Axe der Hyperbel offenbar nähere Beziehungen zur Kurve hat als die nichtschneidende, so ist es von vornherein begreiflich, daß sie die Hauptaxe (wie auch ihr Winkelraum der Innenwinkel der Asymptoten), die andere die Nebenaxe heißt (ihr Winkelraum der Außenwinkel der Asymptoten). Dazu kommt aber für die Hyberbel noch der weitere Grund, der auch bei der Ellipse die längere Axe als Hauptaxe gegenüber der kürzeren als Nebenaxe auszeichnet, daß nämlich auf der als Hauptaxe bezeichneten Axe dieser Kurven noch die beiden ausgezeichneten Punkte liegen, welche auf Grund späterer Untersuchungen als Brennpunkte der Kurve erkannt werden. — Es mag hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß der im Abschnitt 3 e dieses Teiles geführte grundlegende Hauptbeweis für die metrischen Eigenschaften der Brennpunkte vom Studierenden auch voraus genommen werden kann, und schon an dieser vorliegenden Stelle mit Verständnis gelesen werden kann.

3. Über die involutorischen Gebilde.

a) Involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel.

Frage 49. Was versteht man unter involutorischen Gebilden überhaupt?

Antwort. Unter einem involutorischen Gebilde versteht man ein auf gemeinsamem Träger zusammengelegtes Paar zweier projektivisch verwandten Gebilde, die in der besonderen gegenseitigen Lagebeziehung sich befinden, daß einem bestimmten Elemente dieses Trägers dasselbe zweite Element des Trägers zugeordnet ist, einerlei ob man das erste Element als zum einen oder zum anderen Gebilde zugehörig auffaßt. Man spricht daher statt von zweierlei Gebilden in involutorischer Lagebeziehung auf gemeinsamem Träger auch einfacher nur von einem Gebilde auf diesem Träger, dessen Elemente unter sich in der ebengenannten Weise zugeordnet oder involutorisch gepaart seien.

Diese Art der Zuordnung der beiden Gebilde bezw. innerhalb des einen Gebildes nennt man Involution oder kurzweg auch nur Paarung, auch wohl Spiegelung.

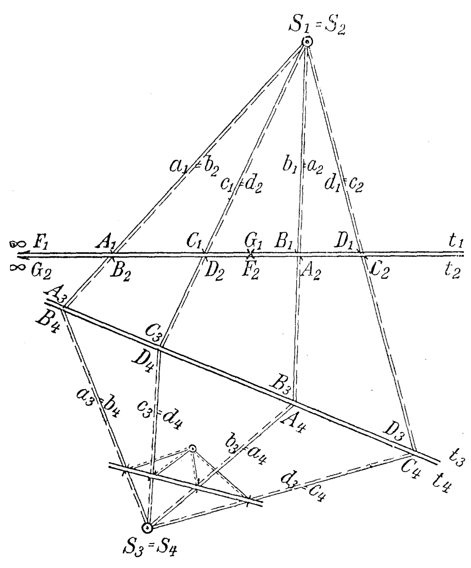
Die Involution besteht demnach eigentlich nur unter gleichartigen Gebilden, doch nennt man auch ungleichartige Gebilde dann involutorisch verwandt, wenn das eine von ihnen zu einem mit dem anderen gleichartigen und mit jenem involutorisch verwandten Gebilde sich in perspektivischer Lage befindet bezw. in diese Lage gebracht werden kann.

Erkl. 173. Projektivische Gebilde können auf gemeinsamem Träger sehr verschieden liegen; dabei muß jedes Element des Trägers doppelt aufgefaßt werden: einmal als Element des ersten Gebildes, dann als Element des zweiten Gebildes; und zwar wird infolge der projektivischen Verwandtschaft einem bestimmten Element, aufgefaßt als Element des einen Gebildes, zugeordnet ein bestimmtes zweites Element des gemeinsamen Trägers, aufgefaßt als Element des anderen Gebildes. Wird dann letzteres Element auch wieder als Element des einen Gebildes aufgefaßt, so wird ihm im allgemeinen stets zugeordnet sein ein drittes Element des gemeinsamen Trägers als Element des anderen Gebildes. Und nur wenn dieser zweite Schritt in der verwandtschaftlichen Zuordnung nicht zu einem dritten Element des gemeinsamen Trägers, sondern jedesmal wieder zum gleichen ersten Element desselben zurückführt, — dann hat man die involutorische Beziehung.

Erkl. 174. In der allgemeinen Auffassung besteht die involutorische Beziehung zwischen Gebilden jeder Art: Punktreihe und Punktreihe, Strahlenbüschel und Strahlenbüschel, Punktreihe und Strahlenbüschel, Ebenenbüschel und Ebenenbüschel, Ebenenbüschel und Punktreihe, Ebenenbüschel und Strahlenbüschel, zwei ebenen Systemen, zwei Strahlenbündeln, einem ebenen System und einem Strahlenbündel. Von besonderer Bedeutung werden aber nur die beiden ersten Fälle, auf welche, wie bei der allgemeinen Projektivität selber, auch alle anderen zurückgeführt werden können.

Frage 50. Was versteht man demnach unter einer involutorischen Punktreihe oder einem involutorischen Strahlenbüschel?

Antwort. 1) Unter einer involutorischen Punktreihe versteht man eine Punktreihe t, deren Punkte



Figur 46.

Erkl. 175. In Figur 46 sind t_1 t_2 zwei zusammenfallende Träger der Punktreihen t_1 und t_2; dabei heißen die Punkte $A_1\,C_1\,B_1\,D_1$ der Reihe t_1, wenn sie als Punkte der Reihe t_2 aufgefaßt werden, der Reihe nach $B_2\,D_2\,A_2\,C_2$. Ebenso sind S_1 S_2 zwei zusammenfallende Scheitel der Strahlenbüschel S_1 S_2; und hierbei fallen die Strahlen $a_1\,c_1\,b_1\,d_1$ des Büschels S_1 der Reihe nach zusammen mit den Strahlen $b_2\,d_2\,a_2\,c_2$ des Büschels S_2. — Es sind also $A_1\,A_2$ und $B_2\,B_1$ bezw. $C_1\,C_2$ und $D_2\,D_1$ zusammenfallende Punktpaare der beiden Reihen t_1 und t_2, d. h. $A_1 = B_2$ und $A_2 = B_1$ bezw. $C_1 = D_2$ und $C_2 = D_1$ sind doppeltentsprechende, gepaarte Punkte bezw. involutorisch zugeordnete Punktepaare der involutorischen Punktreihe t. — Ebenso sind $a_1\,a_2$ und $b_2\,b_1$ bezw. $c_1\,c_2$ und $d_2\,d_1$ zusammenfallende Strahlenpaare der beiden Büschel S_1 und S_2, d. h. $a_1 = b_2$ und $a_2 = b_1$ bezw. $c_1 = d_2$ und $c_2 = d_1$ sind doppeltentsprechende, gepaarte Strahlen bezw. involutorisch zugeordnete Strahlenpaare des involutorischen Strahlenbüschels S.

Erkl. 176. An Figur 46 erkennt man auch die Richtigkeit der letzten Aussage nebenstehender Antwort: Es ist

unter sich paarweise derartig zugeordnet sind, daß die Punktreihe aus zwei auf gleichem Träger zusammenfallenden projektivisch verwandten Punktreihen t_1 t_2 mit je zwei einander doppelt entsprechenden Punktpaaren besteht. Sind also A_1 A_2 irgend zwei projektivisch entsp echende Punkte der beiden Reihen t_1 und t_2, so muß, wenn der Punkt A_2 von t_2 in der ersten Reihe t_1 als B_1 bezeichnet wird, auch dessen zugehöriger Punkt B_2 von t_2 wieder mit A_1 von t_1 zusammenfallen; und ebenso muß das Punktepaar C_1 C_2 zusammenfallen mit dem Punktepaar D_2 D_1 u. s. w.

2) Unter einem involutorischen Strahlenbüschel versteht man einen Strahlenbüschel S, dessen Strahlen unter sich paarweise derartig zugeordnet sind, daß der Strahlenbüschel aus zwei mit gleichem Scheitel zusammenfallenden projektivisch verwandten Strahlenbüscheln S_1 S_2 mit je zwei einander doppelt entsprechenden Strahlenpaaren besteht. Sind also a_1 a_2 irgend zwei projektivisch entsprechende Strahlen der beiden Büschel S_1 S_2, so muß, wenn der Strahl a_2 von S_2 im ersten Büschel S_1 als b_1 bezeichnet wird, auch dessen zugehöriger Strahl b_2 von S_2 wieder mit a_1 von S_1 zusammenfallen; und ebenso muß das Strahlenpaar c_1 c_2 zusammenfallen mit dem Strahlenpaar d_2 d_1 u. s. w.

3) Die vorliegende Art der involutorischen Zuordnung der Elemente innerhalb einer Punktreihe oder innerhalb eines Strahlenbüschels wird insbesondere als Punktinvolution bezw. Strahleninvolution, wohl auch als Punktsystem oder Strahlensystem bezeichnet.

4) Da die involutorische Beziehung nichts anderes ist als eine projektivische Verwandtschaft in besonderer Lagebeziehung, und da

$t_{1,2} \barwedge S_{1,2} \barwedge t_{3,4}$, und folglich einzeln $t_1 \barwedge t_3$, $t_2 \barwedge t_4$; da aber $t_1 \barwedge t_2$, so ist auch $t_3 \barwedge t_4$. Sobald aber A_1 und B_2 zusammenfallen, muß auch a_1 und b_2 und folglich auch A_3 und B_4 zusammenfallen. Also sind t_3 und t_4 wieder zwei projektivisch verwandte Punktreihen auf gemeinsamem Träger $t_{3,4}$, und auf diesem Träger findet dieselbe Art des Zusammenfallens statt wie im Strahlenbüschel $S_{1,2}$ bezw. auf dem Träger $t_{1,2}$, folglich ist auch $t_{3,4}$ eine *involutorische Punktreihe*, ebenso wie $t_{1,2}$ eine involutorische Punktreihe bezw. $S_{1,2}$ ein involutorischer Strahlenbüschel ist. — In genau gleicher Weise ergibt die Figur 46, daß auch $S_{3,4}$ wieder ein involutorischer Strahlenbüschel ist, und ebenso jedes zu $S_1 S_2$ projektivische Gebilde ein *involutorisches* wird, ob es nun mit S_{12} in perspektivischer oder in schiefer Lage sich befindet. Es gibt also z. B., wenn S ins Unendliche gelangt, auch *involutorische Parallelstrahlenbüschel*, und wenn t ins Unendliche gelangt, auch *Punktinvolutionen auf der unendlich fernen Geraden*.

sowohl die projektivische Zuordnung als auch selbstverständlich das Zusammenfallen einzelner Elemente bei jeder Projektion erhalten bleibt, so *muß auch aus einem involutorisch gepaarten Gebilde durch jeglicherlei Projektionen immer wieder ein involutorisch gepaartes Gebilde hervorgehen.*

Frage 51. Welche Stellen der bisherigen Untersuchungen dieses Lehrbuches gaben schon früher einen Hinweis auf die *involutorischen Gebilde*?

Antwort. 1) Als Vorbereitung auf die Untersuchung der involutorischen Gebilde hat man anzusehen die Behandlung *projektivischer Gebilde auf gemeinsamem Träger* in den Aufgaben 83 bis 97, den Aufgaben 106 bis 108 sowie 122 bis 124 im ersten Teile dieses Lehrbuches.

2) Ferner ergab sich das Zusammentreffen zweier projektivischen Punktreihen auf gemeinsamem Träger mit *je zwei doppelt entsprechenden Punktpaaren* bei der Konstruktion des *vierten harmonischen Punktes* zu beliebigen Punkten einer Punktreihe und zwei festen Punkten derselben in Antwort der Frage 7 und Figur 7 des zweiten Teiles dieses Lehrbuches. Man vergleiche daselbst Erklärung 25 bis 27 sowie hierunten Antwort 62.

3) Endlich hat sich das Auftreten involutorischer Gebilde auch schon bemerkbar gemacht in den Betrachtungen über die in Bezug auf eine Kurve zweiten Grades *polarzugeordneten Elemente*: vergl.

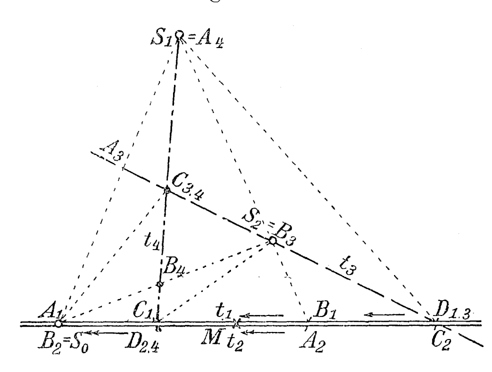
Erkl. 177. Es ist dem Studierenden besonders anzuempfehlen, die in nebenstehender Antwort aufgezählten früheren Stellen sorgfältig nachzulesen, um das Verständnis für die involutorischen Gebilde zu unterstützen. Aus den allgemeinen Betrachtungen in den Aufgaben des ersten Teiles ist als besonders wichtig hierher zu beziehen, daß man beim Zusammenlegen zweier projektivischen Gebilde auf gemeinsamem Träger zu unterscheiden hat, ob der Durchlaufungssinn der beiden Gebilde der gleiche oder der entgegengesetzte wird. Darnach erhält man nach Erkl. 291 des ersten Teiles die *viererlei* Beispiele für projektivisch verwandte {Punktreihen mit gemeinsamem Träger / Strahlenbüschel mit gemeinsamem Scheitel}: I) *gleichlaufend* mit *zwei* bezw. *einem* bezw. *keinem* selbstentsprechenden Doppelelemente; II) *ungleichlaufend* mit stets zwei selbstentsprechenden Doppelelementen.

Erkl. 178. Bei der involutorischen Lage der projektivischen Gebilde auf gemeinsamem Träger wird sich ebenfalls dieser ebengenannte Unterschied vorfinden, und zwar vom ersten der beiden vorigen Fälle nur immer das letzte Beispiel. Betrachtet man daraufhin z. B. die Figur 46, so sieht man, daß die Reihenfolge ACBD in t_1 bezw. S_1 und ACBD in t_2 bezw. S_2 gleichgerichteten Umlauf ergeben, daß also zwischen C_1 und B_1 der dem unendlich fernen Punkt G_2 von t_2 zugeordnete Punkt G_1 von t_1, und ebenso zwischen A_2 und D_2 der dem unendlich fernen Punkt F_1 von t_1 zugeordnete Punkt F_2 von t_2 wird liegen müssen. Und wegen des Zusammenfallens $F_1 = G_2$ muß auch in Figur 46 der Punkt $F_2 = G_1$ werden, da nach der Definition nicht nur die Elementepaare $A_{12} B_{21}$, $C_{12} D_{21}$, sondern auch allgemein jedes Punktepaar, z. B. auch $F_{12} G_{21}$ ein selbstentsprechendes Punktepaar sein soll. Im Strahlenbüschel S_{12} fehlt die besondere Beziehung zum Unendlichen, folglich sind dort $f_{12}\, g_{21}$ zwei selbstentsprechende Strahlen ohne Besonderheit, gerade wie auch $a_{12}\, b_{21}$ oder $c_{12}\, d_{21}$.

Antwort der Frage 22 (S. 36) sowie Figur 14 und 15 des vorliegenden dritten Teiles dieses Lehrbuches. Und dieselbe Auffassungsweise wiederholte sich bei der Untersuchung der in Bezug auf eine Kurve zweiten Grades konjugierten Elemente in Antwort der Frage 34 bezw. Figur 24 und 25 dieses Lehrbuches.

Frage 52. Wie ist das Auftreten der einzelnen doppelt entsprechenden Punktepaare gegenseitig bedingt?

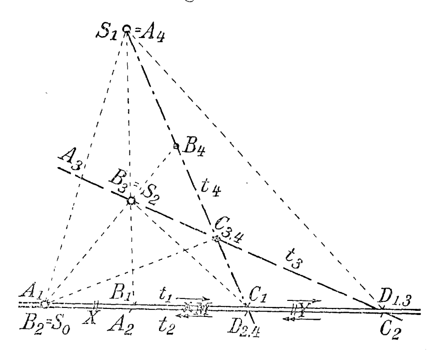
Figur 47.



Erkl. 179. Zur Angabe der Durchlaufungsrichtung eines Gebildes bedarf es der Angabe dreier Elemente, die nacheinander berührt werden sollen. So ist in Figur 47 durch die Reihenfolge $A_1 B_1 C_1$ angegeben, daß die Reihe t_1 durchlaufen werden soll in der Richtung von A_1 nach links ins Unendliche und aus dem Unendlichen von rechts herein über B_1 nach C_1 und zurück nach A_1.

Antwort. 1) Um das Auftreten der doppelt entsprechenden Punktpaare zu untersuchen, nehme man auf dem gemeinsamen Träger

Figur 48.



$t_1\, t_2$ der beiden Punktreihen als beliebig gegeben an: auf t_1 die Punkte $A_1\, B_1\, C_1$ und dazu auf t_2 die Punkte $A_2 = B_1$, $B_2 = A_1$ und einen willkürlichen Punkt C_2, bezeichnet den letzteren in t_1 als D_1 und sucht nun den dazu gehörigen Punkt D_2 in t_2 auf. In Figur 47 liegt das Punktpaar $A_{12}\, B_{21}$ durch $C_1 D_1$ getrennt, in Figur 48 liegt $A_{12}\, B_{21}$

Für t_2 verlangt die entsprechende Reihenfolge $A_2 B_2 C_2$ den Durchlauf in der Richtung von A_2 nach links über B_2 bis ins Unendliche und aus dem Unendlichen von rechts herein über C_2 wieder zurück nach A_2. Man hat also in Figur 47 *gleiche Durchlaufsrichtung* des gemeinsamen Trägers, weil C_1 auf der *Innenstrecke* und C_2 auf der *Außenstrecke* des Punktepaares $A_1 B_1$, $B_2 A_2$ gewählt wurde. Man konnte daher schon vor der Einzeldurchführung nebenstehenden Beweises vorhersagen, daß D_2 auf der den Punkt C_2 *nicht enthaltenden* Strecke $A_2 B_2$, also irgendwo auf der *Innenstrecke* von $A_2 B_2$ sich ergeben müsse; — daß D_2 auch gerade wieder mit C_1 zusammenfallen müsse, ist eben das für die *involutorische* Lage der beiden Reihen t_1 und t_2 charakteristische Ergebnis.

Erkl. 180. In Figur 48 ist durch die Reihenfolge $A_1 B_1 C_1$ angegeben, daß die Punktreihe t_1 durchlaufen werden soll in der Richtung von A_1 nach rechts über B_1 und C_1 ins Unendliche, und aus dem Unendlichen von links her zurück nach A_1. Für t_2 bestimmt die entsprechende Reihenfolge $A_2 B_2 C_2$ die Durchlaufuug in der Richtung von A_2 nach links über B_2 ins Unendliche, und aus dem Unendlichen von rechts herein über C_2 wieder zurück nach A_2. Man hat also in Figur 48 *entgegengesetzte Durchlaufsrichtung* des gemeinsamen Trägers, weil sowohl C_1 als C_2 auf der *Außenstrecke* des Punktpaares $A_1 B_1$, $B_2 A_2$ gewählt wurde. Man kann daher wieder vorhersagen, daß D_2 auf der den Punkt B_2 *nicht enthaltenden* Strecke $A_2 C_2$, also irgendwo auf der *Innenstrecke* von $A_2 C_2$ sich ergeben müsse.

Erkl. 181. Das Ergebnis der nebenstehenden Untersuchung ist noch in einem erweiterten Sinne von Wichtigkeit. Die Definition der involutorischen Gebilde als Erzeugnis zweier Einzelgebilde mit *lauter* doppelt entsprechenden Elementenpaaren läßt nämlich zunächst die Frage offen, ob dies nicht *zuviel* verdurch $C_1 D_1$ *nicht getrennt*. Man hat daher in Figur 47 gleichlaufende, in Figur 48 ungleichlaufende Punktreihen $t_1 t_2$.

2) Um die Aufgabe auf Behandlung von Punktreihen in *getrennten Trägern* zurückzuführen, legt man nun durch den Punkt D_1 eine beliebige Grade als Träger t_3 und projiziert die Punktreihe t_1 aus beliebigem Scheitel S_1 auf t_3. Dadurch entstehen die Punkte A_3 B_3 C_3 D_3, deren letztgenannter mit D_1 identisch ist, weil t_3 durch D_1 hindurchgeht.

3) Um nun die Punktreihen t_3 und t_2 in Beziehung zu bringen, wählt man für jede einen Projektions-Scheitel, und zwar in beiden Figuren 47 und 48 für t_3 als S_0 den Punkt B_2, für t_2 als S_2 den Punkt B_3. Dann ist $t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_3 \overline{\overline{\wedge}} S_0$ und $t_2 \overline{\overline{\wedge}} S_2$. Da aber auch $t_1 \overline{\wedge} t_2$ sein soll, so muß auch $S_0 \overline{\wedge} S_2$; und da Strahl $S_2 B_2$ und $S_0 B_3$ zusammenfallen, so sind S_0 und S_2 in perspektivischer Lage, also $S_0 \overline{\overline{\wedge}} S_2$. Den vermittelnden Träger t_4 für S_0 und S_2 erhält man daher als Verbindungsgerade des Schnittpunktes von $S_2 A_2$ und $S_0 A_3$, nämlich S_1, mit dem von $S_2 C_2$ und $S_0 C_3$, nämlich C_3. Der erstere Schnittpunkt wird A_4, der letztere C_4, und zwar Schnittpunkt von t_4 und t_3; und t_4 fällt zusammen mit dem Projektionsstrahl $S_1 C_1$.

4) Um nun den zum Punkte D_1 zugeordneten Punkt D_2 zu finden, verfährt man nach der Zeichenvorschrift $t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_3 \overline{\overline{\wedge}} S_0 \overline{\overline{\wedge}} t_4 \overline{\overline{\wedge}} S_2 \overline{\overline{\wedge}} t_2$, und erhält der Reihe nach die Elemente D_1 auf t_1, $S_1 D_1$ aus S_1, D_3 auf t_3, $S_0 D_3$ aus S_0, D_4 auf t_4, $S_2 D_4$ aus S_2, D_2 auf t_2. Da aber $t_4 \overline{\overline{\wedge}} t_2$, so muß der Schnittpunkt beider Reihen selbstentsprechend sein, also muß unbedingt der Schnittpunkt von t_4 und t_2 zugleich D_4 und D_2 sein; und weil t_4 mit $S_1 C_1$ zusammenfallen muß, so muß auch $D_{2,4}$ mit C_1 *zusammenfallen*.

5) Da hierbei aber das Punktpaar $C_1 C_2$ völlig willkürlich war, so muß

langt ist, d. h. ob überhaupt derartige Gebilde bestehen, bei denen sämtliche Elementepaare doppeltentprechend sind. Der nebenstehende Satz 22 gibt die Lösung des Zweifels, indem er nachweist, daß allerdings solche Gebilde existieren, indem das Doppeltentsprechen sämtlicher vorhandenen, also unendlich vieler Punktpaare schon dadurch unbedingt festgelegt ist, daß für ein einziges Punktpaar die Eigenschaft des doppelten Entsprechens zutrifft.

auch das Zusammenfallen von D_2 mit C_1 jedesmal stattfinden, wie immer C_1 und C_2 gewählt waren, und daher erhält man die wichtige Tatsache:

Satz 22. Wenn in zwei projektivisch verwandten Punktreihen auf gemeinsamem Träger irgend ein Paar zugeordneter Punkte doppelt entsprechend ist, so sind sämtliche Paare zugeordneter Punkte doppeltentsprechend, und die beiden Punktreihen liegen involutorisch, sie bilden eine involutorische Punktreihe.

Erkl. 182. In Figur 47 und 48 sind $A_1 A_2$, $C_1 C_2$ doppelt entsprechende Punktpaare der involutorischen Punktreihe auf dem Träger $t_{1,2}$; nach dem letzten Satze der Antwort 50 sind aber in beiden Figuren auch $S_1 A_1$, $S_1 A_2$; $S_1 C_1$, $S_1 C_2$ doppelt entsprechende Strahlenpaare des involutorischen Strahlenbüschels S_1, ebenso A_3, B_3; C_3, D_3 doppelt entsprechende Punktepaare der involutorischen Reihe t_3, ebenso $S_3 A_3$, $S_3 B_3$; $S_3 C_3$, $S_3 D_3$ zugeordnete Strahlenpaare des involutorischen Strahlenbüschels S_3, ebenso A_4, B_4; C_4, D_4 involutorisch gepaarte Punkte auf t_4, und $S_2 A_2$, $S_2 B_2$; $S_2 C_2$, $S_2 D_2$ involutorisch gepaarte Strahlen des Büschels S_2. Man sieht, daß, wo die Beziehung mit zweierlei Indices $_{1,2}$ nicht vorhanden ist, durch den Strichpunkt (;) die zusammengehörigen Paare in der Schreibung voneinander unterschieden werden.

Weitere Folgerungen aus dem wichtigen Satze 22 enthalten die folgenden Fragen 53 bis 56.

Frage 53. Welche Folgerungen ergibt der vorige Satz für involutorische Strahlenbüschel?

Erkl. 183. Da ein Strahlenbüschel mit Scheitel S_1 (Figuren 46, 47, 48) keinen unendlich fern liegenden Strahl besitzt, so ist auch die Untersuchung der Durchlaufungsrichtungen viel einfacher als bei der Punktreihe. Der Strahlenbüschel S_1 in Figur 47 wird ebenso wie der Strahlenbüschel S_1 in Figur 46 durchlaufen bei der Reihenfolge $S_1 A_1$, $S_1 C_1$, $S_1 B_1$, $S_1 D_1$ im Sinne gegen den Uhrzeiger, und der Strahlenbüschel $S_1 A_2$, $S_1 C_2$, $S_1 B_2$, $S_1 D_2$ in beiden Figuren ebenfalls im Sinne gegen den Uhrzeiger. — In Figur 48 dagegen hat der Strahlenbüschel $S_1 A_1, S_1 B_1, S_1 C_1, S_1 D_1$ Umlauf im Sinne gegen den Uhrzeiger, aber der Büschel $S_1 A_2$, $S_1 B_2$, $S_1 C_2$, $S_1 D_2$ zeigt Umlauf im Sinne mit dem Uhrzeiger.

Antwort. Man könnte genau dieselbe Überlegung, welche in der vorigen Antwort für Punktepaare durchgeführt ist, dualistisch übertragen auf Strahlenpaare. Das dabei entstehende Ergebnis muß aber dasselbe werden, welches auch unmittelbar gewonnen werden kann durch Übertragung des Satzes 22 selbst. Man erhält also für Strahlenbüschel:

Satz 22a. Wenn in zwei projektivisch verwandten Strahlenbüscheln mit gemeinsamem Scheitel irgend ein Paar zugeordneter Strahlen doppelt entsprechend ist, so sind sämtliche Paare zugeordneter Strahlen doppelt entsprechend, und die beiden Strahlenbüschel liegen involutorisch, sie bilden einen involutorischen Strahlenbüschel.

Da also der Strahl $S_1 D_1$ in Figur 47 in dem den Strahl $S_1 C_1$ nicht enthaltenden Winkel, also im Nebenwinkel von $A_1 S_1 B_1$ liegt, so muß auch $S_1 D_2$ in dem den Strahl $S_1 C_2$ nicht enthaltenden, also im Innenwinkel von $A_2 S_1 B_2$ erscheinen. Ebenso liegt in Figur 48 der Strahl $S_1 D_1$ in dem den Strahl $S_1 B_1$ nicht enthaltenden Winkel, also im Nebenwinkel von $A_1 S_1 C_1$, folglich liegt auch $S_1 D_2$ in dem den Strahl $S_1 B_2$ nicht enthaltenden, also im Innenwinkel $A_2 S_1 C_2$.

Frage 54. Welche Unterscheidung unter den involutorischen Gebilden wird herbeigeführt durch die gleiche oder verschiedene Umlaufsrichtung der beiden zu einem involutorischen Gebilde vereinigten Einzelgebilde?

Erkl. 184. Von den Punkten einer Punktreihe hat stets besondere Besprechung zu finden der unendlich fern liegende. Es wird also die Reihe t_1 zu ihrem unendlich fernen Punkt F_1 einen Punkt F_2, und ebenso Reihe t_2 zu ihrem unendlich fernen Punkt G_2 einen Punkt G_1 als zugeordneten haben. Bei aufeinanderliegenden Punktreihen fallen aber die unendlich fernen Punkte zusammen, also ist gesetzt $F_1 = G_2$ und $F_2 = G_1$ (vergl. Figur 46). Dieser Punkt $F_2 = G_1$, welcher dem unendlich fernen Punkte jeder Reihe t_1 oder t_2 zugeordnet ist, bildet also in der involutorischen Reihe den gepaarten Punkt zum unendlich fernen. Er wird daher bei der metrischen Behandlung von besonderer Bedeutung und erhält in Figur 47, 48 den Buchstaben M. Dem Strahle SM dagegen kommt keine besondere Bedeutung zu, denn daß sein gepaarter Strahl parallel wird zu $t_1 t_2$, ist keine besondere Eigenschaft des Büschels S_1, sondern nur bedingt durch die zufällige Lage von t_{12} zu S_1.

Erkl. 185. Verfolgt man in Figur 47 streckenweise die Lage der gepaarten Punkte, so findet man die Punkte der Strecken $F_1 \infty A_1$, $A_1 C_1$, $C_1 M$, $M B_1$, $B_1 D_1$, $D_1 F_1 \infty$ der Reihe nach gepaart zu den Punkten der Strecken $M A_2$, $A_2 C_2$, $C_2 G_2 \infty$, $G_2 B_2$, $B_2 D_2$, $D_2 M$. Und ebenso ergibt sich in Figur 47 im Strahlenbüschel S_1 winkelweise die Lage der gepaarten Strahlen von der Art,

Antwort. 1) Wenn die beiden Punktreihen $t_1 t_2$ in Figur 46 und 47 gleiche Durchlaufsrichtung bezw. die beiden Strahlenbüschel $S_1 (t_1)$ und $S_1 (t_2)$ derselben Figuren gleiche Umlaufsrichtung besitzen, so ist jeder Punkt der Innenstrecke $A_1 B_1$ gepaart mit einem Punkt der Außenstrecke $A_2 B_2$ bezw. jeder Strahl des Innenwinkels $A_1 S_1 B_1$ gepaart mit einem Strahl des Außenwinkels $A_2 S_1 B_2$ — und umgekehrt. Es wird daher nie vorkommen können, daß ein Punkt von t_1 mit seinem projektivisch zugeordneten von t_2, d. h. mit seinem involutorisch gepaarten zusammenfallen kann, oder daß ein Strahl von $S_1 (t_1)$ und sein projektivisch zugeordneter von $S_1 (t_2)$, d. h. sein involutorisch gepaarter zusammenfallen. Nicht nur das einzelne weitere Punktpaar $C_{12} D_{21}$, sondern jedes Paar zugeordneter Elemente muß aber bei dieser gleichgerichteten Durchlaufsrichtung der beiden Einzelgebilde so liegen, daß das eine Element $C_1 = D_2$ bezw. der eine Strahl $S_1 C_1 = S_1 D_2$ innerhalb, das andere Element $C_2 = D_1$ bezw. der andere Strahl $S_1 C_2 = S_1 D_1$ außerhalb der Elemente des Paares $A_{12} B_{21}$ liegt. Somit erhält man die erste Tatsache:

Satz 23. Wenn in einem involutorischen Gebilde, gebildet durch Zusammenlegung zweier gleichlaufend projektivischen Punktreihen oder Strahlenbüschel, die Elemente eines einzigen Paares durch die Elemente eines anderen

daß die Strahlen der Winkel $F_1 S_1 A_1$, $A_1 S_1 C_1$, $C_1 S_1 M$, $M S_1 B_1$, $B_1 S_1 D_1$, $D_1 S_1 F_1$ der Reihe nach gepaart sind zu den Strahlen der Winkel $M S_1 A_2$, $A_2 S_1 C_2$, $C_2 S_1 G_2$, $G_2 S_1 B_2$, $B_2 S_1 D_2$, $D_2 S_1 M$. Aus später hervortretenden Gründen nennt man die an den Punktreihen und Strahlenbüscheln der Figur 47 erscheinende Art der Involution nach Satz 23 die „elliptische Involution".

Erkl. 186. In Figur 48 kommt zu der schon vorgenannten Eigentümlichkeit des Punktes M noch hinzu die Eigentümlichheit der zwei Punkte X und Y, welche in beiden Reihen einander selbst zugeordnet sind. Ihre genaue Lage und Beziehung zum Punkte M wird erst durch die metrische Behandlungsweise zahlenmäßig festgestellt werden. Aber auch rein geometrisch haben diese Punkte besondere Eigenheiten aufzuweisen. Und zwar kommt ihre Eigentümlichkeit zugleich auch den Strahlen $S_1 X$ und $S_1 Y$ des involutorischen Büschels S_1 zu. Denn die Besonderheit der Punkte X, Y ist nicht wie bei M nur eine Beziehung zum Unendlichen, die bei jeder Projektion sich ändert, sondern eine Eigenschaft zusammenfallender Punkte bezw. Strahlen, die bei Projektion erhalten bleibt. Ihrer Wichtigkeit wegen erhalten diese Elemente daher besondere Benennung, und zwar wird hier bei der Involution entweder der schon bei beliebig liegenden Gebilden gemeinsamer Träger gebrauchte Name Doppelelemente, oder auch zur Unterscheidung von jenem allgemeinen Falle der besondere Name Ordnungselemente gebraucht. Es sind also XY die Ordnungspunkte der involutorischen Reihe t_{12}, $S_1 X$ und $S_1 Y$ die Ordnungsstrahlen des involutorischen Büschels S_1 (t_{12}).

Erkl. 187. Verfolgt man wieder streckenweise die Lage der gepaarten Punkte in Figur 48, so findet man die Punkte der Strecken $F_1 \infty A_1$, $A_1 X$, $X B_1$, $B_1 M$, $M C_1$, $C_1 Y$, $Y D_1$, $D_1 F_1 \infty$ der Reihe nach gepaart zu den Punkten der

Paares getrennt liegen, so werden die Elemente jedes Paares innen und außen getrennt durch die Elemente jedes anderen Paares, und dieses involutorische Gebilde enthält kein Element, welches mit einem gepaarten Element zusammenfällt.

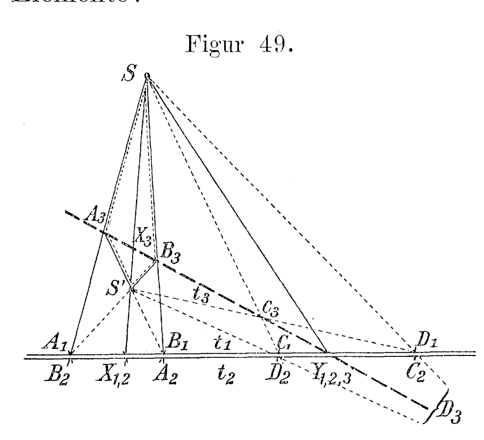
2) Wenn aber die beiden Punktreihen $t_1 t_2$ in Figur 48 ungleiche Durchlaufsrichtungen bezw. die Strahlenbüschel S_1 (t_1) und S_1 (t_2) derselben Figur ungleiche Umlaufsrichtungen besitzen, so entspricht dem Durchlauf der Innenstrecke $A_1 B_1$ bezw. $C_1 D_1$ der entgegengesetzte Durchlauf derselben Innenstrecke $A_2 B_2$ bezw. $C_2 D_2$, also muß sowohl zwischen A_1 und B_1 als zwischen C_1 und D_1 ein Punkt liegen, wo beide Reihen übereinander hinweggehen; und ebenso muß sowohl zwischen $S_1 A_1$ und $S_1 B_1$ als zwischen $S_1 C_1$ und $S_1 D_1$ ein Strahl liegen, wo beide Büschel übereinander hinweggehen, es muß also zweimal vorkommen, daß die beiden Elemente eines involutorischen Paares zusammenfallen: das einemal zwischen A_1 und B_1, das anderemal zwischen C_1 und D_1 in Fig. 48. Für jedes beliebige Punktpaar bezw. Strahlenpaar $A_1 B_1$ oder $C_1 D_1$ besteht die Beziehung, daß zu einem Punkte der Innenstrecke wieder ein Punkt der Innenstrecke, zu einem Punkte der Außenstrecke wieder ein Punkt der Außenstrecke, bezw. zu einem Strahle des Innenwinkels wieder ein Strahl des Innenwinkels, zu einem Strahle des Außenwinkels wieder ein Strahl des Außenwinkels involutorisch gepaart sein muß. Man erhält also die zweite Tatsache:

Satz 23a. Wenn in einem involutorischen Gebilde, gebildet durch Zusammenlegung zweier ungleichlaufenden projektivischen Punktreihen oder Strahlenbüschel, die Elemente eines einzigen Paares durch die Elemente eines

Strecken MA_2, A_2X, XB_2, $B_2G_2\infty$, $G_2\infty C_2$, C_2Y, YD_2, D_2M. Und ebenso findet man winkelweise die Lage der gepaarten Strahlen von Figur 48 von der Art, daß die Strahlen der Winkel $F_1S_1A_1$, A_1S_1X, XS_1B_1, B_1S_1M, MS_1C_1, C_1S_1Y, YS_1D_1, $D_1S_1F_1$ der Reihe nach gepaart sind zu den Strahlen der Winkel MS_1A_2, A_2S_1X, XS_1B_2, $B_2S_1G_2$, $G_2S_1C_2$, C_2S_1Y, YS_1D_2, D_2S_1M. Aus später hervortretenden Gründen nennt man die an den Punktreihen und Strahlbüscheln der Figuren 48 und 49 erscheinende Art der Involution nach Satz 23a die „hyperbolische Involution". anderen Paares nicht getrennt liegen, so werden die Elemente keines Paares innen und außen getrennt durch die Elemente irgend eines anderen Paares, und das involutorische Gebilde enthält zwei Elemente, deren jedes mit seinem gepaarten Elemente zusammenfällt: sogen. Doppelelemente oder Ordnungselemente.

Frage 55. In welcher Lagebeziehung zu den getrennten gepaarten Elementen befinden sich die Ordnungselemente, d. h. die zusammenfallenden gepaarten Elemente?

Figur 49.



Erkl. 188. In Figur 49 sind die Ordnungselemente X und Y nur zum Punktepaar A_1B_1 in Beziehung gesetzt. Man könnte dieselben ebenso zum Punktpaar C_1D_1 in Beziehung setzen. Dann würden auf demselben Träger t_3 die Punkte $X_3C_3Y_3D_3$ perspektivisch liegen zu den Punkten $X_2C_2Y_2D_2$. Durch denselben Punkt S' auf SX_3X_{12}, in welchem einander die Verbindungsgeraden A_2A_3, B_2B_3 schneiden, müssen nun auch hindurchgehen die Strahlen C_2C_3 und D_2D_3. Und diese bilden diesmal das Viereck mit einspringendem Winkel $SC_3S'D_3S$,

Antwort. 1) Nach den Sätzen 23 und 23a gibt es zweierlei involutorische Gebilde: solche mit Ordnungselementen und solche ohne Ordnungselemente: erstere entstehend durch involutorische Zusammenlegung von ungleichlaufenden, letztere von gleichlaufenden Einzelgebilden auf gemeinsamem Träger. Beide können sein Punktreihen oder Strahlenbüschel. Zur Untersuchung einer reinen Lagebeziehung genügt aber die Behandlung eines dieser beiden letzteren Fälle, indem der andere daraus durch dualistische Übertragung gewonnen werden kann.

2) Seien also in Figur 49 A_1, X_1, B_1, C_1, Y_1, D_1 die aus Figur 48 übernommenen Elemente einer involutorischen Punktreihe, wobei $A_{12}B_{21}$ und $C_{12}D_{21}$ getrennte, $X_{1,2}$ und $Y_{1,2}$ die beiden zusammenfallenden gepaarten Punkte darstellen. Man wiederholt die an Figur 47 und 48 angestellte Überlegung in der Weise, daß man den Träger t_3 nicht durch D_1C_2, sondern jetzt durch Y hindurchlegt. Mittels Projektion aus dem Scheitel S entsteht wieder auf t_3 die Reihe der Punkte $A_3X_3B_3(C_3)Y_3$, deren letztgenannter sowohl mit Y_1 als Y_2 identisch ist.

von welchem einander die Gegenseiten SC_3 und $S'D_3$ in C_1, die Gegenseiten $S'C_3$ und D_3S in D_1 schneiden; und die eine Diagonale SS' geht durch X, die andere C_3D_3 durch Y. Also sind XY und C_1D_1 vier harmonische Punkte.

Erkl. 189. In Hinsicht der Lage zu den beiden Ordnungselementen XY kann man daher jeweils Elementepaare von zweierlei Lage unterscheiden: solche, die das Element X innerhalb und Y außerhalb haben, und solche, die X außerhalb und Y innerhalb haben. Von ersterer Art ist in Figur 48 und 49 das Punktepaar A_1B_1 bezw. das Strahlenpaar SA, SB, von letzterer Art das Punktepaar C_1D_1 bezw. das Strahlenpaar SC, SD. Und die Beweisführung nebenstehender Antwort fällt für beiderlei Gruppierung ganz gleichartig aus, nur die Figur zeigt den in voriger Erklärung 188 gezeigten Unterschied. Legt man den Träger t_3 durch denjenigen Ordnungspunkt, welchen die Elemente des gewählten Punktepaares ausschließen, so entsteht das konvexe Viereck $SA_3S'B_3$ der Figur 49; legt man aber den Träger t_3 durch denjenigen Ordnungspunkt, welchen die Elemente des ausgewählten Punktepaares einschließen, so entsteht das Viereck mit einspringendem Winkel $SC_3S'D_3$ an derselben Figur.

Erkl. 190. Beachtet man, worin der Unterschied der Figuren 48 und 49 beruht, so erkennt man folgendes: In beiden Figuren wird die Betrachtung der auf gemeinsamem Träger liegenden Punktreihen $t_1 t_2$ zurückgeführt auf die Behandlung der Punktreihen $t_2 t_3$ auf verschiedenen Trägern. Während aber in Figur 48 die projektivischen Reihen $t_2 t_3$ in schiefer Lage erscheinen und deshalb die Wahl dreier neuen Vermittlungsgebilde $[S_3 t_4 S_2]$ nötig machen, so erscheinen wegen des selbstentsprechenden Punktes Y die Reihen $t_2 t_3$ in Figur 49 in perspektivischer Lage und machen daher bloß die Annahme eines einzigen Vermittlungsgebildes S' nötig. Und diese einfachere Figur läßt dann das Viereck mit seinen vier harmonischen Elementen heraustreten.

3) Nun ist sowohl $t_1 \overline{\wedge} t_2$, als auch $t_1 \overline{\wedge} t_3$, folglich auch $t_2 \overline{\wedge} t_3$. Da aber der den Reihen t_2 und t_3 gemeinsame Punkt Y sich selbst zugeordnet ist, so muß die letztere Beziehung nicht in schiefer, sondern in perspektivischer Lage sich befinden, also $t_2 \overline{\overline{\wedge}} t_3$. Es müssen also die Verbindungstrahlen entsprechender Punkte von t_2 und t_3 durch einen einzigen Scheitel S' hindurchgehen, der seine Lage auf dem Projektionsstrahl $SX_{12}X_3$ haben muß.

4) Nun bilden aber die Geraden SA_3, A_3S', $S'B_3$, B_3S ein Viereck, von welchem zwei Gegenseiten durch A_1 und B_1, die Diagonalen durch X und Y hindurchgehen, und folglich sind X und Y zu A_1 und B_1 harmonisch gelegen; und daß diese Lagebeziehung nicht nur zu A_1, B_1, sondern zu jedem anderen gepaarten Punktpaare stattfindet, läßt sich durch abgeänderte Wahl der Figur sofort erkennen. Sind aber die Punkte A_1 B_1 harmonisch getrennt durch X, Y, so sind auch die Strahlen SA_1, SB_1 harmonisch getrennt durch SX und SY. Man erhält also die weitere Aussage:

Satz 24. In einem involutorischen Gebilde, welches zwei Ordnungselemente enthält, wird jedes Paar zugeordneter Elemente durch die Ordnungselemente — bezw. werden die Ordnungselemente durch jedes zugeordnete Elementepaar harmonisch getrennt.

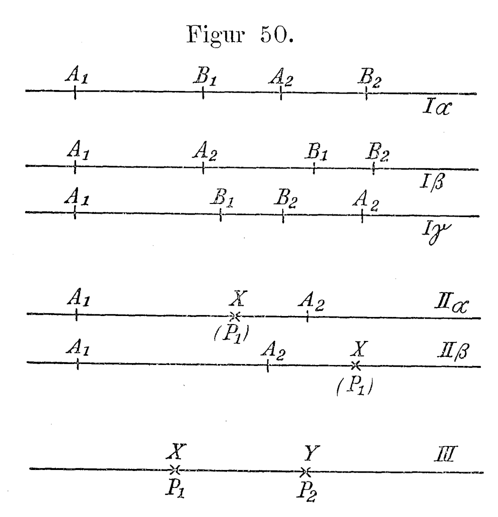
Erkl. 191. Während die metrische Beziehung des Punktes M Figur 47 und 48 beiderlei involutorischen Punktreihen zukommt, können Ordnungselemente nur bei der zweiten Art involutorischer Gebilde auftreten, wobei die beiden involutorisch zusammengelegten Einzelgebilde entgegengesetzten Durchlaufungssinn

haben, d. h. wobei je zwei gepaarte Elemente nicht durch einander innen und außen getrennt liegen. Nur in diesem Falle aber bilden die Ordnungspunkte mit jedem gepaarten Punktepaar vier harmonische Punkte, und die Ordnungsstrahlen mit jedem gepaarten Strahlenpaare vier harmonische Strahlen.

Frage 56. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Sätzen 22 bis 24 hinsichtlich der Bestimmungsstücke und der Konstruktion eines involutorischen Gebildes?

Erkl. 192. Wenn von einem involutorischen Gebilde schlechthin die Rede ist, so wird auch die Bezeichnung der Elemente nicht mehr, wie in Figur 46 bis 49, getrennt durchgeführt für die beiden Einzelgebilde, durch deren Zusammenlegung das involutorische entstanden ist, sondern man buchstabiert je zwei gepaarte Elemente, d. h. die beiden Elemente eines zugeordneten Paares mit demselben Buchstaben des Alphabets, nur mit Unterscheidung durch Ziffern 1 und 2 oder mit und ohne zugefügten Strich, also A_1 und A_2 oder A und A′, B_1 und B_2 oder B und B′ .... Hiernach ist in Figur 50 jeder der Fälle aufgeführt mit Angabe aller Einzelarten, in welchen die gewählten Elemente gruppiert werden können.

Figur 50.



Erkl. 193. Figur 50, I gibt jedesmal die Bestimmung einer involutorischen Punktreihe durch zwei zugeordnete

Antwort. Da die Entstehung eines involutorischen Gebildes eine besondere Art von projektivischer Verwandtschaft darstellt, so wird auch Bestimmung und Konstruktion des involutorischen Gebildes nach Bestimmung und Konstruktion der projektivischen Gebilde erfolgen müssen. Und zwar genügt die Vorstellung der Beziehungen an einer involutorischen Punktreihe, da man die Beziehungen in dem involutorischen Strahlenbüschel durch Projektion daraus erhalten kann.

Nun sind zwei projektivische Punktreihen eindeutig zugeordnet durch Zuordnung dreier Punktpaare: $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$. Da aber bei der involutorischen Paarung mit dem Paare $A_1 A_2$ schon dasjenige Punktepaar ebenfalls zugeordnet sein muß, welches die Punkte A_1 in t_2 und A_2 in t_1 darstellen, so ist durch Festlegung allein von $A_1 A_2$ als involutorisch gepaartem Elementepaar schon für dieses zweite Paar die Zuordnung ebenfalls ausgesprochen. Man kann also nicht mehr willkürlich die Paare $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ hinzunehmen. Vielmehr wird durch Hinzunehmen eines weiteren Paares $B_1 B_2$ zu $A_1 A_2$ die Bestimmung vollständig erschöpft, denn mit Festlegung von $B_1 B_2$ ist ja auch schon wieder ein weiteres Paar als zugeordnet bestimmt, nämlich dasjenige, welches durch B_1 in t_2 und B_2 in t_1 dargestellt wird. Sind also die beiden Paare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ als involutorisch gepaarte bekannt, so kann man jeden der vier Punkte in t_1 und t_2 getrennt buchstabieren, man kennt so vier Paare zugeordneter

Elementepaare $A_1 A_2 B_1 B_2$. Dabei ist aber in Figur Iα das Punktepaar $A_1 A_2$ durch das Punktepaar $B_1 B_2$ innen und außen getrennt, und umgekehrt; man hat also hier involutorische Reihe nach Satz 23, erzeugt durch gleichlaufende Einzelpunktreihen und ohne Ordnungselemente. In Figur Iβ liegen beide Punkte B außerhalb der Punkte A, in Figur Iγ liegen beide Punkte B innerhalb der Punkte A, also ist das Punktepaar $A_1 A_2$ durch das Punktepaar $B_1 B_2$ nicht getrennt, und umgekehrt; man hat also hier in β und γ involutorische Reihen nach Satz 23a, erzeugt durch ungleichlaufende Einzelpunktreihen und mit Ordnungselementen. Soll nun zu einem beliebig gegebenen Punkte E_1 der zugehörige Punkt E_2, d. h. der involutorisch gepaarte Punkt E_2 bestimmt werden, so versieht man die Punkte $A_1 A_2 B_1 B_2$ zunächst mit doppelter Bezeichnung in t_1 und t_2, legt einen Träger t_3 und t_4, wählt S_1, S_2, S_3 und konstruiert nach Figur 47 bezw. 48. — Eine besondere Aufgabe stellt es dar, in Iβ und Iγ die Ordnungselemente aufzufinden, welche nach Satz 23a vorhanden sein müssen.

Erkl. 194. In Figur 50 II ist zweifach angegeben die Bestimmung einer involutorischen Punktreihe durch ein Elementepaar nebst einem Ordnungselemente [bezw. einem Potenzpunkt P]. Und zwar liegt in IIα das gegebene Ordnungselement X [bezw. Potenzpunkt] auf der Innenstrecke, in IIβ auf der Außenstrecke des gegebenen Punktepaares $A_1 A_2$. Man hat also mit X involutorische Reihe nach Satz 23a erzeugt durch ungleichlaufende Einzelpunktreihen [oder mit P_1 involutorische Reihe nach Satz 23, erzeugt durch gleichlaufende Punktreihen]. Und nach Satz 24 ist das zweite Ordnungselement Y der vierte harmonische Punkt zu $A_1 A_2$ und X, liegt also in IIα auf der Außenstrecke, in IIβ auf der Innenstrecke von $A_1 A_2$. Dann ist auch die Konstruktion weiterer zugeordneter Punktepaare bloß durch Konstruktion der vierten harmonischen Punkte zu X und Y zu bewerkstelligen: der involutorisch zugeordnete Punkt E_2 zu gegebenem Punkte E_1 wird der vierte harmonische Punkt zu E_1 und XY.

Erkl. 195. In Figur 50 III ist die involutorische Reihe bestimmt bloß durch die beiden Ordnungselemente X und Y [bezw. die beiden Potenzpunkte $P_1 P_2$]. Jedes Punktepaar, das durch X und Y harmonisch getrennt wird, ist ein involutorisch

Punkte zweier projektivischen Punktreihen und kann dann nach Figuren 47 und 48 zu jedem Punkte der einen Reihe den zugeordneten der anderen konstruieren. — Sind die Punktreihen von der in Satz 23a betrachteten Art, so kann das eine Paar $B_1 B_2$ als ein zusammenfallendes Paar $X_{1,2}$ gewählt werden, dann hat man die einfachere Konstruktion der Figur 49, indem der Punkt Y der vierte harmonische sein muß zu $A_1 A_2$ und X. Endlich könnte auch jedes der Paare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ je als ein zusammenfallendes Paar gewählt werden, dann sind die Punkte X und Y gegeben, und jedes Punktepaar, welches mit diesen beiden eine Gruppe von vier harmonischen Geraden bildet, bildet ein Paar zugeordneter Punkte der involutorischen Punktreihe. Man erhält also:

Satz 25. Die Bestimmung eines involutorischen Gebildes geschieht: entweder durch zwei beliebig gewählte Elementepaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, oder durch ein Elementepaar nebst einem Ordnungselement $A_1 A_2$, X, oder durch zwei Ordnungselemente X, Y. — Die Konstruktion weiterer Elementepaare geschieht im ersteren Falle nach der allgemeinen projektivischen, in beiden letzteren Fällen nach der harmonischen Zuordnung der Elemente.

gepaartes der verlangten Reihe nach Satz 23a. Dasselbe kann X einschließen und Y ausschließen, wie in IIα, oder X ausschließen und Y einschließen, wie in IIβ. Zu beliebig gegebenem Punkte E_1 ist der involutorisch gepaarte E_2 der vierte harmonische Punkt zu E_1 und XY. — Man erkennt sofort, daß die zweite und dritte Bestimmungsweise der involutorischen Reihen eigentlich nicht wesentlich verschieden sind, indem durch einfache Konstruktion eines harmonischen Punktepaares die eine auf die andere zurückgeführt wird. Ebenso kann jede weitere auf die erste Art zurückgeführt werden, während der umgekehrte Vorgang, nämlich Iβ und Iγ auf II oder III zu bringen, eine besondere Schwierigkeit enthält, die durch eine metrische Behandlung leichter gelöst wird als durch die rein projektivische.

* * *

b) Maßbeziehungen involutorischer Punktreihen und Strahlenbüschel.

Frage 57. Welche Gestalt nimmt die maßgeometrische Behandlung der Definition involutorischer Gebilde an?

Antwort. In der maßgeometrischen Behandlung wird die projektivische Verwandtschaft festgelegt durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse unter vier zugeordneten Elementen. Wenn also $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ vier entsprechende Punkte der auf gemeinsamem Träger liegenden projektivischen Punktreihen sind, und deren Aufeinanderlegen in der Weise bewerkstelligt ist, daß A_2 mit B_1, B_2 mit A_1, und C_2 mit D_1 zusammenfällt, so ist zu untersuchen, wohin D_2 fällt. Bezeichnet man seine noch unbekannte Lage vorerst mit Z, so muß $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 Z)$ sein. Nun ist aber nach voriger Vorschrift über die Lage der Punkte

$$(A_2 B_2 C_2 Z) = (B_1 A_1 D_1 Z),$$

und nach dem allgemeinen Gesetze über Gliedervertauschung beim Doppelverhältnis ist

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (B_1 A_1 D_1 C_1).$$

Hieraus folgt aber

$$(B_1 A_1 D_1 Z) = (B_1 A_1 D_1 C_1),$$

und daher muß unbedingt Punkt Z mit C_1 zusammenfallen, d. h. Satz 22 ist durch Rechnung bewiesen aus der Definition der involutorischen Gebilde, und zwar sowohl für Punktreihen als für Strahlenbüschel.

Erkl. 196. Über die Theorie der Doppelverhältnisse sehe man den Abschnitt 4 des ersten Teiles dieses Lehrbuches nebst den dazu gehörigen Aufgaben. Von den dort behandelten Sätzen sind hier verwendet erstens derjenige, daß ein Doppelverhältnis gleichen Wert behält bei gleichzeitiger Vertauschung zweier beliebigen Elementepaare, und zweitens derjenige, daß, wenn von den Elementen zweier gleichgroßen Doppelverhältnisse drei Elemente identisch sind, auch das vierte Element identisch sein muß. — Es bedarf kaum der Erwähnung, daß die nebenstehende Ausführung genau gleicherweise für zwei projektivische Strahlenbüschel mit gemeinsamem Scheitel gilt, in denen $a_2 = b_1$, $b_2 = a_1$, $c_2 = d_1$ ist. Wird hier $(a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 z) = (b_1 c_1 d_1 z) = (b_1 a_1 d_1 c_1)$, so muß auch wieder $d_2 = z = c_1$ werden.

Erkl. 197. Statt nebenstehenden Beweis durch Benutzung obiger beiden Sätze zu führen, kann man auch die Figuren 47 und 48 rechnend verfolgen und erhält für beide Figuren: $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_3 B_3 C_3 D_3) = (A_4 B_4 C_4 D_4) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$, da aber in der Figur $A_2 = B_1$, $B_2 = A_1$, $C_2 = D_1$, so muß $D_2 = C_1$ sein.

Frage 58. Welche Folgerung für involutorische Punktreihen erhält man durch weitere Anknüpfung an die metrische Behand-

Antwort. 1) Wenn je zwei Punktepaare der beiden involutorisch zusammengelegten Reihen

lung der projektivischen Punktreihen?

Figur 51.

Erkl. 198. Der Satz 7 des ersten Teiles lautet: „In zwei projektivisch verwandten Punktreihen hat das Produkt der Strecken von je zwei entsprechenden Punkten zum Fluchtpunkt ihrer Punktreihe einen konstanten Wert“. Dieser Wert heißt die „Konstante der projektivischen Beziehung“ oder auch die „Potenz der projektivischen Beziehung“. Sind also F_2 und G_1 die Fluchtpunkte in den getrennt zu denkenden Punktreihen t_1 und t_2, so gilt für beliebige projektivisch zugeordnete Punktepaare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die Gleichung $G_1 A_1 \cdot F_2 A_2 = G_1 B_1 \cdot F_2 B_2$. Ist hierin, wie in Figur 51, $G_1 A_1 > G_1 B_1$, d. h. G_1 ferner von A_1 als von B_1, so muß $F_2 A_2 < F_2 B_2$, d. h. F_2 näher bei A_2 als bei B_2. Und nur für die zwei bestimmten Punktepaare $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$, welche beiderseits in gleichen Abständen von den Fluchtpunkten liegen, ist gleichzeitig $G_1 P_1 = F_2 P_2$ und $G_1 Q_1 = F_2 Q_2$, erstere beiden Strecken je nach der einen, letztere beiden je nach der entgegengesetzten Richtung in ihrer Reihe gemessen.

Erkl. 199. In Figur 51 ist bei I und II die Reihe t_1 beidemale identisch aufgetragen, und zwar von links nach rechts von ∞F_1 nach P_1, G_1 inmitten von $P_1 Q_1$, Q_1, A_1, $F_1 \infty$. Darunter ist ebenfalls beidemale identisch die Reihe t_2 aufgetragen, aber in Figur 51 I gleichlaufend mit t_1, also ebenfalls von links nach rechts ∞G_2 nach Q_2, A', F_2 inmitten von $P_2 Q_2$, P_2, $G_2 \infty$; dagegen in Figur 51 II dieselbe Reihe t_2 entgegengesetzt zu t_1, also von rechts nach links dieselbe Punktfolge ∞G_2, Q_2, A', F_2, P_2, ∞G_2. Beidemale liegt also Punkt A bezw. Q_1 rechts von

einander doppelt entsprechen, so müssen auch die Fluchtpunkte F_2 und G_1 beider Reihen zur Deckung gelangen, da ja auch die unendlich fernen Punkte $F_1 \infty$ und $G_2 \infty$ aufeinander liegen. Nun bilden aber nach Satz 7 des I. Teiles die Strecken zwischen je einem von zwei entsprechenden Punkten und dem Fluchtpunkt seiner Reihe miteinander konstante Produkte, folglich muß man hier gleiche Produkte erhalten aus den Abständen je zweier involutorisch gepaarten Punkte AA', BB' vom gemeinsam zusammenfallenden Fluchtpunkte. Nennt man den letzteren M, so ist also (Figur 51) $MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = MC \cdot MC' \ldots . = \text{const.}$

2) Dieses Produkt wird genannt die Potenz der involutorischen Reihe. Dasselbe muß positiven Wert haben, wenn die beiden Punktreihen ungleichlaufend auf dem gemeinsamem Träger liegen (Figur 51 II), denn nur dann befinden sich zwei gepaarte Punkte auf gleicher Seite vom Fluchtpunkte aus. Dagegen hat das Produkt negativen Wert, wenn die beiden Punktreihen gleichlaufend auf dem gemeinsamen Träger liegen (Figur 51 I), denn dann befinden sich zwei gepaarte Punkte auf ungleicher Seite vom Fluchtpunkt aus.

3) Das Produkt $MA \cdot MA'$ entsteht aus zwei gleichgroßen Faktoren, $MP_1 = \pm MP_2$, wenn man als gepaarte Punkte die beiden sogenannten Potenzpunkte der beiden Reihen ins Auge faßt, welche beiderseits in gleichem Abstande von jedem einzelnen, also hier auch vom gemeinsamen Fluchtpunkt liegen. Selbstentsprechend kann jeder der beiden Potenzpunkte nach dem vorigen aber nur im Falle der ungleichlaufenden Einzelpunktreihen werden (Fig. 51 II). Daher werden dieselben auch nur im

M, dagegen A' bezw. Q_2 das erstemal links von M, und nur das zweitemal ebenfalls rechts von M. Daher haben im ersten Falle die Strecken MA und MA' bezw. MQ_1 und MQ_2 entgegengesetztes, und folglich ihr Produkt negatives Vorzeichen, im zweiten Falle aber haben die Strecken MA und MA' bezw. MQ_1 und MQ_2 gleiches, und folglich ihr Produkt positives Vorzeichen. Wenn aber das konstante Produkt MA.MA' negativ wird, so müssen die Punkte jedes Paares auf entgegengesetzter Seite von M liegen, der eine rechts, der andere links; wird das Produkt MA.MA' positiv, so müssen die Punkte jedes Paares auf gleicher Seite von M liegen: beide rechts oder beide links.

Erkl. 200. Das Streckenprodukt wird geometrisch dargestellt durch ein Rechteck, und dieses Rechteck wird bei Gleichheit der Faktoren zu einem Quadrat, also in Figur 51 I:

$$MA \cdot MA' = MP_1 \cdot MP_2 = MQ_1 \cdot MQ_2 = -\overline{MP_1}^2 = -\overline{MQ_1}^2;$$

in Figur 51 II:

$$MA \cdot MA' = MP_1 \cdot MP_2 = MQ_1 \cdot MQ_2 = +\overline{MP_1}^2 = +\overline{MQ_1}^2.$$

Im ersten Falle werden selbstentsprechende Ordnungselemente unmöglich, weil ja kein Punkt rechts von M mit einem Punkte links von M zusammenfallen kann. Es ist also die „Potenz der involutorischen Reihe" im ersteren Falle gleich $-k^2$, im letzteren gleich $+k^2$; und daher ist im letzteren Falle der Abstand der Ordnungspunkte von M, also MX bezw. MY $= \pm\sqrt{+k^2} = \pm k$, d. h. der eine Punkt um $+k$, der andere um $-k$ von M entfernt. Wollte man im ersten Falle auch Ordnungspunkte aufsuchen, so erhielte man $\pm\sqrt{-k^2}$, also einen imaginären Wert für die Strecke MX bezw. MY. Man spricht daher auch bei der involutorischen Reihe der Figur 51 I von imaginären Doppelpunkten oder imaginären Ordnungselementen, zu welchen je zwei involutorisch gepaarte Punkte harmonisch letzteren Falle zu Ordnungselementen X, Y der Reihe, nicht auch im ersten Falle der gleichlaufenden Einzelpunktreihen. — Durch diese beiden Feststellungen 2 und 3 sind aber die beiden Sätze 23 und 23a für involutorische Punktreihen nachgewiesen.

4) Wenn in Figur 51 II P_1 und P_2 in X, Q_1 und Q_2 in Y zusammenfallen, so ist für das willkürlich ausgewählte Punktepaar AA'

$$MA \cdot MA' = \overline{MX}^2 = \overline{MY}^2.$$

Demnach sind (vergl. Satz 10 des II. Teiles dieses Lehrbuches) A und A' zwei Punkte, deren Strecke durch die Punkte X und Y innen und außen harmonisch geteilt wird, und M ist der Mittelpunkt von X und Y. Hiermit ist aber, da AA' ein ganz beliebiges Punktepaar ist, auch Satz 24 für involutorische Punktreihen bewiesen. Und der Punkt M, zu dessen beiden Seiten nicht nur in Figur 51 II die Ordnungselemente X und Y, sondern auch in Figur 51 I die zwei Potenzpunkte $P_{1,2}$ $Q_{1,2}$ und überhaupt je zwei das Produkt MA.MA' ergebende Punktepaare symmetrisch angeordnet liegen, heißt auch der Mittelpunkt der involutorischen Punktreihe.

5) Da in beiderlei involutorischen Punktreihen (mit und ohne Ordnungselemente) jedes projektivisch zugeordnete Punktepaar doppelt entsprechend sein muß, so entstehen lauter gleiche Strecken zwischen den projektivisch zugeordneten Punkten: die Strecken $A_1B_1 = B_2A_2$, $C_1D_1 = D_2C_2$ und alle ähnlichen sind bei gleicher Länge mit vertauschten Endpunkten aufeinandergefallen. In der Tat sind nach Satz 7a des ersten Teiles in zwei projektivischen Punktreihen stets zwei Gruppen gleichgroßer Strecken zwischen zugeordneten Punkten vorhanden, und zwar schließen die gleichen

liegen müßten. Und dies gibt eine Verknüpfung der projektivischen Geometrie mit der Lehre von den imaginären Größen in der Arithmetik, welche zu äußerst fruchtbaren Untersuchungen mit sehr bemerkenswerten Ergebnissen geführt hat.

Erkl. 201. Sind AA' und BB' zwei beliebige involutorisch gepaarte Punktepaare, so ergibt sich aus den vorigen Überlegungen, daß bei der involutorischen Reihe ohne Ordnungselemente das Paar AA' durch BB' innen und außen getrennt, bei der involutorischen Reihe mit Ordnungspunkten dagegen nicht getrennt liegen muß. Ist nämlich in Figur 51 I A und B rechts von M, und zwar A näher bei M als B, also $MA < MB$, so folgt wegen des negativen konstanten Produktes $MA' > MB'$, A' und B' links von M, und zwar B' näher bei M als A'. Die Reihenfolge der Punkte ist also unbedingt von links nach rechts $A'B'MAB$, also AA' innen und außen getrennt durch B und B'. — Ist aber in Figur 51 II ebenfalls A und B rechts von M, und wieder A näher bei M, als B, also $MA < MB$, so folgt wegen des positiven konstanten Produkts $MA' > MB'$, A' und B' rechts von M, und zwar B' näher bei M als A'. Wenn also A und B die dem Punkte M näher liegenden Punkte jedes Paares waren, so muß die Reihenfolge sein $MABB'A'$, also BB' beide von AA' eingeschlossen. Wären in Figur 51 II überhaupt A und B auf verschiedenen Seiten von M, so müßten A' und B' auf den gleichen Seiten mit ihren zugehörigen Punkten liegen, also jedenfalls BB' beide von AA' ausgeschlossen.

Erkl. 202. Zum gleichen Ergebnis kann man durch eine andere Überlegung gelangen, welche zugleich die Eigentümlichkeit des Mittelpunktes der Reihe noch deutlicher hervortreten läßt. Die Figur 51 I geht in Figur 51 II über und umgekehrt, wenn man die Reihe t_2 um den Punkt M umklappt, d. h eine Drehung um 180^0 machen läßt. Nun enthält aber die Reihe t_2 die involutorisch gepaarten Punkte zu den Punkten der Strecken der einen Gruppe jeweils den Fluchtpunkt der betreffenden Reihe ein, die der anderen Gruppe aus. Es ist also bei der involutorischen Reihe ohne Ordnungspunkte in Figur 51 I, wo A und A' auf verschiedenen Seiten vom Fluchtpunkt = Mittelpunkt M liegen, die erstgenannte Gruppe der in beiden Punktreihen vorhandenen gleichen Strecken zur Deckung gelangt, welche den Fluchtpunkt einschließen. Bei der involutorischen Reihe mit Doppelpunkten aber in Figur 51 II, wo A und A' auf gleicher Seite vom Fluchtpunkt = Mittelpunkt M liegen, ist die zweite Gruppe der in beiden Punktreihen vorhandenen gleichen Strecken zur Deckung gelangt, d. h. jedesmal die eine Strecke mit vertauschten Endpunkten auf die gleichgroße aufgelegt.

6) Von den Strecken der ersten Art ist die kleinste die Strecke zwischen den Potenzpunkten $P_1 Q_1$, welche in Figur 51 I mit $P_2 Q_2$ umgekehrt zusammenfällt; Strecken der zweiten Art gibt es von allen Größen, von unendlich bis zu Null, und diese kleinsten Strecken $P_1 P_1 = 0$ und $Q_1 Q_1 = 0$ in Figur 51 II sind in den als Ordnungspunkte erscheinenden Nullstrecken $P_2 P_2$ bezw. $Q_2 Q_2$ zur Deckung gelangt. Wenn aber irgend eine Strecke in der Reihe t_2 zur Deckung gelangt mit einer der beiden mit ihr gleichgroßen Strecken in t_1, so müssen auch alle derselben Gruppe angehörigen gleichen Streckenpaare beider Reihen t_1 und t_2 zur Deckung kommen. So sind in Figur 51 I M und $M\infty$ bezw. $P_1 Q_1 = P_2 Q_2$ die grundlegenden gleichen Strecken beider Reihen, in Figur 51 II ebenfalls M und $M\infty$ bezw. $X = P_1 P_1 = 0 = P_2 P_2$ und $Y = Q_1 Q_1 = 0 = Q_2 Q_2$. Und weil diese besonderen Streckenpaare aufeinander liegen, liegen alle gleichen Streckenpaare aufeinander.

Reihe t_1. Es gehen also die involutorischen Reihen in Figur 51 I und Figur 51 II in einander über, wenn man den zu jedem Punkte gepaarten Punkt in symmetrische Lage zu M überführt. Diese letztere Überlegung zeigt nun an Figur 51 II, daß die gepaarten Punkte von den selbstentsprechenden $P_{1,2}$ bezw. $Q_{1,2}$ aus nach beiden Seiten auseinanderlaufen, daß also immer zwei näher bei P_{12} oder Q_{12} liegende Punkte zusammengehören müssen und zwei ferner von da liegende. Wenn aber so die gleicherseits von M liegenden Punktepaare in Figur 51 II einander einschließen müssen in der Punktfolge MABB'A', so muß bei Umklappung von B' und A' auf die andere Seite die Punktfolge A'B'MAB entstehen, so daß jetzt AA' innen und außen getrennt sind durch B und B'.

7) Man erhält also aus der maßgeometrischen Auffassungsweise der involutorischen Gebilde zunächst die Bestätigung aller schon durch die geometrische Auffassung der involutorischen Punktreihe aufgefundenen Eigenschaften und außerdem als neue Hinzufügung die metrischen Beziehungen:

Satz 26. Der zum unendlich fernen Punkt einer Punktreihe involutorisch gepaarte Punkt ist Mittelpunkt der involutorischen Punktreihe. Zu ihm liegen je zwei der sämtlichen Punktepaare symmetrisch, und die Abstände jedes Paares von ihm liefern konstantes Produkt: negativ bei der Reihe ohne, positiv bei der Reihe mit Ordnungspunkten, und zwar jeweils gleich dem $\mp$Quadrat des Abstandes von einem Potenzpunkte bezw. Ordnungspunkte zum Mittelpunkt.

Erkl. 203. Die metrischen Beziehungen des konstanten Produktes MA.MA' haben den französischen Mathematiker Desargues zur Aufstellung der Theorie und des Namens der „involutorischen Gebilde" geführt (1639). Wie übrigens ein Vergleich mit den oben erwähnten Untersuchungen des I. Teiles zeigt, sind die metrischen Beziehungen der involutorischen Punktreihe nur spezielle Fälle derjenigen Maßbeziehungen, welche überhaupt bei projektivischen Punktreihen in vereinigter Lage auftreten, auch wenn diese Lage nicht gerade die involutorische ist. So war schon in Erklärung 304 des I. Teiles von imaginären Doppelpunkten die Rede. Figur 51 I und II bildet nur einen besonderen Fall der Figur 78 γ und δ im I. Teil, indem die dort jedesmal dreifach getrennt liegenden Punkte $G_1 M_1 F_2$ hier in den einzigen Punkt M, und entsprechend die dort zweifach getrennt liegenden Punkte $G_2 = F_1$ und M_2 in den einzigen unendlich fernen Punkt der involutorischen Reihe zusammengefallen sind. Als besonderer Fall bestätigt sich auch der in Erklärung 305 des I. Teiles ausgesprochene Satz, „daß Doppelelemente durch je zwei zugeordnete Elemente nach konstantem Doppelverhältnis getrennt werden", welches gleich ist dem einfachen Teilverhältnis der Doppelpunkte durch Punkt M_2. Denn M_2 liegt unendlich fern, teilt also die Doppelpunkte im Teilverhältnis -1, und dies besagt, daß jedes Punktepaar zu den Doppelpunkten harmonisch liegt. — Diese letztere Beziehung läßt sich übrigens auch direkt aus dem Doppelverhältnis entnehmen, wie in Antwort 57. Denn da in den Ordnungselementen X und Y die Punkte $P_1 P_2$ bezw. $Q_1 Q_2$ zusammenfallen, so erhält man gleiche Doppelverhältnisse $(A_1 A_2 P_1 Q_2) = (A_2 A_1 P_2 Q_1) = (AA'XY) = (A'AXY)$. Und wenn ein Doppelverhältnis gleichbleibt bei Vertauschung eines Elementepaares, so muß sein Wert gleich -1 sein, und die Punkte XY müssen zu den Punkten des beliebigen Paares AA', also zu den Punkten jedes Paares harmonisch liegen.

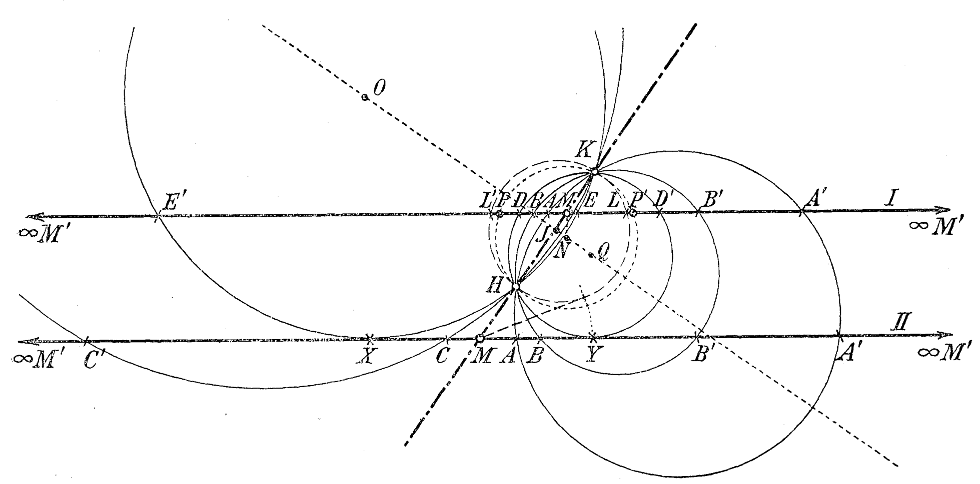
Erkl. 204. Bestimmung und Konstruktion von Elementen einer involutorischen Punktreihe wird durch die Maßbeziehungen ebenfalls ermög-

licht. Und zwar lassen sich auch hier die infolge des Hinzukommens von Punkt M gegenüber Satz 25 etwas erweiterten drei verschiedenen Fälle unterscheiden: I) Gegeben der Mittelpunkt M und dazu 1 der Zahlenwert von $\pm k^2$, oder I 2) M und der eine Ordnungspunkt, oder I 3) da $MX = MY$, nur die beiden Ordnungspunkte; bezw. I 2) M und der eine Potenzpunkt, oder I 3), da $MP = MP'$, die beiden Potenzpunkte. Gegeben ist in jedem dieser Fälle das Produkt der Abstände $MA \cdot MA'$ eines beliebigen Punktepaares, so daß für einen beliebig gegebenen Punkt A sofort gefunden wird $MA' = \frac{\pm k^2}{MA}$ oder $\frac{\overline{MX}^2}{MA}$ bezw. $\pm \frac{\overline{MP}^2}{MA}$. — II) Gegeben ein zugeordnetes Punktepaar AA' und dazu 1) M oder II 2) AA' und der innere Ordnungspunkt X, oder II 3) AA' und der äußere Ordnungspunkt Y; bezw. II 2) AA' und P innerhalb oder II 3) AA' und P' außerhalb. Der erste dieser Fälle stimmt mit den vorigen darin überein, daß $MA \cdot MA'$ bekannt, also $MB' = \frac{MA \cdot MA'}{MB}$. Auch kann hier X und Y bezw. P und P' sofort durch Rechnung oder durch Konstruktion des geometrischen Mittels gefunden werden, da $MX = MY$ bezw. $MP = MP'$ gefunden wird als $\pm \sqrt{\pm MA \cdot MA'}$. In den beiden nächsten Fällen weiß man, daß zu $AA'X$ der Punkt Y oder zu $AA'Y$ der Punkt X der vierte harmonische ist, also liefert die Konstruktion denselben innerhalb oder außerhalb AA', je nachdem der gegebene Ordnungspunkt außerhalb oder innerhalb AA' liegt. Durch Berechnung findet man für diesen und die beiden nachfolgenden Fälle M zu X oder M zu Y bezw. M zu P oder M zu P' und damit auch den zweiten Ordnungspunkt bezw. Potenzpunkt, indem man etwa die Strecke AM mit a bezeichnet, die Produktengleichung ansetzt und nach a auflöst, oder die Strecke MX oder MY bezw. MP oder MP' mit x bezeichnet und dieselbe Gleichung nach x auflöst — III) Gegeben zwei Punktepaare A, A'; B, B'. Auch in diesem Falle wird durch Benutzung derselben Gleichung für die Strecke $AM = x$ aus der Rechnung die Lage des Punktes M gefunden. Um durch Konstruktion denselben Fall zu lösen, benutzt man die in Antwort der Frage 59 erörterte Maßbeziehung der involutorischen Reihe zum Kreisbüschel.

Frage 59. Welchen Zusammenhang mit der Planimetrie zeigt die involutorische Punktreihe?

Erkl. 205. Die Lehre vom Kreisbüschel wird erstmals berührt in demjenigen Abschnitte der Planimetrie, wo die Mittelsenkrechte von HK als geometrischer Ort festgestellt wird für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die zwei festen Punkte H und K geht (Vgl. Planimetrie, IV. Teil Antwort 143). Eingehender werden die dreierlei Arten Kreisbüschel behandelt bei der Lehre von den proportionalen Strecken am Kreise (Planimetrie, VI. Teil, Aufg. 283) und besonders bei der Lehre von den Potenzlinien oder Chordalen (Plani-

Antwort. 1) Wenn man durch zwei beliebige feste Punkte H und K (Figur 52) beliebig viele Kreise zieht, so bilden dieselben einen Kreisbüschel, für welchen die Verbindungsgerade HK selber die gemeinsame Potenzlinie ist. Wird nun dieser Kreisbüschel von einer beliebigen Geraden t geschnitten, so entsteht durch die Schnittgerade auf der Potenzlinie ein Schnittpunkt M, in jedem geschnittenen Kreise eine Sehnenstrecke, und auf den beiden von t etwa nur berührten Kreislinien zwei Berührungspunkte X und Y.



Figur 52.

metrie, VIII. Teil, Antwort 78 bis 81), sowie endlich noch bei der Lehre von der Transformation der reciproken Radien (VIII. Teil, Antwort 98). An vorliegender Stelle gelangen zur Verwendung folgende auf den Kreisbüschel bezügliche Eigenschaften: Die Potenzlinie zweier Kreise ist der geometrische Ort für einen Punkt, der für diese Kreise gleichgroße (gleichartige) Potenz, also gleichlange Tangentenabschnitte bezw. gleichlange senkrechte Halbsehnen liefert. Die Gesamtheit aller Kreise mit gemeinsamer Potenzlinie bildet einen Kreisbüschel, und zwar von erster oder zweiter oder dritter Art, wenn die Kreise zwei getrennte reelle, oder zwei zusammenfallende oder zwei imaginäre Punkte gemeinsam haben.

Erkl. 206. In Figur 52 ist ein Kreisbüschel erster Art gezeichnet, indem H und K zwei getrennte Punkte sind. In diesem Falle liegen die Mittelpunkte aller Kreise auf der Mittelsenkrechten JN der Strecke HK. Man könnte aber nach voriger Erklärung 205 auch die beiden Punkte HK auf ihrer Verbindungsstrecke in einem Doppelpunkte (etwa J in Figur 52) zusammenfallen lassen: dann liegen die Mittelpunkte aller Kreise auf der im Doppelpunkte HK auf der Geraden HJK errichteten Senkrechten. Jeder einzelne Punkt M der gemeinsamen Tan-

2) Liegt nun die Schnittgerade t so, daß der Schnittpunkt M auf die Innenstrecke der Punkte HK fällt (Figur 52 I), so müssen auf t notwendig durch alle Kreise des Kreisbüschels Sehnenstrecken ausgeschnitten werden, für welche nach dem Sehnensatz der Planimetrie das Produkt der von M und den Kreisschnittpunkten begrenzten Abschnitte gleich groß ist, und zwar gleich dem Quadrat der senkrechte Halbsehne durch M in allen Kreisen, also

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = \cdots$$
$$= MH \cdot MK.$$

Demnach sind hier A, A'; B, B'... involutorisch gepaarte Punkte einer Reihe, welche den Punkt M als Mittelpunkt und das konstante Produkt MH · MK als Potenz hat. Und zwar ist es eine involutorische Reihe ohne Doppelpunkte, da der Punkt M auf der Innenstrecke von HK, also auch von jeder Sehne AA', BB'... liegt.

3) Liegt die Schnittgerade t so, daß der Schnittpunkt M auf die Außenstrecke der Punkte HK fällt (Figur 52 II), so wird t nicht von allen Kreisen des Büschels ge-

gente aller dieser Kreise hat dann ebenfalls für alle Kreise dieses Kreisbüschels zweiter Art gleichgroße Potenz $= MH \cdot MK$ bezw. $= \overline{MJ}^2$. Um einen Kreisbüschel dritter Art mit gegebenem Punkt M zu zeichnen, benutzt man die Eigenschaft gleichlanger Tangenten von jedem Punkte der Potenzlinie. Man zeichnet also am einfachsten über willkürlich gewählter Centrale MAB als Hypotenusenrichtung (Figur 54) beliebig viele rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamer Kathetenlänge $MR = MS = \cdots$ und konstruiert die Kreise, welche ihren Mittelpunkt auf MAB und die in $R, S \cdots$ senkrecht zu errichtenden zweiten Katheten zu Radien haben.

Erkl. 207. In Figur 52 I ist als Schnittgerade t eine Gerade $A'E'$ so gewählt, daß ihr Schnittpunkt M auf der Verbindungsgeraden HK innerhalb dieser Sehne HK, also auch innerhalb jeder von t ausgeschnittenen Kreissehne AA', $BB' \cdots$ liegt. Würde man M mit jedem Kreismittelpunkt verbinden und in M die Senkrechte auf dieser Zentrale errichten, so würde die „senkrechte Halbsehne" in jedem Kreise entstehen. Und deren Länge wäre jedesmal gleich $\sqrt{MH \cdot MK}$, also jedesmal gleichlang, so daß die Endpunkte aller dieser Halbsehnen auf einem Kreise um M liegen müssen. Für einen einzigen von allen Kreisen des Büschels fällt diese Halbsehne durch M mit t zusammen; und um seinen Mittelpunkt zu erhalten, errichtet man auf t in M die Senkrechte und bringt diese zum Schnitt mit der gemeinsamen Zentrale aller Kreise. Der Schnittpunkt N liefert den Mittelpunkt desjenigen Kreises, dessen Sehne t in M halbiert wird. Folglich sind $MP = MP'$ die Abstände der beiden von M beiderseits gleichweit entfernten involutorisch gepaarten Punkte, d. h. P und P' sind die beiden Potenzpunkte der involutorischen Reihe 52 I, welche keine Ordnungspunkte hat. (Und der Halbkreis über PP', als Gegenstück zum Orthogonalkreis, wird von sämtlichen Kreisen des Büschels halbiert oder unter einem schnitten, sondern nur von denen, welche beiderseits HK größer sind als die Berührungskreise durch H,K mit t. Alle mit t zum Schnitt kommenden Kreise aber liefern Sehnenstrecken, für welche nach dem Sekantensatz der Planimetrie wieder das Produkt der von M und den Kreisschnittpunkten begrenzten Abschnitte gleich groß ist, und zwar gleich dem Quadrat des Tangentenabschnittes von M an alle Kreise, also $MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = \cdots\cdot = \overline{MX}^2 = MH \cdot MK$. Demnach sind auch hier A, A'; $B, B' \cdots\cdot$ involutorisch gepaarte Punkte einer Reihe, welche den Punkt M als Mittelpunkt und das konstante Produkt $MH \cdot MK$ als Potenz und die Berührungspunkte X und Y als Ordnungspunkte hat. Und zwar ist es eine involutorische Reihe mit Doppelpunkten, da der Punkt M auf der Außenstrecke von HK, also auch von jeder Sehne AA', BB' liegt.

4) Die vorliegende Beziehung der involutorischen Punktreihe zum Kreisbüschel ermöglicht nun auch die Konstruktion beliebig vieler gepaarten Elemente der involutorischen Reihe beiderlei Art in Figur 51 I und Figur 51 II. Denn wenn zu einem beliebigen Punkte C der gepaarte Punkt C' gesucht wird, so braucht man nur den durch H, K und C gehenden Kreis zu konstruieren. Sein zweiter Schnittpunkt mit t ist der verlangte Punkt C', weil $MC \cdot MC' = MH \cdot MK$. Man hat also ein sehr einfaches Mittel, um die involutorische Reihe in ihrer ganzen Erstreckung punktweise vollständig darzustellen und vollkommen zu überschauen.

5) Aber auch umgekehrt dient dieselbe planimetrische Auffassungsweise zur Konstruktion der involutorischen Reihe aus gegebenen Bestimmungsstücken, insbesondere auch in dem einen Falle,

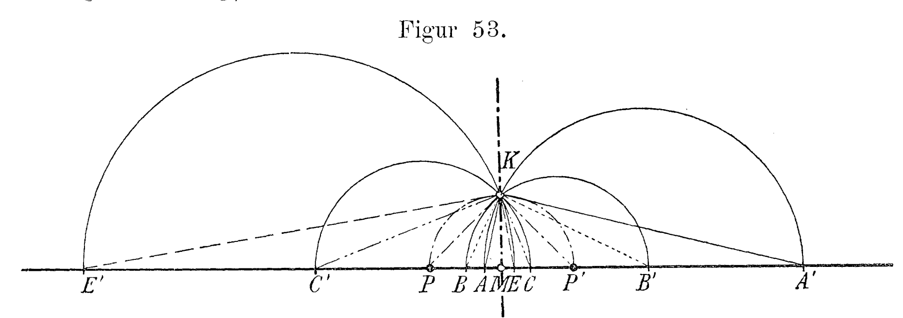
Durchmesser geschnitten.) Bei der Lage in Figur 52 I wird die Gerade t von allen Kreisen des Büschels geschnitten; der kleinste von allen Kreisen der Figur 52 hat seinen Mittelpunkt im Mittelpunkt J zwischen H und K, doch sind seine Schnittpunkte in t in keiner Weise ausgezeichnet, sondern bilden ein Paar L,L', wie alle anderen auch:

$$ML.ML' = MH.MH' = MP.MP' = -\overline{MP}^2.$$

Erkl. 208. In Figur 52 II ist als Schnittgerade t eine Gerade A' C' so gewählt, daß deren Schnittpunkt M mit der Verbindungsgeraden HK außerhalb dieser Sehne HK, also auch außerhalb jeder von t ausgeschnittenen Kreissehne AA', BB'··· liegt. Würde man von M an jeden Kreis des Büschels die Tangente legen, so wäre auf derselben die Länge des Tangentenabschnitts von M an den Kreis jedesmal gleich $\sqrt{MH \cdot MK}$, also jedesmal gleichlang, sodaß die Endpunkte aller dieser Tangentenabschnitte auf einem Kreise um M (dem sogenannten Orthogonalkreise) liegen müssen. Für zwei Kreise des Büschels fällt diese Tangente durch M mit t zusammen: ihre Berührungspunkte liegen auf t beiderseits M im Abstande $MX = MY = \sqrt{MH.MK}$, und diesen erhält man als Tangentenlänge von M an einen beliebigen Kreis des Büschels, bezw. durch Konstruktion des geometrischen Mittels aus MH und MK. Für diese Berührungspunkte X und Y ist $MX^2 = MY^2 = MH.MK = MA.MA' \cdots$, also sind X und Y die Ordnungspunkte der involutorischen Reihe. Die in X und Y berührenden Kreise des Büschels haben ihre Mittelpunkte in den Schnittpunkten

für welchen die rein geometrische Behandlungsweise versagte, und auch die Rechnung nur zur Auflösung einer Gleichung führte. Sind etwa gegeben zwei beliebige Punktepaare AA', BB' einer involutorischen Reihe, einerlei ob erster oder zweiter Art, so legt man durch das eine Paar AA' einen völlig beliebigen Kreis und durch das andere Paar BB' einen zweiten Kreis, der den ersten schneidet, sonst aber ebenfalls ganz beliebig liegen darf. Dann liefern die Schnittpunkte H und K beider Kreise auf t den Mittelpunkt M der involutorischen Punktreihe, und jeder weitere Schnittkreis durch H und K liefert auf t zwei gepaarte Punkte, die Berührungskreise durch H und K aber liefern die Ordnungspunkte, falls solche vorhanden.

Figur 53.



6) Zeichnet man Halbkreise über der Strecke jedes Punktepaares einer involutorischen Reihe ohne Ordnungselemente (Figur 53), so gibt es für jeden dieser Halbkreise eine im Punkte M auf t errichtete senkrechte Halbsehne MK, für welche $\overline{MK}^2 = MA \cdot MA'$. Da aber $MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = \cdots$, so muß auch MK für alle Halbkreise dieselbe Länge haben, d. h. alle diese Halbkreise gehen durch denselben Punkt K. Sie gehen natürlich auch alle durch den zu K in bezug auf t symmetrisch liegenden Punkt H; und t bildet hier die in Figur 52 nur

O und Q von JN mit den in X und Y auf t errichteten Senkrechten. Die Gerade t wird nur von denjenigen Kreisen getroffen, welche ihre Mittelpunkte auf JN beiderseits außerhalb der Strecke dieser beiden genannten Kreismittelpunkte haben.

Erkl. 209. Die in Figur 52 angegebene Konstruktion gestattet aufs einfachste an beiderlei Arten der involutorischen Reihe den gegenseitigen Durchlauf der gepaarten Punkte zu erkennen: In Figur 52 I entspricht dem Punkte P der Punkt P', jedem Punkt zwischen P und M ein Punkt zwischen P' und ∞M', indem die Kreismittelpunkte auf der Mittelsenkrechten von HK von N nach rechts unten ins Unendliche rücken; jedem Punkte zwischen M und P' entspricht ein Punkt zwischen ∞M' und P, indem die Kreismittelpunkte auf der Zentralen von links oben bis zum Punkte N wieder hereinrücken. — In Figur 52 II sind sich selbstentsprechend der Punkt X und ebenso der Punkt Y, jedem Punkte zwischen X und M entspricht ein Punkt zwischen X und ∞M', indem die Kreismittelpunkte auf JN von O nach links oben ins Unendliche rücken; jedem Punkte zwischen M und Y entspricht ein Punkt zwischen Y und ∞M', indem die Kreismittelpunkte von Q nach rechts unten ins Unendliche rücken. Die Kreise mit Mittelpunkten zwischen O und Q kommen für Figur 52 II gar nicht in Betracht. — Gemeinsam bei beiderlei involutorischen Punktreihen ist also der Umstand, daß allen Punkten zwischen P und P' bezw. zwischen X und Y (welche in der Figur mit den ungestrichenen Buchstaben bezeichnet sind) Punkte außerhalb PP' bezw. XY zugeordnet sind, aber in Figur 52 I auf ungleicher, in Figur 52 II auf der gleichen Seite von M. Ferner entspricht beidemale dem Punkt M der unendliche Punkt ∞M', denn die Gerade HMK ist selbst einer der Kreise durch HK, nämlich der Kreis mit unendlich großem Radius, den man geschlossen denken kann je nach Zutreffen durch die linke oder rechte Hälfte der unendlich fernen Geraden.

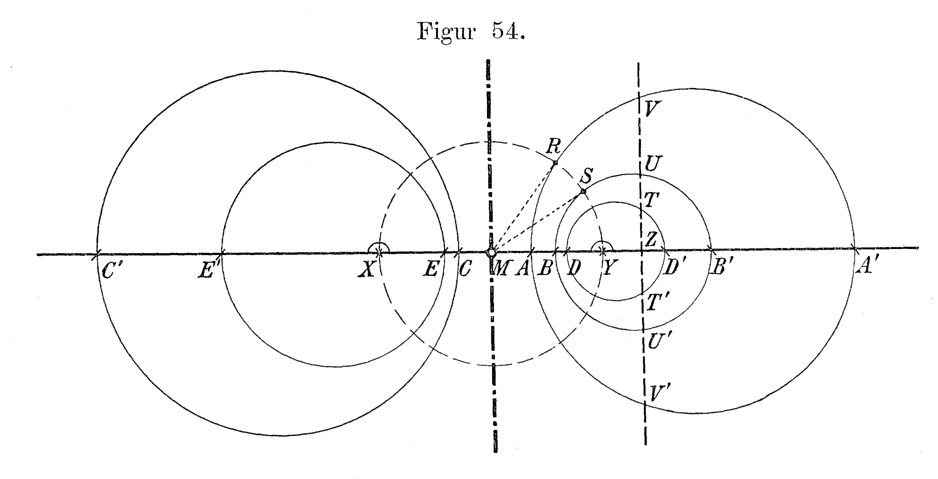
angedeutete Mittelsenkrechte JN der gemeinsamen Sehne HK des Kreisbüschels. Wegen der Halbkreise sind aber die Winkel AKA', BKB', CKC'.... als Peripheriewinkel über dem Durchmesser jedes zugehörigen Kreises sämtlich rechte Winkel, also erhält man folgende merkwürdige Beziehung:

Die Punktepaare einer involutorischen Reihe ohne Doppelpunkte können durch einen rechtwinkligen involutorischen Strahlenbüschel projiziert werden aus einem Punkte, der senkrecht über dem Mittelpunkt der Reihe liegt in einer Entfernung gleich dem Abstande der Potenzpunkte von M.

7) Zeichnet man Halbkreise über der Strecke jedes Punktepaares einer involutorischen Reihe mit Doppelpunkten (Figur 54), so wird beiderseits von M jede Strecke bezw. jeder Halbkreis umfaßt von jeder größeren Strecke bezw. jedem größeren Halbkreis. Daher entsteht kein Kreisbüschel der in Figur 52 I und 53 erhaltenen Art, sondern ein Kreisbüschel mit imaginären Schnittpunkten (vergl. Erkl. 206). Die Halbkreise über den Nullstrecken der selbstentsprechenden Ordnungspunkte schrumpfen zu Punkten zusammen, aber die Strecken MX = MY sind wieder gleich der gemeinsamen Länge aller von M an die sämtlichen Kreise gezogenen Tangentenstrecken. Auf jeder beliebigen Sekante dieses Kreisbüschels wird ebenfalls eine involutorische Reihe ausgeschnitten, und zwar jedesmal eine solche mit Ordnungspunkten, da ihr Schnittpunkt M mit der gemeinsamen Potenzlinie stets außerhalb der Strecke jeder Sehne liegt. Sobald die Sekante t nicht mit der gemeinsamen Zentrale aller Kreise zusammenfällt, gibt es zwei Kreise, welche t beiderseits M in gleichen Abständen berühren: und ihre

Erkl. 210. Der Kreisbüschel erster Art, welcher in Figur 52 verwendet ist, gestattet zweierlei schneidende Geraden: innerhalb und außerhalb HK. Zu ersterer Art gehört auch die Zentrale OJNQ selber; auch auf dieser ist also eine involutorische Punktreihe ausgeschnitten, und zwar von der Art wie Figur 52 I: Mittelpunkt ist J, Potenzpunkte sind hier die Schnittpunkte des kleinsten Kreises HLKL'. Berührungspunkte sind die Ordnungspunkte X, Y.

Figur 54.



Der Kreisbüschel zweiter Art, welcher aus der Gesamtheit der eine Gerade HK in gemeinsam bestimmtem Punkte berührenden Kreise besteht, liefert bloß involutorische Reihen der Art Figur 52 II, da der Innenraum HK zu Null zusammengeschrumpft ist. Und mit diesem Umstande ganz übereinstimmend zeigt sich die Erscheinung beim Kreisbüschel dritter Art (Figur 54). Auch dieses erlaubt nur Sekanten der Art 52 II, denn da die Potenzlinie völlig außerhalb aller Kreise läuft, so liegt auch Punkt M stets außerhalb der Sekantenstrecken. Aber in beiden letzteren Fällen des Kreisbüschels zweiter und dritter Art wiederholt sich das Eintreten der Potenzgeraden selber als Kreis mit unendlich großem Radius, der zum Punkt M den unendlich fernen Punkt ∞M' zuordnet.

Erkl. 211. In Berücksichtigung des übereinstimmenden Ergebnisses der dreierlei Kreisbüschel kann die Angabe der obigen Antwort über die Konstruktion der involutorischen Reihen aus zwei gegebenen Punktepaaren dahin erweitert werden, daß die beiden zur Zeichnung erforderlichen Kreise bei der involutorischen Reihe der Figur 52 II nicht unbedingt einander schneiden müssen. Es dient nur zur Vereinfachung der Konstruktion, wenn die Kreise einander schneiden, weil dann die Sekante HK sich unmittelbar ergibt als Potenzlinie eines Kreisbüschels erster Art. Wenn die Kreise einander berühren, so liefert ebenso die gemeinsame Tangente als Potenzlinie eines Büschels zweiter Art den Mittelpunkt M durch ihren Schnittpunkt mit t. Und wenn die Kreise einander gar nicht treffen, so bestimmen sie dennoch einen Kreisbüschel dritter Art; aber dessen Potenzlinie kann leicht konstruiert werden (durch gleichlange Tangenten oder durch Hinzunehmen eines dritten beliebigen Schnittkreises) und liefert wiederum den Mittelpunkt M und zugehörige Punktepaare. — Daß bei einer involutorischen Reihe nach Figur 52 I überhaupt nur Kreise möglich sind, die einander schneiden, geht aus der Lage der Punkte hervor und stimmt damit überein, daß nur der Kreisbüschel erster Art durch Sekanten zwischen H und K überhaupt solche Reihen liefern kann.

Erkl. 212. In Figur 53 gilt als gegeben die involutorische Reihe $M A A' B B' E E' P P' \cdots$ Und zwar ist dies in der Zeichnung, soweit in Figur 52 I und 53 dieselben Buchstaben auftreten, auch genau dieselbe Reihe, d. h. die gleichbenannten Punkte beidemale in gleichen Abständen. Dabei wird aber in Figur 53 t angesehen als Zentrale aller Büschelkreise. Es fallen also in dieser Zeichnung die Punkte M, J, N in den einen Punkt M zusammen; der Kreis $L K L' H$ mit Mittelpunkt N fällt mit dem Kreis $P K P' H$ zusammen in den Halbkreis über $P P'$. In Figur 52 I ist nur ein einziger Büschelkreis, für welchen t Durchmesser ist: derselbe hat seinen Mittelpunkt im Schnittpunkt von $J N$ mit t, etwa im Punkte B; — in Figur 53 haben sämtliche Büschelkreise die Gerade t als Durchmesser. Daher erzeugen in Figur 53 gleichgroße Kreise beiderseits $M K$ auch symmetrisch liegende Punktepaare beiderseits M, in Figur 52 I aber gehören zu gleichgroßen Kreisen nicht symmetrische Punktepaare, und umgekehrt zu symmetrischen Punktepaaren nicht gleiche Kreise. — Daß aber Halbkreise, welche über involutorisch zugeordneten Punktepaaren einer Punktreihe gezeichnet werden, sämtlich demselben Kreisbüschel angehören müssen, folgt aus dem in vorstehender Antwort geführten Beweise, daß die auf dem Durchmesser t senkrechte Halbsehne $M K$ für alle Kreise dieselbe sein muß.

Erkl. 213. Die besondere Wichtigkeit der Figur 53 liegt weniger in der Eigenschaft der Halbkreise selber, als in der Beziehung der Punktreihe zu dem involutorischen Büschel mit Scheitel K. Die Besonderheit dieser Art von Büschel wird später noch besonders behandelt. Der in obiger Antwort ausgesprochene Satz aber zeigt keineswegs eine Eigentümlichkeit bloß der involutorischen Punktreihen, sondern bildet nur die Wiederholung eines auch für nicht involutorisch liegende Punktreihen auf gemeinsamem Träger bereits in Erklärung 306 des I. Teiles nachgewiesenen Satzes. Dort war gezeigt, daß auch beliebig liegende gleichlaufende projektivische Punktreihen ohne Doppelpunkte auf gemeinsamem Träger stets projiziert werden können durch zwei kongruente gleichlaufende Strahlenbüschel in vereinigter Lage. Dasselbe ist aber in Figur 53 eingetreten. Denn faßt man die Strahlen von K nach den Punkten $E' C' P B A$ der Reihe nach als Strahlen eines ersten Büschels auf, so sind die Strahlen von K nach den gepaarten Punkten $E C P' B' A'$ die entsprechenden Strahlen eines zweiten Büschels; und da die Punkte $E' C' P B A$ und $E C P' B' A'$ zugeordnete Punkte zweier projektivischen Punktreihen auf gemeinsamem Träger in involutorischer Lage sind, so ist auch das erste Büschel projektivisch zum zweiten. Da aber die Winkel $E' K E = C' K C = P' K P = B K B' = A K A' = 90^0$, so sind auch die Einzelwinkel $E' K C' = E K C$, $C' K P = C K P'$, $PKB = P'KB'$, $BKA = B'KA'$ u. s. w. Demnach besagt der Satz im sechsten Teile obiger Antwort genau das Gleiche, wie der Satz in Erklärung 306 des I. Teils.

Erkl. 214. Die Lage des Punktes K, aus welchem die beiden projektivischen Reihen durch kongruente Büschel projiziert werden können, ist in Erklärung 306 des I. Teils bestimmt durch den Abstand $\sqrt{F_2 M_1 . M_1 M_2}$, wobei F_2 der eine Fluchtpunkt, M_1 der Mittelpunkt beider Fluchtpunkte und M_2 der diesem Punkte M_1 projektivisch zugeordnete ist. Werden die beiden projektivischen Punktreihen in involutorischer Lage auf dem gemeinsamen Träger zusammengelegt, so werden beide Fluchtpunkte F_2 und G_1 zum Mittelpunkt M der Reihe, so fallen also F_2 G_1 M_1 in einen einzigen Punkt M zusammen, und sein gepaarter Punkt M_2 wird zum unendlich fernen Punkt. Daher erhält jener Ausdruck $F_2 M_1 . M_1 M_2$ den unbestimmten Wert $0 . \infty$. Und als Wert dieses unbestimmt werdenden Produktes tritt nun bei der involutorischen Lage beider Reihen die bestimmte Größe $M K = M P' = \sqrt{M A . M A'} = \sqrt{M M . M M'} = \sqrt{0 . \infty}$ ein. In der Tat liefern die Potenzpunkte $P P'$ das einzige gleichschenklige rechtwinklige Dreieck mit Spitze K; und wenn K auch mit $\infty M'$ verbunden wird, so ist auch

der Winkel MKM′ ein Rechter, wie alle anderen Winkel zweier zugeordneten Strahlen aus K.

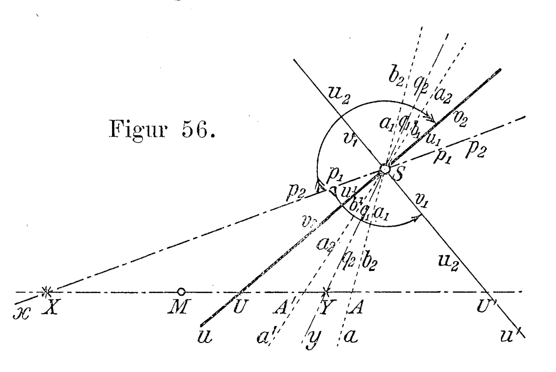
Erkl. 215. Daß auch bei einer involutorischen Reihe mit Ordnungspunkten die Halbkreise über den Strecken zugeordneter Punktepaare zu Kreisen eines Kreisbüschels gehören, beweist man am einfachsten durch die Tangenten von M an diese Kreise. Für jedes Punktepaar ist $\sqrt{MA.MA'} = \sqrt{MB.MB'}$ gleichgroß, und zwar ist dies gleich der Tangentenstrecke von M an jeden Kreis. Demnach liegen die Endpunkte R, S all dieser Tangenten gleichweit von M, also auf einem Kreise um M, und M ist ein Punkt gleicher Potenz für alle Kreise. Hiernach ist aber die in M auf der Zentralen errichtete Senkrechte die Potenzlinie, und die Gesamtheit aller Kreise bildet das Büschel, welches diese Senkrechte zur Potenzlinie hat. Da jeder Punkt dieser Potenzlinie ebenfalls gleichlange Tangenten an alle Kreise liefert, so sind nach Antwort 80 des VIII. Teiles der Planimetrie nicht nur der Kreis XRSY, sondern auch alle anderen Kreise durch X und Y Orthogonalkreise des vorhandenen Kreisbüschels und liefern selber ein Kreisbüschel erster Art, dessen Kreise sämtlich durch die beiden Punkte X und Y hindurchgehen.

Frage 60. Welche Eigenschaften des involutorischen Strahlenbüschels ergeben sich durch Anknüpfung an die metrische Behandlung der projektivischen Strahlenbüschel?

Antwort. Wenn je zwei Strahlenpaare der beiden involutorisch zusammengelegten Büschel einander doppelt entsprechen, so muß dies auch zutreffen für die beiden einander entsprechenden Normalstrahlen beider Büschel $u_1 \perp v_1$ und $u_2 \perp v_2$. Nun liefern aber nach Satz 8 des I. Teiles die Winkel von je zwei entsprechenden Strahlen mit je einem ungleichnamigen der zugeordneten Normalstrahlen ein konstantes Produkt ihrer trigonometrischen Tangentenfunktionen, folglich muß man auch hier gleiche Produkte erhalten

Figur 55.

Erkl. 216. Unter den zugeordneten Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel sind in der rein geometrischen Auffassungsweise keinerlei besonders ausgezeichnete Strahlenpaare. Anders in der metrischen Auffassung: da treten zweimal zwei Strahlen des einen Büschels in eigentümliche Beziehung zu ihren entsprechenden des anderen. Es sind nämlich erstens diejenigen beiden aufeinander senkrecht



Figur 56.

stehenden Strahlen $u_1\, v_1$ des ersten Büschels, welchen auch im zweiten Büschel wieder zwei aufeinander senkrecht stehende Strahlen $u_2\, v_2$ entsprechen, also die sogenannten zugeordneten Normalstrahlen. Und es sind zweitens diejenigen beiden zu u_1 (bezw. v_1) beiderseits gleichgeneigten Strahlen $p_1\, q_1$ des ersten Büschels, denen auch im zweiten Büschel wieder zwei Strahlen $p_2\, q_2$ entsprechen, welche zu v_2 (bezw. u_2) beiderseits die miteinander und mit beiden vorigen Winkeln gleichgroßen Neigungswinkel besitzen:

$$(p_1\, u_1) = (u_1\, q_1) = (p_2\, v_2) = (v_2\, q_2)$$

bezw.

$$(p_1\, v_1) = (v_1\, q_1) = (p_2\, u_2) = (u_2\, q_2).$$

Diese beiden letzteren Strahlen heißen die Potenzstrahlen beider Büschel. Diese Beziehungen sind zur Verdeutlichung der Figuren 55 und 56 nochmals besonders dargestellt in den Figuren 57 und 58. Man hat also in Figur 55 und 56 ebenso wie in Figur 57 und 58 je fünf Strahlen der beiden Büschel $S_1\, S_2$, darunter jeweils die besonderen Strahlen $u_1\, u_2$, $v_1\, v_2$, $p_1\, p_2$, $q_1\, q_2$ und nur das einzige allgemeine Strahlenpaar $a_1\, a_2$. Und zwar in Figur 58 links und rechts zweimal dasselbe Büschel S_2, nur links gleichlaufend mit S_1 in Figur 57, rechts ungleichlaufend mit S_1 in Figur 57.

aus den Tangentenfunktionen der Winkel je zweier involutorisch gepaarten Strahlen $a\,a'$, $b\,b'$ mit den ungleichnamigen Normalstrahlen. Man hat also an Figur 55 und 56 einerseits mit u und v:

$$\operatorname{tg}(u_1\, a_1) \cdot \operatorname{tg}(v_2\, a_2) = \operatorname{tg}(u_1\, b_1) \cdot \operatorname{tg}(v_2\, b_2) = \cdots \text{ const.},$$

bezw.

$$\mathbf{tg}\,(\mathbf{u\,a}) \cdot \mathbf{tg}\,(\mathbf{u\,a'}) = \text{const.},$$

anderseits mit v und u:

$$\operatorname{tg}(v_1\, a_1) \cdot \operatorname{tg}(u_2\, a_2) = \operatorname{tg}(v_1\, b_1) \cdot \operatorname{tg}(u_2\, b_2) = \cdots \text{ const.},$$

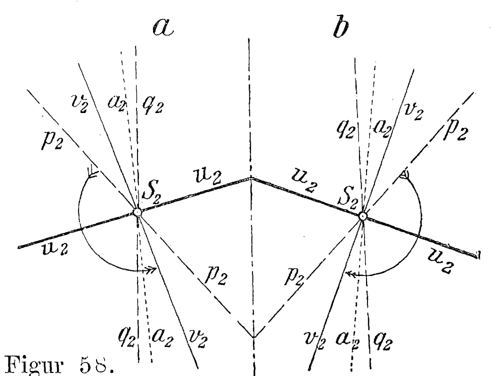
bezw.

$$\mathbf{tg}\,(\mathbf{u'\,a}) \cdot \mathbf{tg}\,(\mathbf{u'\,a'}) = \text{const.}$$

Da aber $u_1 \perp v_1$, bezw. $u \perp u'$, so ist $\sphericalangle(u\,a) = 90^0 - (u'\,a)$ und $\sphericalangle(u\,a') = 90^0 - (u'\,a')$, also $\operatorname{tg}(u\,a) = \operatorname{ctg}(u'\,a)$ und $\operatorname{tg}(u\,a') = \operatorname{ctg}(u'\,a')$. Und folglich sind das erste und zweite der vorgenannten konstanten Produkte zwei reziproke Werte.

2) Diese beiden Produkte werden genannt die Potenzen des involutorischen Strahlenbüschels und haben als reziproke Größen stets beide das gleiche Vorzeichen. Und zwar besitzen sie das positive Vorzeichen, wenn die beiden Strahlenbüschel ungleichlaufend

Figur 57.



Figur 58.

Erkl. 217. Der Satz 8 des ersten Teiles lautet: „In zwei projektivisch verwandten Strahlenbüscheln hat das Produkt um den gemeinsamen Scheitel herumgehen (Figur 56); denn dann liegt jedes zugeordnete Strahlen-

der trigonometrischen Tangenten der Winkel von je zwei entsprechenden Strahlen mit je einem ungleichnamigen der zugeordneten Normalstrahlen einen konstanten Wert." Dieser Wert heißt die „Konstante der projektivischen Beziehung" oder die „Potenz der projektivischen Beziehung". Sind also $u_1 \perp v_1$ und $u_2 \perp v_2$ in Figur 57, 58 bezw. 55, 56 die zugeordneten Normalstrahlen, so gilt für beliebige projektivisch zugeordnete Strahlenpaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ die Gleichung $tg(u_1 a_1) \cdot tg(v_2 a_2) = tg(u_1 b_1) \cdot tg(v_2 b_2)$. Ist hierin (wie in Figur 55 und 56) $(u_1 a_1) > (u_1 b_1)$, d. h. u_1 ferner von a_1, als von b_1 — so muß (da die Tangentenfunktionen mit den Winkelgrößen zu- und abnehmen) $(v_2 a_2) < (v_2 b_2)$, d. h. v_2 näher bei a_2, als bei b_2. Und nur für die zwei bestimmten Strahlenpaare $p_1 q_1$ und $p_2 q_2$, welche beiderseits in gleichen Neigungswinkeln zu den ungleichnamigen Normalstrahlen u_1 und v_2 bezw. v_1 und u_2 liegen, ist gleichzeitig $(u_1 p_1) = (v_2 p_2) = (u_1 q_1) = (v_2 q_2)$, erstere beiden Winkel je nach der einen, letztere beiden je nach der entgegengesetzten Richtung in ihrem Büschel gemessen.

Erkl. 218. In Figur 57 sind die Strahlen des Büschels S_1 in der Reihenfolge $p_1 u_1 q_1 a_1 v_1$ mit der Umlaufsrichtung gegen den Uhrzeiger durch den Pfeil bezeichnet. In Figur 58 sind im projektivischen Büschel S_2 links und rechts die Strahlen ebenfalls in der Reihenfolge $p_2 u_2 q_2 a_2 v_2$ durch den Pfeil bezeichnet. Hier ist aber in Figur 58a wieder Umlaufsrichtung gegen den Uhrzeiger, in Figur 58b aber mit dem Uhrzeiger, denn Figur 58a und b geben dasselbe Büschel S_2 in der einen und anderen Umlaufsrichtung, gerade gespiegelt gegen die Mittelaxe. — In Figur 55 gelangt nun Büschel S_1 der Figur 57 zur Deckung mit dem gleichwendigen Büschel S_2 der Figur 58a, in Figur 56 mit dem gegenwendigen Büschel S_2 der Figur 58b, und zwar so, daß jedesmal die Schenkel des rechten Winkels $u_1 v_1$ von S_1 vertauscht auf die Schenkel des rechten Winkels $v_2 u_2$ zu liegen kommen,

paar im gleichen rechtwinkligen Winkelraum von u und v, so daß die Winkel $(u_1 a_1)$ und $(v_2 a_2)$ bezw. (ua) und (ua') beide spitze Winkel sind. Und die Strahlen aa' liegen nicht getrennt durch die Strahlen uu'. Dagegen hat das Produkt das negative Vorzeichen, wenn die beiden Strahlenbüchel gleichlaufend um den gemeinsamen Scheitel herumgehen (Figur 55); denn dann liegen die Strahlen jedes zugeordneten Strahlenpaares in ungleichen rechtwinkligen Winkelräumen von u und v, so daß von den Winkeln $(u_1 a_1)$ und $(v_2 a_2)$ bezw. (ua) und (ua') stets der eine spitz, der andere stumpf ist, also der eine Funktionswert tg bezw. ctg positiv, der andere negativ. Und die Strahlen aa' liegen innen und außen getrennt durch die Strahlen uu'.

3) Das Tangentenprodukt $tg(ua) \cdot tg(ua')$ entsteht aus zwei gleichgroßen Faktoren $tg(up) = \pm tg(up')$, wenn man als gepaarte Strahlen die beiden sogenannten Potenzstrahlen der beiden Einzelbüschel ins Auge faßt, welche beiderseits unter gleichen Winkeln gegen die beiden ungleichnamigen Normalstrahlen liegen. Selbstentsprechend kann jeder der beiden Potenzstrahlen nach dem vorigen aber nur im Falle der ungleichlaufenden Einzelbüschel werden (Figur 56). Daher werden dieselben auch nur im letzteren Falle zu Ordnungselementen x, y des Büschels, nicht auch im ersteren Falle der gleichlaufenden Einzelbüschel. — Durch diese beiden Feststellungen 2 und 3 sind nun die beiden Sätze 23 und 23a auch für involutorische Strahlenbüschel selbständig nachgewiesen.

4) Wenn in Figur 56 p_1 und p_2 in x, q_1 und q_2 in y zusammenfallen, so ist für das willkürlich ausgewählte Strahlenpaar aa':

also v_2 auf u_1, u_2 auf v_1. Von den Pfeilen geben dabei wieder die einfach gefiederten den beidemale gleichbleibenden Umlauf von S_1 an, die doppeltgefiederten den Umlauf von S_2.

Erkl. 219. Dabei entsprechen einander in Figur 55 die Winkel $(q_1 v_1)$ und $(q_2 v_2)$. Wenn also a_1 im Winkel $(q_1 v_1)$ liegt, so liegt a_2 im Winkel $(q_2 v_2)$, so daß, wenn der Winkel $(u_1 a_1)$ ein spitzer wird, der Winkel $(v_2 a_2)$ bei Messung in derselben Umlaufsrichtung vom gemeinsamen Schenkel $u_1 = v_2$ aus ein stumpfer Winkel wird, und nur bei Messung in entgegengesetzter Umlaufsrichtung als spitzer Winkel erscheint. Beide Umstände machen $tg(v_2 a_2)$ negativ, also das Produkt $tg(u_1 a_1) \cdot tg(v_2 a_2)$ negativ; und ebenso haben die Winkel $(v_1 a_1)$ und $(u_2 a_2)$, wenn beide als spitze Winkel gemessen werden sollen, entgegengesetzte Umlaufsrichtung vom gemeinsamen Schenkel $v_1 = u_2$ aus, liefern also wieder negatives Tangentenprodukt. — Auch bei Figur 56 entsprechen einander die Winkel $(q_1 v_1)$ und $(q_2 v_2)$. Wenn also wieder a_1 im Winkel $(q_1 v_1)$ liegt, so liegt a_2 im Winkel $(q_2 v_2)$, aber diesmal so, daß, wenn der Winkel $(u_1 a_1)$ ein spitzer ist, der Winkel $(v_2 a_2)$ ebenfalls ein spitzer ist, gemessen vom gemeinsamen Schenkel $u_1 = v_2$ aus, daß also das Tangentenprodukt positiv wird; und ebenso haben die Winkel $(v_1 a_1)$ und $(u_2 a_2)$ spitze Winkelwerte bei gleicher Messungsrichtung vom gemeinsamen Schenkel $v_1 = u_2$ aus.

Erkl. 220. In Figur 55 und 56 sind die Strahlen a_1 von S_1, aufgefaßt als Strahlen des anderen Büschels S_2, bezeichnet als b_2. Wegen des Doppeltentsprechens in jedem Paare zugeordneter Strahlen muß daher a_2 von S_2, aufgefaßt als Strahl des Büschels S_1, als b_1 bezeichnet werden, so daß $a_1 = b_2$, $a_2 = b_1$. Zugleich sind unterhalb der die Büschel schneidenden Geraden die den Strahlen $p_1 = q_2$, $u_1 = v_2$, $a_1 = b_2$ bezw. p, u, a involutorisch zugeordneten, nämlich $p_2 = q_1$, $u_2 = v_1$, $a_2 = b_1$, bezw. als p', u', a' bezeichnet. Man hat also zwar in jedem

$$\mathbf{tg\,(u\,a)\,tg\,(u\,a') = tg^2\,(u\,x) = tg^2\,(u\,y)}$$
$$= ctg\,(u'\,a) \cdot ctg\,(u'\,a') = ctg^2\,(u'\,x)$$
$$= ctg^2(u'\,y) = tg^2\frac{(x\,y)}{2} = ctg^2\frac{180-(x\,y)}{2}.$$

Demnach sind (vergl. Antwort 1 der Frage 23 des II. Teils) a und a' zwei Strahlen, deren Winkel durch die Strahlen x und y innen und außen harmonisch geteilt wird, und u und u' sind die Winkelhalbierenden der Strahlen x und y. Hiermit ist aber, da a und a' ein ganz beliebiges Strahlenpaar ist, auch Satz 24 für involutorische Strahlenbüschel bewiesen. Und die Strahlen u, u', zu deren beiden Seiten nicht nur in Figur 56 die Ordnungselemente x und y, sondern auch in Figur 55 die zwei Potenzstrahlen $p_{12}\, q_{12}$ und überhaupt je zwei das gleiche Produkt

$tg\,(ua) \cdot tg\,(u\,a')$ bezw. $ctg\,(u'\,a) \cdot (u'\,a')$

ergebende Strahlenpaare symmetrisch angeordnet liegen, heißen auch die Axenstrahlen oder die Axen des involutorischen Strahlenbüschels.

5) Da in beiderlei involutorischen Strahlenbüscheln (mit und ohne Ordnungselemente) jedes projektivisch zugeordnete Strahlenpaar doppelt entsprechend sein muß, so entstehen lauter gleichgroße Winkel zwischen den projektivisch zugeordneten Strahlen: die Winkel $(a_1 b_1) = (b_2 a_2)$, $(c_1 d_1) = (d_2 c_2)$ und alle ähnlichen sind bei gleicher Winkelgröße mit vertauschten Endschenkeln aufeinandergefallen. In der Tat sind nach Satz 8a des ersten Teils in zwei projektivischen Strahlenbüscheln stets zwei Gruppen gleichgroßer Winkel zwischen zugeordneten Strahlen vorhanden, und zwar schließen die gleichen Winkel der einen Gruppe jeweils von den zugeordneten Normalstrahlen des betreffenden Büschels den einen ein, den andern aus,

der involutorisch zusammengelegten Einzelbüschel S_1 und S_2 je sechs Einzelstrahlen a b p q u v, aber im involutorischen Büschel doch nur je drei Paar zusammengehörige Strahlenpaare a a′, u u′, und dazu in Figur 55 p p′, in Figur 56 die Ordnungsstrahlen x und y. Und zwar liegen in Figur 55 die Paare sämtlich getrennt, nämlich a a′ mit u u′ und a a′ mit p p′. In Figur 56 aber liegen a a′ nicht getrennt mit u u′, wohl aber a a′ getrennt durch x und y, u u′ getrennt durch x und y.

Erkl. 221. Das konstante Tangentenprodukt der Winkel gepaarter Strahlen mit den Normalstrahlen ist in Figur 55:

$$\operatorname{tg}(u\,a) \cdot \operatorname{tg}(u\,a') = \operatorname{tg}(u\,p) \cdot \operatorname{tg}(u\,p')$$
$$= -\operatorname{tg}^2(u\,p) = -\operatorname{tg}^2(u\,p')$$

bezw.

$$= \operatorname{ctg}(u'\,a) \cdot \operatorname{ctg}(u'\,a') = \operatorname{ctg}(u'\,p) \cdot \operatorname{ctg}(u'\,p')$$
$$= -\operatorname{ctg}^2(u'\,p) = -\operatorname{ctg}^2(u'\,p').$$

Denn weil $(u'\,a) = 90^0 - (u\,a)$ und $(u'\,a') = 90^0 + (u\,a')$, also

$$\operatorname{ctg}(u'\,a) = \operatorname{ctg}(90^0 - u\,a) = \operatorname{tg}(u\,a)$$

und

$$\operatorname{ctg}(u'\,a') = \operatorname{ctg}(90^0 + u\,a') = -\operatorname{tg}(u\,a'),$$

bestätigt sich die erste Gleichheit. Ebenso liefern $(u'\,p) = 90^0 + (u\,p)$, $(u'\,p') = 90^0 - (u\,p')$ auf dieselbe Weise d e Gleichheit der einzelnen Größen der zweiten Zeile mit den jeweils darüberstehenden Tangentenprodukten bezw. Tangentenquadraten der ersten Zeile. Und zum Beweise der Gleichheit der Größen der zweiten Zeile unter sich dient eine Ersetzung etwa des Winkelschenkels p durch seinen Gegenschenkel, also $(u'\,p_1) = 180^0 - (u'\,q_2) = 180^0 - (u'\,p')$, folglich $\operatorname{ctg}(u'\,p) = -\operatorname{ctg}(u'\,p')$.

Erkl. 222. In Figur 56 sind die entsprechenden Werte der Potenz des involutorischen Büschels

$$\operatorname{tg}(u\,a) \cdot \operatorname{tg}(u\,a') = \operatorname{tg}(u\,p) \cdot \operatorname{tg}(u\,p')$$
$$= +\operatorname{tg}^2(u\,x) = +\operatorname{tg}^2(u\,y)$$

bezw.

$$= \operatorname{ctg}(u'\,a) \cdot \operatorname{ctg}(u'\,a') = +\operatorname{ctg}^2(u'\,x)$$
$$= +\operatorname{ctg}^2(u'\,y).$$

Die Gleichheit der entsprechenden Größen der zweiten und ersten Zeile ergibt sich

die der anderen Gruppe beide aus bezw. beide ein. Es ist also bei dem involutorischen Strahlenbüschel ohne Ordnungsstrahlen in Figur 55, wo a und a′ in verschiedenen Winkelräumen der Normalstrahlen u u′ liegen, die erstgenannte Gruppe der in beiden Strahlenbüscheln vorhandenen gleichen Winkel zur Deckung gelangt, deren Schenkel je einen der Normalstrahlen einschließen. Bei dem involutorischen Strahlenbüschel mit Ordnungsstrahlen aber in Figur 56, wo a und a′ im gleichen Winkelraume der Normalstrahlen u u′ liegen, ist die zweite Gruppe der in beiden Strahlenbüscheln vorhandenen gleichen Winkel zur Deckung gebracht, d. h. jedesmal der eine Winkel mit vertauschten Endschenkeln auf den gleichgroßen aufgelegt. Von den Winkeln der ersten Art ist der kleinste der Winkel zwischen den Potenzstrahlen $(p_1\,q_1)$, welcher in Figur 55 mit $(p_2\,q_2)$ umgekehrt zusammenfällt; Winkel der zweiten Art gibt es in allen Größen von 180 bis zu Null, und die Winkel $(p_1\,p_1) = 0$ und $(q_1\,q_1) = 0$ in Figur 6 sind mit den als Ordnungsstrahlen erscheinenden Nullwinkeln $(p_2\,p_2)$ bezw. $(q_2\,q_2)$ zur Deckung gelangt.

Wenn aber irgend ein Winkel des Büschels S_2 zur Deckung gelangt mit einem der beiden mit ihm gleichgroßen Winkel in S_1, so müssen auch alle derselben Gruppe angehörigen gleichen Winkelpaare beider Büschel S_1 und S_2 zur Deckung kommen. So sind in Figur 55 $(u_1\,v_1) = 90^0 = (u_2\,v_2)$ bezw. $(p_1\,q_1) = (p_2\,q_2)$ die grundlegenden gleichen Winkel beider Büschel, in Figur 5) ebenfalls $(u_1 v_1) = 90^0 = (u_2 v_2)$ bezw. $x = (p_1\,p_1) = 0 = (p_2\,p_2)$ und $y = (q_1\,q_1) = 0 = (q_2\,q_2)$. Und weil diese besonderen Winkelpaare aufeinander liegen, liegen alle gleichen Winkelpaare aufeinander.

6) Außer der Bestätigung der

hier wie oben aus der Beziehung $(u'x) = 90^0 + (ux)$, $(u'y) = 90^0 - (uy)$; und innerhalb der zweiten Zeile selber gilt $(u'x) = 180^0 - (u'p_2) = 180^0 - (u'y)$, also $\text{ctg}(u'x) = -\text{ctg}(u'y)$.

Erkl. 223. Hat man in einer involutorischen Punktreihe ein Punktepaar AA', so erhält man ein zweites Paar zugeordneter Punkte C, C', indem man die Strecke AA' um den Punkt M umklappt, also zu A und A' die symmetrischen Punkte C und C' aufsucht: die involutorische Punktreihe besitzt Symmetrie in bezug auf den einen Punkt M. Hat man in einem involutorischen Strahlenbüschel ein Strahlenpaar aa', so erhält man ein zweites Paar zugeordneter Strahlen cc', indem man den Winkel aa' umklappt entweder um u oder um u': der involutorische Strahlenbüschel besitzt Symmetrie in bezug auf die zwei Strahlen u, u'. Aber man findet nicht etwa zwei verschiedene neue Strahlenpaare durch Umklappung um den einen oder anderen Axenstrahl, sondern bei Umklappung um u wird a zu c, a' zu c', und bei Umklappung um u' wird wieder a zu c, a' zu c'. Denn da $(uu') = 90^0$, so wird im ersteren Falle $(au) = (uc) = 90^0 - (u'a) = 90^0 - (cu')$; folglich wird auch hier schon $(cu') = (u'a)$, und dieselbe Gleichheit wäre im zweiten Falle das Ergebnis der Umklappung um u'. Und zwar gilt diese Überlegung sowohl für involutorische Büschel mit Ordnungselementen, als für solche ohne Ordnungselemente.

schon durch die geometrische Auffassung des involutorischen Strahlenbüschels aufgefundenen Eigenschaften erhält man somit als neue Hinzufügung die metrischen Beziehungen:

Satz 26a. Die beiden rechtwinklig stehenden gepaarten Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels sind die Axenstrahlen des Büschels. Zu ihnen liegen je zwei der sämtlichen Strahlenpaare symmetrisch, und die von den beiden Strahlen jedes Paares mit ihnen gebildeten Winkel liefern konstantes Produkt der trigonometrischen Tangenten bezw. Kotangenten: negativ bei dem Büschel ohne, positiv bei dem Büschel mit Ordnungsstrahlen, und zwar jeweils gleich dem $\mp$Quadrat dieser Funktionen der Winkel zwischen einem Potenzstrahl bezw. Ordnungsstrahl und einem der Normalstrahlen.

Erkl. 224. Die Strahlen uu' führen hiernach den Namen Axenstrahlen nicht in einem abweichenden Sinne, sondern wirklich im Sinne von Symmetrieaxen für die Strahlenpaare des Büschels. Wie man bei der involutorischen Punktreihe schon alle Beziehungsweisen gepaarter Punkte kennen gelernt hat, wenn man zu allen Punkten etwa zwischen M und P oder zwischen M und X die gepaarten aufgesucht hat, so erkennt man beim involutorischen Büschel alle Beziehungsweisen gepaarter Strahlen, wenn man zu allen Strahlen zwischen u und p oder zwischen u und x die gepaarten aufgesucht hat. — Bei einer involutorischen Punktreihe mit Ordnungspunkten ist die harmonische Beziehung des Mittelpunkts M zum unendlich fernen Punkte in bezug auf die Ordnungspunkte X, Y von selbst erkennbar; und ebenso ist beim involutorischen Büschel mit Ordnungsstrahlen auch die harmonische Beziehung der Normalstrahlen uu' zu den Ordnungsstrahlen x, y offensichtlich, weil erstere den Winkel und Nebenwinkel der letzteren halbieren. Für andere Punkte der Reihe bezw. andere Strahlen des Büschels ergibt sich die harmonische Beziehung zu den Ordnungselementen aus den Gleichungen $MX^2 = MA \cdot MA'$ bezw. $\text{tg}^2(ux) = \text{tg}(ua) \cdot \text{tg}(ua')$.

Erkl. 225. Auch für involutorische Strahlenbüschel lassen sich hier dieselben Überlegungen durchführen, welche in den Erklärungen 200 bis 204 für involutorische Punktreihen angestellt werden: Man spricht von imaginären Ordnungsstrahlen

bei dem Büschel, welcher keine reellen Ordnungsstrahlen hat (200); man findet die gepaarten Strahlen $a a'$ in Figur 55 stets innen und außen getrennt durch $u u'$ und die Strahlen jedes anderen Strahlenpaares, in Figur 56 stets nicht getrennt durch $u u'$ und die Strahlen jedes anderen Strahlenpaares (201); man kann Figur 55 und 56 ineinander überführen, indem man den Büschel S_1 jeweils festhält, aber S_2 um u bezw. um u' umklappt (202) u. s. w. Auch die Bestimmuug des involutorischen Büschels geschieht nach denselben Einzelfällen, wie in Erklärung 204 für die involutorischen Punktreihen; und während dort die Strecken zwischen einzelnen Punkten berechnet werden konnten, so erhält man hier die Winkelgrößen der einzelnen Strahlen, indem z. B. $\operatorname{tg}(u a') = \operatorname{tg}^2(u x) : \operatorname{tg}(u a) = \operatorname{tg}^2(u x) \cdot \operatorname{ctg}(u a)$ bezw. $\operatorname{tg}(u a') = -\operatorname{tg}^2(u p) : \operatorname{tg}(u a) = -\operatorname{tg}^2(u p) \cdot \operatorname{ctg}(u a)$.

Erkl. 226. Einer besonderen Erörterung bedarf noch die Frage nach der Beziehung zwischen den involutorischen Büscheln der Figur 55 und 56 und den auf der schneidenden Geraden entstehenden involutorischen Punktreihen. Die Strahlenpaare aa', uu', pp' erzeugen involutorisch gepaarte Punkte AA', UU', PP'; auch die in Ordnungsstrahlen zusammenfallenden oder selbstentsprechenden Strahlen $p_1 = p_2 = x$ und $q_1 = q_2 = y$ erzeugen die in Ordnungspunkten zusammenfallenden oder selbstentsprechenden Punkte $P_1 = P_2 = X$, $Q_1 = Q_2 = Y$, denn alle diese Beziehungen sind ohne Maßeigenschaften, also durch Projektion übertragen. Aber während $u u'$ und $p p'$ in den Strahlenbüscheln besondere metrische Bedeutung haben, bleiben $U U'$ und $P P'$ Punktepaare ohne jede Auszeichnung in der Reihe. Und während umgekehrt M und $M'\infty$ in der Punktreihe besondere metrische Bedeutung haben, bleibt $m m'$ im Strahlenbüschel ohne jede Auszeichnung: m ist der Strahl SM, m' ist der Parallelstrahl zur Schnittgeraden durch S. In Figur 55 liegt der Parallelstrahl m' zwischen u' und p im Winkel $(v_1 p_1) = (u_2 q_2)$, folglich SM zwischen u und p' im Winkel $(u_1 q_1) = (v_2 p_2)$; in Figur 56 liegt der Parallelstrahl m' zwischen u' und x im Winkel $(v_1 p_1) = (u_2 p_2)$, folglich SM zwischen u und x im Winkel $(v_2 p_2) = (u_1 p_1)$.

Erkl. 227. Da in Figur 56 die Ordnungsstrahlen x und y auch die Ordnungspunkte X und Y ausschneiden müssen, so liegt hier M auch im Mittelpunkt von XY. Diese Beziehung bleibt unbeeinflußt durch jegliche Veränderung der schneidenden Geraden, denn da $x y m m'$ stets vier harmonische Strahlen sind, müssen auch die Punkte $X Y M M\infty$ vier harmonische Punkte werden, also M Mittelpunkt von XY, sobald $M\infty$ unendlich fern, d. h. die Schnittgerade parallel m'. Anders liegt die Sache bei Figur 55 mit PP'. In der involutorischen Reihe ohne Ordnungselemente liefert die Potenzpunkte jenes Punktepaar, dessen Abstände beiderseits M gleichgroß werden, in dem involutorischen Büschel ohne Ordnungselemente liefert die Potenzstrahlen jenes Strahlenpaar, dessen Winkel beiderseits $u u'$ gleichgroß werden. Während also bei der Projektion das Zusammenfallen der Punkte $P_1 P_2$ in X, $Q_1 Q_2$ in Y und das Zusammenfallen der Strahlen $p_1 p_2$ in x, $q_1 q_1$ in y erhalten bleiben muß, trifft dies keineswegs zu für Gleichheit von Strecken und Winkeln. Daher sind PP' in Figur 55 keineswegs Potenzpunkte, M keineswegs Mittelpunkt von PP'. Man hat also festzuhalten das bemerkenswerte Ergebnis:

Satz. Bei Projektion involutorischer Gebilde werden unverändert übertragen die Eigenschaften der Ordnungspunkte und Ordnungsstrahlen und deren harmonischer Beziehung zu den gepaarten Elementepaaren, nicht aber die Eigenschaften der **Potenzpunkte** bezw. Potenzstrahlen und des Mittelpunktes bezw. der zugeordneten Normalstrahlen.



Frage 61. Welche Besonderheiten bezw. Spezialfälle von involutorischen Verwandtschaften können durch besondere Einzelwerte der Potenz auftreten?

Erkl. 228. Die involutorische Verwandtschaft in einer Punktreihe oder einem Strahlenbüschel ist jedenfalls festgelegt durch ein beliebiges Anfangselement und den Wert der Potenz, also durch Punkt M und $\pm k^2$ oder durch X und Y oder P und P' bezw. durch u, u' und $\pm k^2$ oder durch x und y, oder p und p'. Auf der Punktreihe sind alle Punkte gleichwertig bis auf den unendlich fernen, welcher als einziger besondere Eigenschaften aufweist, bei dem Strahlenbüschel sind sämtliche Strahlen ohne Ausnahme gleichwertig. Daher wird es allein der Wert der Potenz sein, welcher Verschiedenheiten der involutorischen Verwandtschaft hervorbringt; und zwar sind die Potenzwerte Null, unendlich und ± 1 diejenigen, welche besondere Beziehungen entstehen lassen, letztere nur beim Strahlenbüschel, erstere bei beiderlei Gebilden, wobei noch in der Punktreihe die unendlich ferne Lage eines Ausgangselementes Berücksichtigung erfordert.

Erkl. 229. Nicht nur durch die rechnende Behandlung aus dem Grenzwerte der Potenz gelangt man zu der im zweiten Abschnitt nebenstehender Antwort erörterten besonderen Art einer involutorischen Punktreihe, sondern auch aus der Figur 52 (S. S. 115) erhält man dieselbe Besonderheit, wenn man nämlich die Senkrechte t durch einen der festen Punkte H (oder K) des Kreisbüschels hindurchgehen läßt. Dann fallen MXY bezw. MPP' mit H (bezw. K) zusammen, und jeder Kreis des Kreisbüschels hat dann den einen Schnittpunkt in diesem Punkte MH, den anderen beliebig sonstwo auf t, einer der Kreise durch H und K berührt tH in H=X, der kleinste aller Kreise ist der Nullkreis H selber, welcher P und P' in H zusammenfallen läßt.

Antwort. 1) Da bei positiver Potenz eine involutorische Verwandtschaft mit Ordnungselementen, bei negativer Potenz eine solche ohne Ordnungselemente auftreten muß, so erhält man eine dazwischenliegende Art von involutorischer Verwandtschaft, wenn der Wert der Potenz zwischen diesen beiden Größengebieten steht, also den Wert $\pm$ Null bezw. $\pm$ unendlich annimmt.

2) Ist bei der involutorischen Punktreihe $MX^2=0$ bezw. $\overline{MP}\cdot\overline{MP'}=0$, so muß Punkt X (also auch Y) bezw. P (also auch P') mit Punkt M zusammenfallen. Zwischen X und Y bezw. zwischen P und P' ist aber von jedem Punktepaar stets der eine Punkt enthalten, also muß bei verschwindendem Werte der Potenzgröße von jedem Punktepaar der eine Punkt in den Punkt M hineinfallen; bezw. zu jedem sonstigen Punkt der Reihe ist der Punkt M der zugeordnete. Dasselbe geht auch hervor aus der Gleichung $MA\cdot MA'=\pm 0$: auch hier kann der Wert 0 nur entstehen, wenn der eine der beiden Faktoren gleich Null wird. Der andere Faktor bezw. die andere Strecke kann dann jeden beliebigen Wert annehmen.

3) Ist bei dem involutorischen Strahlenbüschel $tg^2(ux)=0$ bezw. $tg(up)\cdot tg(up')=0$, so muß wegen der Tangentenfunktion auch $\sphericalangle(ux)=(uy)=0$ bezw. $\sphericalangle(up)=(up')=0$ werden folglich muß Strahl x (also auch y) bezw. p (also auch p') mit u zusammenfallen. Zwischen x und y bezw. zwischen p und p' ist aber von jedem Strahlenpaar stets der eine Strahl enthalten, also muß bei verschwindendem Werte der Potenzgröße von jedem Strahlenpaar der eine Strahl in den Strahl u hineinfallen; bezw. zu jedem sonstigen Strahl des

Erkl. 230. Die in Figur 52 verschieden erscheinenden Involutionen I und II, je nachdem t die Potenzlinie zwischen HK oder außerhalb HK trifft, verlieren ihre Unterscheidung, wenn t durch H selbst hindurchgeht, indem beide Arten gemeinsam in die neue dritte Art übergehen: der Punkt M entspricht dann involutorisch nicht nur dem unendlich fernen M', sondern jedem beliebigen Punkte der Reihe, er mag einerseits oder anderseits M gelegen sein: Auch beim Kreisbüschel zweiter Art entsteht die neue Art Involution, wenn die schneidende Gerade t durch den gemeinsamen Berührungspunkt aller Kreise hindurch geht, z. B. jedesmal, wenn die Axe dieses Kreisbüschels als t genommen wird; dagegen kann das Kreisbüschel dritter Art (Figur 54) keine Involution dieser neuen Art liefern, da diese Kreise keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Erkl. 231. Da die Eigentümlichkeit der neuen Art von Involution keine ausschließlich metrische ist, sondern nur in der Zuordnung aller Elemente des Gebildes zu einem einzigen desselben besteht, so bleibt auch die Art dieser Involution erhalten bei Projektion der Reihe aus beliebigem Punkte. Die Art von Strahlen-Involution beim Strahlenbüschel, welche im dritten und vierten Abschnitt nebenstehender Antwort behandelt wird, geht tatsächlich durch einfache Projektion aus der vorigen Involution in der Punktreihe hervor. Und zwar entsteht die eine (3) oder andere (4) Art, je nachdem der einzelne Strahl, mit welchem alle anderen involutorisch gepaart werden, als u oder u' bezeichnet wird. Umgekehrt erzeugt auch die neue Art Involution eines Büschels auf jeder Schnittgeraden wieder dieselbe neue Art Involution in der Punktreihe, indem der vom Hauptstrahl u bezw. u' ausgeschnittene Punkt zum Punkt M bezw. X oder P wird.

Erkl. 232. Zum ausgezeichneten Strahle u ist bei dieser Art von Strahlen-Involution jeder andere Strahl zugeordnet, darunter also jedenfalls auch der Büschels ist der Strahl u der zugeordnete. Dasselbe geht auch hervor aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}(ua) \cdot \operatorname{tg}(ua') = \pm 0:$$

auch hier kann der Wert 0 nur entstehen, wenn der eine der beiden Faktoren gleich Null, also hier der eine der beiden Winkel gleich 0^0 oder 180^0 wird. Der andere Faktor bezw. andere Winkel kann dann jeden beliebigen Wert annehmen.

4) Da bei dem involutorischen Büschel zweierlei Potenzgrößen mit reziproken Werten auftreten, so ist mit $\operatorname{tg}^2(ux) = \pm 0$ zugleich festgelegt $\operatorname{tg}^2(u'x) = \operatorname{ctg}^2(ux) = \pm$ unendlich. Also muß der zweite Potenzwert unendlich sein, wenn der erste Null ist, und umgekehrt. Würde also $\operatorname{tg}^2(ux)$ bezw. $\operatorname{tg}^2(up)$ gleich unendlich gesetzt, so wäre gleichzeitig $\operatorname{tg}^2(u'x) = 0$ bezw. $\operatorname{tg}^2(u'p) = 0$; folglich würde nun von jedem Strahlenpaar der eine Strahl mit u' zusammenfallen, der andere beliebige Lage haben. Was oben vom Strahle u gilt, würde jetzt vom Strahl u' zu sagen sein.

5) Ist bei einer involutorischen Punktreihe $\overline{MX}^2 = \infty$ oder $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = \infty$, so müssen X und Y bezw. P und P' von M unendlich großen Abstand haben. Also liegt entweder M im Endlichen, und dann müssen X und Y bezw. P und P' mit dem unendlich fernen Punkte M' nach dessen entgegengesetzten Richtungen zusammenfallen; oder es liegt X bezw. P im Endlichen, und dann müssen M und X bezw. M und P' gleichzeitig mit dem unendlich fernen Punkte der Reihe zusammenfallen (s. u. 7). Im ersten sowie im letzten Falle verliert aber der im Endlichen liegende Punkt M bezw. P völlig seine ausgezeichnete Eigenschaft als Mittelpunkt oder Potenzpunkt der Reihe, denn nicht nur zu M bezw. P ist der

zu u senkrechte u'. Mißt man die Winkelgrößen von diesem Strahle u' aus, unter Berücksichtigung des Zusammenfallens jedes zugeordneten Strahls a' mit u, so wird

$$\text{ctg}(u' a) . \text{ctg}(u' a') = \text{ctg}(u' a) . \text{ctg}(u' u) = \text{ctg}(u' a) . \text{ctg}\, 90^0 = 0.$$

Man kann also dem Strahle u', obwohl er nur einer von den vielen zugeordneten Strahlen ist, dennoch die Eigenschaft als zweiter Axenstrahl zuschreiben, da wegen des rechten Winkels zu u das Produkt der Kotangenten der von u' aus gemessenen Winkel immer noch gleich bleibt dem Produkt der Tangenten der von u aus gemessenen Winkel. Umgekehrt erhält man

$$\text{tg}(u' a) . \text{tg}(u' a') = \text{tg}(u' a) . \text{tg}(u' u) = \text{tg}(u' a) . \text{tg}\, 90^0 = \infty,$$

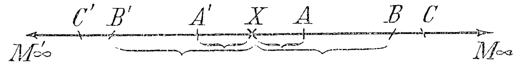
und da 0 und ∞ reziproke Werte sind, so müssen für die beiden Axenstrahlen stets beide Werte wechselseitig zusammen auftreten. Man erhält also den

Satz: Wird für irgend einen Strahl eines Büschels als Axenstrahl das Tangentenprodukt der involutorischen Beziehung gleich Null, oder das Kotangentenprodukt gleich unendlich, so sind alle Strahlen des Büschels zu diesem einzigen zugeordnet; wird für irgend einen Strahl als Axenstrahl das Tangentenprodukt gleich unendlich oder das Kotangentenprodukt gleich Null, so sind alle Strahlen des Büschels zu dem Normalstrahl jenes Strahls zugeordnet.

Erkl. 233. Der vorige Satz zeigt, daß für den involutorischen Strahlenbüschel die beiden Potenzwerte Null und unendlich zur gleichen neuen Art von Involution führen. Anders ist dies bei der Punktreihe. Der Potenzwert Null zwar liefert als eindeutiges Ergebnis die neue Art der Involution. Der Potenzwert Unendlich aber liefert bei der Punktreihe dreierlei Unterscheidung, eigentlich sogar viererlei, woraus aber nur zweierlei verschiedene Ergebnisse entstehen:

a) Hat man eine Punktreihe ohne Ordnungselemente, so kommen in gepaarte Punkt M' bezw. P' unendlich fern, sondern auch zu jedem anderen Punkte der Reihe ist der unendlich ferne Punkt zugeordnet, weil die ganze äußere Strecke der Punkte XY bezw. MM', innerhalb welcher sonst der eine Punkt jedes Punktepaares liegen muß, in den unendlich fernen Punkt zusammenschrumpft. Auch $MA \cdot MA' = \pm\infty$ kann nur erfüllt werden, wenn einer der Faktoren unendlich großen Wert hat; der andere Faktor kann dann beliebigen Wert besitzen.

6) Man erhält also für Potenzwerte von der Größe Null oder Unendlich involutorische Gebilde, bei welchen die Eindeutigkeit der Zuordnung verloren gegangen ist: alle Elemente des Gebildes sind zu einem einzigen Element, dieses einzige Element zu allen anderen zugeordnet. Dieses einzige Element ist bei der Punktreihe die Nullstrecke zwischen den zusammenfallenden Ordnungspunkten bezw. Potenzpunkten, welche entweder im Endlichen liegt und dann auch den Mittelpunkt in sich enthält, oder im Unendlichen liegt und dann jeden beliebigen Punkt im Endlichen als Mittelpunkt haben kann. Bei dem Strahlenbüschel ist jenes besondere Element der Nullwinkel zwischen den zusammenfallenden Ordnungsstrahlen bezw. Potenzstrahlen, unter deren beliebig vielen zugeordneten Strahlen jedenfalls auch der dazu senkrechte Axenstrahl sich befindet.



Figur 59.

7) Ist bei einer involutorischen Punktreihe die Potenz unendlich, also der Mittelpunkt samt dem einen Ordnungspunkt im Unendlichen gelegen (s. o. 5), so liegt

Betracht die Punkte M P P'. Wird $MP = \infty$, so wird auch $MP' = \infty$; und entweder MP oder MP' liegt jedesmal innerhalb einer Strecke gepaarter Punkte (Figuren 51 I und 52 I). Ob also (a I) M im Endlichen bleibt und P mit P' ins Unendliche rückt, oder (a II) der eine Potenzpunkt im Endlichen bleibt und der andere mit M ins Unendliche rückt, jedesmal müssen A und A' durch eine unendlich große Strecke getrennt sein, also kann nur der eine Punkt im Endlichen bleiben, der andere muß ins Unendliche hinausrücken.

b) Hat man eine Punktreihe mit Ordnungselementen, so kommen in Betracht die Punkte M X Y. Wird $MX = MY = \infty$, so erhält man verschiedenerlei Ergebnis, je nachdem (b I) M im Endlichen bleibt und X mit Y ins Unendliche rückt, oder (b II) der eine Ordnungspunkt im Endlichen bleibt und der andere mit M ins Unendliche rückt. Im ersten Falle entsteht die gleiche Art Zuordnung wie zuvor (a I und a II), denn der eine Punkt eines jeden Paares liegt (Figuren 51 II und 52 II) innerhalb X Y, also im Endlichen, der andere außerhalb, also im Unendlichen. Im zweiten Falle aber bleibt im Endlichen der eine Ordnungspunkt, von welchem beiderseits die Punkte der zugeordneten Paare auseinanderrücken. Daher entsteht aus dieser letzten Auffassungsweise eine neue Art der involutorischen Beziehung (Abschnitt 7 der nebenstehenden Antwort).

Erkl. 234. Untersucht man, wie die vorstehenden Erörterungen sich aus den Figuren 52 bis 54 ergeben, so zeigt sich das gemeinsame Ergebnis der Fälle a I und a II aus Figur 52 I. Von zwei Punkten A A' liegt stets der eine innerhalb, der andere außerhalb des Kreises der Potenzpunkte P P'. Damit also $MP = MP' = \infty$ werden kann, muß dieser Kreis selbst unendlich groß werden, folglich die Punkte H K unendlich großen Abstand erhalten, es kann also etwa H im Endlichen bleiben, K ins Unendliche rücken. Dadurch werden alle Einzelkreise zu geraden Linien durch Punkt H,

nur der andere Ordnungspunkt X allein im Endlichen, und zu dessen beiden Seiten liegen die zugeordneten Punkte. Nun kann die Gleichung $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MX}^2$ stets durch Einführung der Strecke MA als Grundstrecke auf die Form gebracht werden:

$$\overline{MA}(\overline{MA} + \overline{AA'}) = (\overline{MA} + \overline{AX})^2, \text{ oder}$$

$$\overline{MA}^2 + \overline{MA} \cdot \overline{AA'} = \overline{MA}^2 + 2\,\overline{MA} \cdot \overline{AX} + \overline{AX}^2.$$

Hier fällt $\overline{MA}^2$ beiderseits fort, und durch Division der übrigen Glieder mit $\overline{MA}$ entsteht:

$$\overline{AA'} = 2\,\overline{AX} + \frac{\overline{AX}^2}{\overline{MA}}.$$

Läßt man nun in dieser für jede involutorische Punktreihe geltenden Gleichung MA unendlich groß werden, so entsteht für das letzte Glied der Wert Null, und es bleibt

$$\overline{AA'} = 2\,\overline{AX}, \text{ oder}$$

$$AX = XA' = \frac{1}{2}AA'.$$

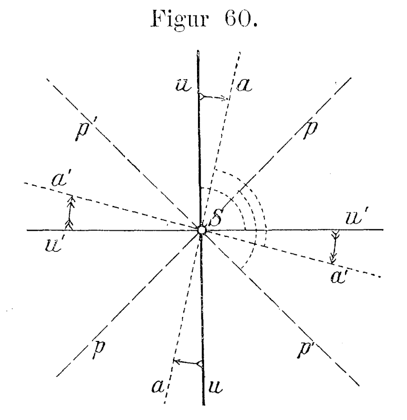
Man erhält also eine involutorische Punktreihe aus lauter solchen Punktepaaren, welche beiderseits des selbstentsprechenden Ordnungspunktes X in gleichem Abstande liegen: je zwei symmetrisch zu X liegende Punkte sind zugeordnete.

8) Während unter den Streckengrößen zwischen 0 und ∞ keine besonders ausgezeichnete sich vorfindet, ist unter den Winkelgrößen noch besonders zu nennen diejenige, für welche der Potenzwert $tg^2\,(u\,p)$ bezw. $tg^2\,(u\,x)$ gleich der Einheit wird. Setzt man wie früher zunächst $tg^2\,(u\,p) = 1$, also $tg\,(u\,p) \cdot tg\,(u\,p') = -1$, so wird $\sphericalangle\,(u\,p) = +45^0$, $\sphericalangle\,(u\,p') = -45^0$, man hat einen involutorischen Strahlenbüschel mit gleichlaufenden Einzelbüscheln, wobei die Potenzstrahlen p p' aufeinander

welche durch je eine Hälfte der unendlich fernen Geraden zu geschlossenen Kreisen ergänzt werden. Der eine Schnittpunkt mit t ist also stets im Endlichen, der andere stets im Unendlichen. Für Figur 52 II entsteht die gleiche Beziehungsweise, wenn die Kreise ausgeartet sind zu geraden Linien durch H; dann hat wieder jeder der unendlich großen Kreise einen Schnittpunkt mit t im Endlichen und einen im Unendlichen. Es ist aber in Figur 52 II für Erzeugung einer unendlich großen Strecke M X gar nicht unbedingt erforderlich, daß diese Ausartung der Kreise eintritt. Denn da hier t außerhalb H K verlaufen muß, und M stets der Schnittpunkt von t mit H K ist, so kann man unendlich ferne Lage von M auch dadurch erzielen, daß man t parallel zu H K verlaufen läßt. Dann liegt t symmetrisch zur Mittelsenkrechten O J N Q, wird also von jedem Kreis in zwei zum Schnittpunkt symmetrischen Punkten getroffen. Einer der Kreise berührt t im Schnittpunkt selber, dieser Berührungspunkt wird zum Ordnungspunkt Z, und in gleichen Abständen zu deren beiden Seiten liegen die gepaarten Punkte T T′, U U′, V V′ (vergl. Figur 54 rechts). Man hat also die im Abschnitt 7 der nebenstehenden Antwort erörterte Art der Involution.

Erkl. 235. Die vorgenannten Ausnahmefälle der involutorischen Beziehung bleiben in Übereinstimmung mit dem Satze 24, wonach beim Auftreten zweier Ordnungselemente je zwei zugeordnete Elemente zu diesen harmonisch liegen müssen. Denn wenn einerseits von vier harmonischen Elementen zwei zugeordnete zusammenfallen, so muß von dem anderen Elementepaar auch noch das eine Element mit jenem gleichen zusammenfallen. So erhält man die nicht mehr eindeutige Beziehung, daß zu jedem beliebigen Punkte bezw. zu jedem beliebigen Strahle nur der einzige besondere Punkt bezw. der einzige besondere Strahl harmonisch zugeordnet ist. Und wenn anderseits der eine von vier harmonischen Punkten unendlich

Figur 60.



senkrecht stehen und mit den Normalstrahlen u u′ beiderseits je gleiche Winkel von 45⁰ bilden. Für jedes beliebige Strahlenpaar wird auch $\operatorname{tg}(ua)\operatorname{tg}(u\,a') = -1$, also

$$\operatorname{tg}(ua') = -\frac{1}{\operatorname{tg}(u\,a)} = -\operatorname{ctg}(u\,a),$$

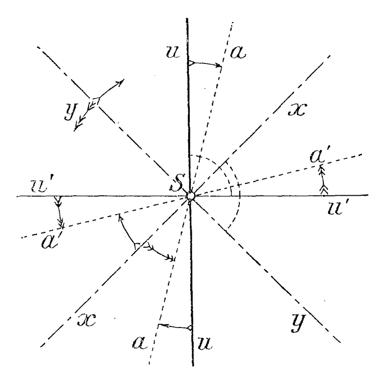
und folglich $\sphericalangle(u\,a') = 90^0 + (u\,a)$, denn $\operatorname{tg}(90^0 + u\,a) = -\operatorname{ctg}(u\,a)$. Demnach wird $(ua')-(ua)=(aa')=90^0$: Der zugeordnete Strahl zu einem gegebenen ist also immer um einen rechten Winkel gegen jenen weiter gedreht, die zugeordneten Normalstrahlen verlieren ihre ausgezeichnete Eigenschaft, indem jedes zugeordnete Strahlenpaar senkrecht steht, der involutorische Büschel hat nicht nur ein, sondern beliebig viele Paare von Axenstrahlen. Man erhält einen Büschel der in Figur 53 bezw. 60 dargestellten Art, welcher durch Drehung eines rechten Winkels um seinen Scheitel entsteht, indem stets der eine Schenkel desselben zum anderen Schenkel involutorisch zugeordnet ist.

9) Setzt man endlich $\operatorname{tg}^2(ux) = +1$, so wird $\sphericalangle(u\,x) = \sphericalangle(y\,u) = 45^0$, man hat einen involutorischen Strahlenbüschel mit entgegengesetzt laufenden Einzelbüscheln, wobei die Ordnungsstrahlen x y aufeinander senkrecht stehen und mit den

weit fort fällt, so muß der zugeordnete zum Mittelpunkt der beiden anderen werden. Letzteres zeigt sich bei der im Abschnitt 7 erörterten Involution (Figur 59): Von ihren zwei selbstentsprechenden Doppelpunkten ist einer der im Endlichen liegende Punkt X, der andere der unendlich ferne Punkt M = M' = Y. Und deshalb liegt X als Mittelpunkt zwischen je zwei zugeordneten Punkten AA', BB' ...

Erkl. 236. Entsprechend dem Gedankenkreise, aus welchem für die Involution ohne Ordnungselemente der Name „elliptische Involution", für jene mit Ordnungselementen der Name „hyperbolische Involution" (Erkl. 185 und 187) entnommen wurde, nennt man die dazwischenliegende Art von Involution, bei welcher alle Elemente einem einzigen zugeordnet sind, die „parabolische Involution". Nun sind die im siebenten Abschnitt nebenstehender Antwort erörterte Punktinvolution und die im neunten Abschnitt behandelte Strahleninvolution Involutionen mit Ordnungselementen, also eine besondere Art der hyperbolischen. Und wegen der gleichgroßen Strecken bezw. gleichgroßen Winkel je zweier gepaarten Elemente beiderseits der Ordnungselemente nennt man dieselbe die „gleichseitig-hyperbolische Involution". Die im achten Abschnitt obiger Antwort behandelte Strahleninvolution aber ist eine solche ohne Ordnungselemente, also eine besondere Art der elliptischen; und wegen ihrer engeren Beziehung zum Kreis nennt man sie die „zirkulare Strahleninvolution", oder auch die rechtwinklige oder orthogonale Strahleninvolution, weil je zwei gepaarte Strahlen senkrecht zu einander stehen. — Endlich kann auch noch jede gewöhnliche oder besondere Punktinvolution durch Projektion auf die unendlich ferne Gerade übertragen werden als eine Punktinvolution auf unendlich fernem Träger, oder sie kann durch Projektion aus einem unendlich fernen Punkte zur Erzeugung eines involutorischen Parallelstrahlenbüschels von jeder der verschiedenen Gattungen verwendet werden.

Normalstrahlen uu' beiderseits je gleiche Winkel von 45° bilden. Für



Figur 61.

jedes beliebige Strahlenpaar wird auch tg (u a) tg (u a') = 1, also

$$\text{tg}\,(\text{u a}') = \frac{1}{\text{tg}\,(\text{u a})} = \text{ctg}\,(\text{u a}),$$

folglich (u a') = 90° — (u a), denn tg (90° — u a) = ctg (u a). Der zugeordnete Strahl a' zu jedem gegebenen ist also von u' um einen ebensolchen Winkel zurückgedreht, als a vom anderen Normalstrahl u vorwärts gedreht ist: bei beiderseitigem Winkelabstand von 45° von uu' fallen die beiden gepaarten Strahlen in einen Ordnungsstrahl x bezw. y zusammen, um dann von x bezw. y aus wieder in entgegengesetzter Drehungsrichtung von gleicher Winkelgröße auseinanderzurücken. Man erhält also einen Büschel der in Figur 61 dargestellten Art, welcher durch zwei entgegengesetzt kongruente Strahlenbüschel gebildet wird: zugeordnet sind je zwei Strahlen, welche mit den Ausgangsstrahlen x bezw. y nach entgegengesetzten Richtungen gleichgroße Winkel bilden.

Erkl. 237. Setzt man bei den beiden letztgenannten Arten der Strahleninvolution statt des Tangentenproduktes der Winkel von u das Kotangentenprodukt der Winkel von u′ an, so wird in Figur 60 $\sphericalangle(u\,p) = 45^0$, $(u\,a') = 90^0$, also $(u'\,p) = 45^0$, $(u'\,p') = 135^0$ bezw. $(u'\,p') = -45$, also $\operatorname{ctg}(u'\,p) \,.\, \operatorname{ctg}(u'\,p') = -1$. Wird dann auch gesetzt $\operatorname{ctg}(u'\,a) . \operatorname{ctg}(u'\,a') = -1$, so folgt $\operatorname{ctg}(u'\,a') = -\frac{1}{\operatorname{ctg}(u'\,a)} = -\operatorname{tg}(u'\,a)$, also $(u'\,a') = 90^0 + (u'\,a)$ für stumpfen Winkel $(u'\,a')$, oder $(u'\,a') = (u'\,a) - 90^0$ für spitzen Winkel $(u'\,a')$. Beides bestätigt Figur 60. — In Figur 61 dagegen ist $\sphericalangle\,(u\,x) = 45$, $(u\,u') = 90^0$, also $(u'\,x) = 45$ und $\operatorname{ctg}^2(u'\,x) = 1$. Setzt man also $\operatorname{ctg}\,(u'\,a) \,.\, \operatorname{ctg}(u'\,a') = 1$, so folgt wieder $\operatorname{ctg}\,(u'\,a') = \frac{1}{\operatorname{ctg}\,(u'\,a)} = \operatorname{tg}\,(u'\,a)$, also $\sphericalangle(u'\,a') = 90^0 - (u'\,a)$.

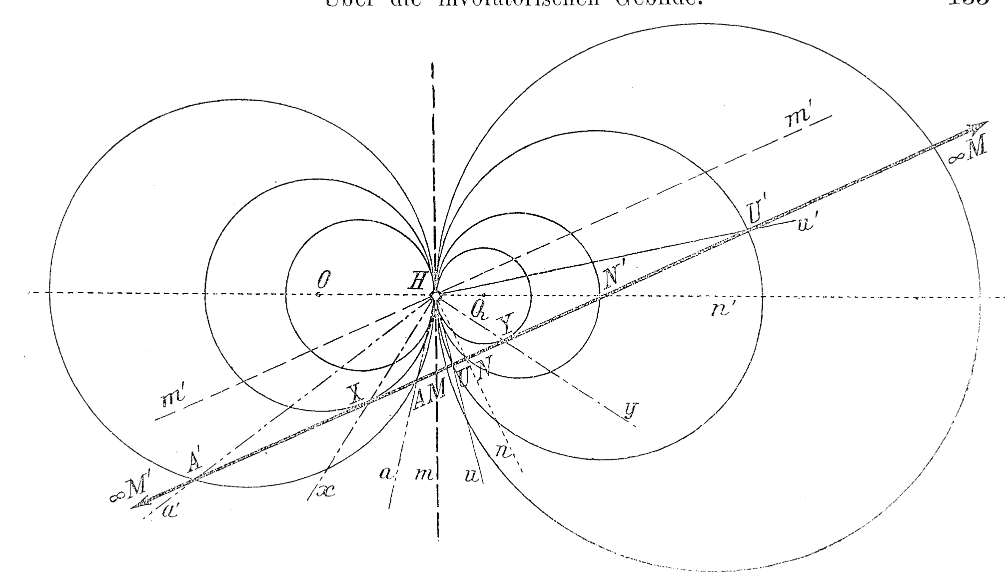
Erkl. 238. Überträgt man die Winkelmessungen in den beiden vorgenannten Fällen von den Ausgangsstrahlen u bezw. u′ auf die Ausgangsstrahlen p bezw. p′ und x bezw. y, so ist im ersteren Falle (Figur 60) $\sphericalangle\,(u\,a) = (u\,p) + (p\,a)$, $\sphericalangle(u\,a') = (u\,p) + (p\,a')$; also ergibt die Beziehung $(u\,a') = 90^0 + (u\,a)$ die folgende: $(u\,p) + (p\,a') = 90^0 + (u\,p) + (p\,a)$. Hier fällt $(u\,p)$ beiderseits weg, und es bleibt $(p\,a') = 90^0 + (p\,a)$, d. h. p, p′ haben dieselbe Beziehung als Axenstrahlen, wie u, u′; und ferner $90^0 = (p\,a') - (p\,a) = (p\,a') + (a\,p) = (a\,p) + (p\,a') = (a\,a')$. — Für Figur 61 ergibt sich ebenso $\sphericalangle\,(u\,a) = (u\,x) + (x\,a)$, $\sphericalangle\,(u\,a') = (u\,x) + (x\,a')$, also liefert die Beziehung $(u\,a') = 90^0 - (u\,a)$ die folgende: $(u\,x) + (x\,a') = 90^0 - (u\,x) - (x\,a)$. Hier fällt $(u\,x)$ nicht weg, sondern verdoppelt sich links, so daß $2\,(u\,x) + (x\,a') + (x\,a) = 90^0$. Nun ist aber $(u\,x) = 45^0$, $2\,(u\,x) = 90^0$, also bleibt $(x\,a') + (x\,a) = 0$, $(x\,a') = -(x\,a)$.

Erkl. 239. Die Strahleninvolution nach Figur 60 kann nach dem bisherigen auf vier verschiedene Weisen erzeugt werden. In obiger Antwort geschieht es durch F e s t s e t z u n g d e s W e r t e s — 1 für die P o t e n z. Gleichbedeutend ist zweitens die Z u s a m m e n l e g u n g zweier k o n g r u e n t e n g l e i c h l a u f e n d e n Strahlenbüschel mit senkrechter Lage e i n e s beliebigen und folglich j e d e s zugeordneten Strahlenpaares. In Figur 53 entstand dieselbe Strahleninvolution drittens durch Projektion der auf der Axe des Kreisbüschels HK ausgeschnittenen Punktinvolution aus dem einen der festen Punkte H oder K. Eine weitere, also vierte Erzeugungsweise ebenfalls mehr geometrischer Natur ergibt sich aus der Tatsache des Satzes 25, daß ein involutorisches Gebilde bestimmt ist durch zwei willkürlich ausgewählte Elementepaare. Man wähle nämlich zur Bestimmung einer Involution z w e i P a a r e s e n k r e c h t e r z u g e o r d n e t e r G e r a d e n: dann müssen jedenfalls die Schenkel des einen rechten Winkels diejenigen des anderen innen und außen trennen, also entsteht eine Involution o h n e O r d n u n g s e l e m e n t e; und da die Strahlenpaare beide senkrecht zu einander stehen, so kann man das eine als u u′, das andere als a a′ bezeichnen. Dann ist jedenfalls

$$\operatorname{tg}(u\,a)\operatorname{tg}(u\,a') = \operatorname{tg}(u\,a)\operatorname{tg}(u\,a + 90^0) = \operatorname{tg}(u\,a) \,.\, -\operatorname{ctg}(u\,a) = -\frac{\operatorname{tg}(u\,a)}{\operatorname{tg}(u\,a)} = -1.$$

Folglich hat man die in obiger Antwort 8 behandelte Art der Strahleninvolution mit Potenzwert —1.

Erkl. 240. Ebenso erhält man vier verschiedene Entstehungsweisen für die Strahleninvolution nach Figur 61. In obiger Antwort geschieht die Bestimmung durch F e s t s e t z u n g des W e r t e s + 1 für die P o t e n z der Involution. Gleichbedeutend ist zweitens die Z u s a m m e n l e g u n g zweier k o n g r u e n t e n u n g l e i c h-l a u f e n d e n Strahlenbüschel: dabei erscheinen der in beiden Büscheln zur Deckung



Figur 62.

gebrachte Ausgangsstrahl und sein senkrechter als die Ordnungstrahlen x, y, ihre Winkelhalbierenden als die zugeordneten Normalstrahlen u, u' (Figur 61). Als dritte kommt hierzu die Erzeugung beim Kreisbüschel zweiter Art (Figur 62). Nach Erklärung 210 entsteht auf jeder Sekante eine involutorische Reihe, und nach Erklärung 214 wird jede dieser so erzeugten Reihen aus dem gemeinsamen Berührungspunkt H durch eine Strahleninvolution projiziert. Nun gibt es aber für jede Sekante des Kreisbüschels irgend zwei berührende Kreise O und Q; und für den Punkt M sind am Kreise O Tangentenabschnitte $MH = MX$, am Kreise Q Tangentenabschnitte $MH = MY$, folglich ist $MX = MH = MY$, daher XHY ein rechter Winkel. Die Schenkel dieses rechten Winkels müssen aber nach Satz 24 je zwei sonstige zugeordneten Strahlen der Involution harmonisch trennen, also sind diese Geraden x und y die Winkelhalbierenden jedes gepaarten Strahlenpaares der Involution. Und hieraus ergibt sich, daß jede auf beliebiger Sekante des Kreisbüschels (Figur 62) erzeugte Punktinvolution von H aus durch eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution nach Figur 61 projiziert wird. Endlich kann dieselbe besondere Strahleninvolution auch erzeugt werden auf Grund der Bestimmung einer Strahleninvolution mittels zweier senkrechten Ordnungsstrahlen. Dann folgt die Eigentümlichkeit entweder aus der winkelhalbierenden Eigenschaft senkrechter harmonischer Strahlen, oder aus der Aufstellung des Potenzwertes: Es wird nämlich $\operatorname{tg}^2(ux) = \operatorname{tg}^2(uy) = \operatorname{tg}^2\frac{(xy)}{2} = \operatorname{tg}^2 45 = +1$, also wie im neunten Teile obiger Antwort.

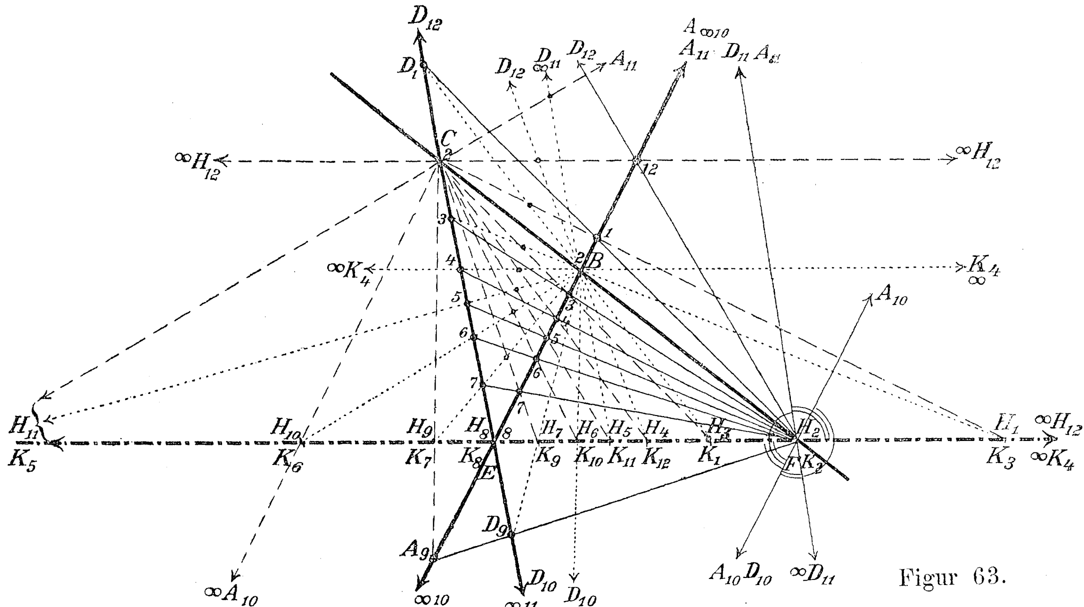
* * *

c) Involutorische Beziehungen am Viereck und Vierseit.

Frage 62. Auf welche Weise liefern Viereck und Vierseit am einfachsten die involutorische Beziehung in Punktreihe oder Strahlenbüschel?

Erkl. 241. Der Inhalt nebenstehender Antwort ist bereits angedeutet in der Antwort der Frage 51. — Die Vierecke der Figur 63 haben sämtlich gemein-

Antwort. 1) Gehen durch dieselben zwei Punkte E und F einer Geraden (Figur 63) je zwei Gegenseiten beliebig vieler einfachen Vierecke A_1BCD_1 bis $A_{12}BCD_{12}$, so schneiden die Diagonalen dieser Vierecke auf der Geraden EF jedesmal zwei Punkte H_x und K_x aus,



Figur 63.

sam die Eckpunkte B und C, also die Seite BC, sowie die Richtungen CE, BE der Seiten CD und BA. Es bleiben also fest die drei stark ausgezogenen Geraden CE, BE und CF, und daher sind auf den beiden ersteren die Punkte A_1 bis A_{12} bezw. D_1 bis D_{12} zur Vermeidung der Buchstabenhäufung nur durch die entsprechenden Ziffern angegeben. Veränderlich ist nur noch die stets durch F gehende Viereckseite AD. Man würde aber zu jedem Punkte H_x auf EF denselben zugeordneten Punkt K_x erhalten (wobei der Zeiger x jedesmal eine beliebige der Zahlen von 1 bis 12 in der Figur bedeuten kann), wenn auch andere Geraden durch E und F benutzt würden. Denn nach dem Fundamentalsatze über die harmonische Beziehung am Viereck muß die zweite Diagonale jedes Vierecks durch K_x gehen, dessen erste Diagonale durch H_x geht, während je zwei Gegenseiten durch E und F gehen.

Erkl. 242. Bezeichnet man für den Augenblick (wie in Erklärung 27 des II. Teils) die Reihen der Punkte H bezw. K als Punktreihen h bezw. k, sowie der Reihe nach C als S_1, EBA als t_1, F als S_0, ECD als t_2, B als S_2, so hat man in Figur 63 die Zuordnung

$$h \overline{\barwedge} S_1 \overline{\barwedge} t_1 \overline{\barwedge} S_0 \overline{\barwedge} t_2 \overline{\barwedge} S_2 \overline{\barwedge} k,$$

welche mit E und F vier harmonische Punkte bilden. Nach Satz 24 bilden aber nun je zwei zusammengehörige Punkte HK ein involutorisch gepaartes Punktepaar der involutorischen Punktreihe auf Träger EF, welche die Punkte EF als Ordnungspunkte hat. Man kann aber auch die involutorische Eigenschaft der Reihe nachweisen durch die ursprüngliche Beziehung der beiden mit je zwei doppelt entsprechenden Punktepaaren zusammenfallenden projektivischen Punktreihen (Antwort der Frage 50). Es bildet nämlich die Gesamtheit der Vierecksdiagonalen CH_1 bis CH_{12} einen Strahlenbüschel mit Scheitel C, und schneidet auf der Vierecksseite EBA eine Punktreihe A_1 bis A_{12} aus; die letztere Punktreihe wieder ist perspektivisch zur Punktreihe der Punkte D_1 bis D_{12} auf der Viereckseite ECD durch Vermittelung des Strahlenbüschels mit Scheitel F, welches gebildet wird durch die Gesamtheit der Viereckseiten FA_1D_1 bis $FA_{12}D_{12}$. Die Punktreihe D_1 bis D_{12} endlich wird projiziert auf die Punktreihe K_1 bis K_{12} durch den Strahlenbüschel mit Scheitel B,

folglich $h \barwedge k$ als projektivische Punktreihen auf gleichem Träger. Und wegen der Eindeutigkeit der harmonischen Beziehung muß zu jedem Punkte der Reihe h derselbe Punkt von k zugehören, als wenn man jenen Punkt als Punkt von k nähme und den zugehörigen von h konstruierte. So liefert das Viereck $B C A_1 D_1$ durch die Reihenfolge H_1, $H_1 C$, A_1, $F A_1$, D_1, $B D_1$, K_1 das Punktepaar $H_1 K_1$, und sodann das Viereck $B C A_3 D_3$ durch die Reihenfolge H_3, $H_3 C$, A_3, $F A_3$, D_3, $B D_3$, K_3 das Punktepaar $H_3 K_3$, welches mit dem Punktepaar $H_1 K_1$ identisch ist. Ebenso wird der zugeordnete Punkt zum unendlich fernen gefunden sowohl durch das Viereck $C B A_{12} D_{12}$, als auch durch das Viereck $C B A_4 D_4$.

Erkl. 243. Man bestätigt leicht an Figur 63 die Eigentümlichkeiten der involutorischen Punktreihe: Die Ordnungspunkte sind selbstentsprechende Punkte $H_2 K_2$, $H_8 K_8$; Mittelpunkt der involutorischen Reihe ist der dem unendlich fernen Punkte $H_{12} K_4$ zugeordnete Punkt $H_4 K_{12}$, zugleich Mittelpunkt der Ordnungspunkte. Zu jedem Punkte zwischen H_2 und H_8 gehört ein Punkt K außerhalb EF und umgekehrt; denn die Punktreihen H_1 bis H_{12} und K_1 bis K_{12} haben entgegengesetzte Durchlaufsrichtung; ist ein Punkt H_3 ebensoweit vom Mittelpunkt H_4 nach rechts entfernt, wie etwa H_6 nach links, so liegt auch der Punkt K_3 ebensoweit nach rechts vom Mittelpunkt bezw. vom Ordnungspunkt F, wie der Punkt K_6 nach links vom Mittelpunkt bezw. vom Ordnungspunkt E u. s. w.

Erkl. 244. Als Gegenecken der zur Verwendung gelangenden Vierseite könnten auf CE und CF jedesmal zwei ganz beliebige Punkte ausgewählt werden. In Figur 63 haben alle Vierseite gemeinsam auf CF die Punkte B und F als Gegenecken, auf CE die Ecke E, so daß nur die einzige Ecke D_1 bis D_{12} auf CE veränderlich ist und damit der Eckpunkt A_1 bis A_{12}. Daher haben sämtliche Vierseite gemeinsam die Seiten BE und EF, veränderlich die Seiten BD und FD. Bezeichnet man also hier mit h_1 bis h_{12} bezw. k_1 bis k_{12} welcher gebildet wird durch die Gesamtheit der Vierecksdiagonalen $B K_1$ bis $B K_{12}$. Es ist also jedenfalls die Punktreihe der H projektivisch verwandt zur Punktreihe der K auf demselben Träger EF; und zwar gehört zu einem beliebigen Punkte von EF beidemale derselbe Punkt als zugeordneter, ob man den Punkt auffaßt etwa als H_7 und konstruiert dazu K_7, oder als K_9 und konstruiert dazu H_9.

2) Liegen auf denselben zwei Strahlen CDE und CBF eines Punktes C (Figur 63) je zwei Gegenecken beliebig vieler einfachen Vierseite $BEFD_1$ bis $BEFD_{12}$, so werden die Nebenecken A und K dieses Vierseits aus dem Scheitel C als dritter Nebenecke jedesmal durch zwei Strahlen $C A_x$ oder $C H_x$ und $C K_x$ projiziert, welche mit CDE und CBF vier harmonische Strahlen bilden. Nach Satz 24 bilden aber nun je zwei zusammengehörige Strahlen $C H_x$ und $C K_x$ ein involutorisch gepaartes Strahlenpaar des involutorischen Strahlenbüschels mit Scheitel C, welcher die Strahlen CE und CF als Ordnungsstrahlen besitzt. Man kann die involutorische Eigenschaft des Büschels aber auch nachweisen durch die ursprüngliche Beziehung der beiden mit je zwei doppelt entsprechenden Strahlenpaaren zusammenfallenden projektivischen Strahlenbüschel (Antwort 50). Denn die Gesamtheit der Nebenseiten $C A_1$ bis $C A_{12}$ oder $C H_1$ bis $C H_{12}$ bildet wieder einen Strahlenbüschel perspektivisch zur Punktreihe A_1 bis A_{12} auf der gemeinsamen Seite EB aller Vierseite; dieser ist perspektivisch zum Strahlenbüschel der veränderlichen Viereckseiten $F A_1 D_1$ bis $F A_{12} D_{12}$ mit Scheitel F, dieser zur Punktreihe D_1 bis D_{12} auf der festen Seite CDE aller Vierseite, diese zum Strahlenbüschel der veränderlichen Viereckseiten $B D_1$ bis $B D_{12}$

die Strahlen von C nach den Punkten H_1 bis H_{12} bezw. K_1 bis K_{12}, so erhält man etwa zum Strahl h_3 den zugeordneten Strahl k_3 durch die Reihenfolge h_3, A_3, FA_3, D_3, BD_3, K_3, $k_3 = h_1$. Und genau ebenso muß rückwärts entstehen h_1, A_1, FA_1, D_1, BD_1, K_1, $k_1 = h_3$.

Erkl. 245. Bezeichnet man wieder wie oben C als S_1, EBA als t_1, F als S_0, ECD als t_2, B als S_2, so hat man an der Figur 63 die Zuordnung

$$S_1 \overline{\wedge} t_1 \overline{\wedge} S_0 \overline{\wedge} t_2 \overline{\wedge} S_2,$$

folglich $S_1 \overline{\wedge} S_2$ als zwei projektivische Strahlenbüschel mit gemeinsamem Scheitel. Und wegen der Eindeutigkeit der harmonischen Beziehung muß zu jedem Strahl des Büschels h_1 bis h_{12} derselbe Strahl k_1 bis k_{12} zugehören, ob man die Reihenfolge der Konstruktionen in der einen oder anderen Richtung durchläuft. So liefert das Viereck $BEFD_{12}B$ (mit einspringendem Winkel bei B) zum Parallelstrahl $h_{12} // EF$ den zugeordneten k_{12} nach dem Mittelpunkt von EF, und umgekehrt das Viereck $BEFD_4B$ (überschlagenes Trapez) zu dem Strahl h_4 nach dem Mittelpunkt von EF wieder den Parallelstrahl k_4 zu EF durch C.

Erkl. 246. An dem involutorischen Büschel mit Scheitel C in Figur 63 erkennt man die Eigentümlichkeit der Strahleninvolution: CE und CF sind die selbstentsprechenden Ordnungsstrahlen, jedem Strahl im Innenwinkel ECF entspricht ein Strahl im Außenwinkel, denn die Strahlenbüschel h_1 bis h_{12} und k_1 bis k_{12} haben entgegengesetzte Umlaufsrichtung: erstere entgegen, letztere mit dem Uhrzeiger. Unter den zugeordneten Strahlenpaaren befindet sich ein Paar senkrechte Strahlen (vgl. h_5 k_5 bezw. h_{11} k_{11} in Figur 63), welche als Axenstrahlen u und u' zu bezeichnen wären. Und die Winkel je zweier zugeordneten Strahlen mit diesen Strahlen unterliegen dem Satze der konstanten Tangentenprodukte. Wenn also etwa h_{10} und h_{12} oder h_1 und h_7 beiderseits gleichgroße Winkel bildeten mit h_{11} bezw. k_{11}, so müssen auch k_{10} und k_{12} oder k_1 und k_7

mit Scheitel B, und letzterer endlich zur Punktreihe K_1 bis K_{12}, und somit zum Strahlenbüschel CK_1 bis CK_{12} der Nebenseiten des Vierseits mit Scheitel C. Es ist also jedenfalls der Strahlenbüschel der CH_x projektivisch verwandt zum Strahlenbüschel der CK_x mit gemeinsamem Scheitel C; und zwar gehört zu einem beliebigen Strahl von C beidemale derselbe Strahl als zugeordneter Strahl, ob man den Strahl auffaßt etwa als CH_7 und konstruiert dazu CK_7, oder als CK_9 und konstruiert dazu CH_9.

3) Sind auf einer Geraden EF nach dem ersten Teile dieser Antwort beliebig viele zu E und F harmonisch zugeordneten Punktepaare konstruiert, so erhält man nach Antwort 50, 4 auch ohne die obige direkte Ableitung stets einen involutorischen Strahlenbüschel, wenn man die Punktreihe der HK aus irgend einem Scheitel C oder B oder P projiziert: die Projektionsstrahlen nach den Ordnungspunkten E und F werden die Ordnungsstrahlen; und involutorisch gepaart werden die Strahlen nach je zwei zugeordneten Punkten H_x K_x der Reihen.

4) Sind durch einen Scheitel C nach dem zweiten Teile dieser Antwort beliebig viele zu CE und CF harmonisch zugeordneten Strahlenpaare konstruiert, so erhält man nach Antwort 50, 4 auch ohne die obige direkte Ableitung stets eine involutorische Punktreihe, wenn man den Strahlenbüschel der CH, CK durch irgend eine Gerade EF oder BK oder sonstwie schneidet: die Schnittpunkte mit den Ordnungsstrahlen CE und CF werden die Ordnungspunkte; und involutorisch gepaart werden die Schnittpunkte mit je zwei zugeordneten Strahlen CH_x CK_x des Büschels.

5) In allen den eben erörterten Fällen entsteht aber immer nur

beiderseits gleiche Winkel bilden mit h_{11} oder mit k_{11}. Daß der Parallelstrahl $h_{12} // EF$ zugeordnet ist dem Strahl k_{12} nach dem Mittelpunkt von EF, ist eine selbstverständliche Beziehung zwischen Strahlenbüschel und Punktreihe, bildet aber keineswegs eine charakteristische Eigenschaft des involutorischen Büschels als solchen.

die eine der beiden Arten von Involution, nämlich die (hyperbolische) mit zwei Ordnungselementen, in keinem Falle die andere (elliptische) Art ohne Ordnungselemente, weil die auf der Nebenseite des Vierseits ausgeschnittenen Punkte stets zu den zwei Seiten harmonisch liegen.

Erkl. 247. Der erste und zweite Teil obenstehender Antwort sind im Text durchaus dualistisch durchgeführt und könnten auch an der Zeichnung in dualistischer Gegenüberstellung behandelt werden. An Figur 63 trifft letzteres nicht zu aus dem Grunde, weil die gemeinsamen und veränderlichen Elemente der Vierecke bezw. Vierseite sich dem Auge verschieden zeigen: einerseits enthalten alle zur Konstruktion der Punktreihe H, K verwandten Vierecke drei gemeinsame und eine veränderliche Seite, also zwei veränderliche Eckpunkte, anderseits enthalten die zur Konstruktion der Strahlenbüschel h, k verwendeten Vierecke drei gemeinsame und einen veränderlichen Eckpunkt, also zwei veränderliche Seiten. Daher mußten auch die Formeln verschieden ausfallen, durch welche in Erklärung 242 und 245 die projektivischen Verwandtschaften dargestellt wurden.

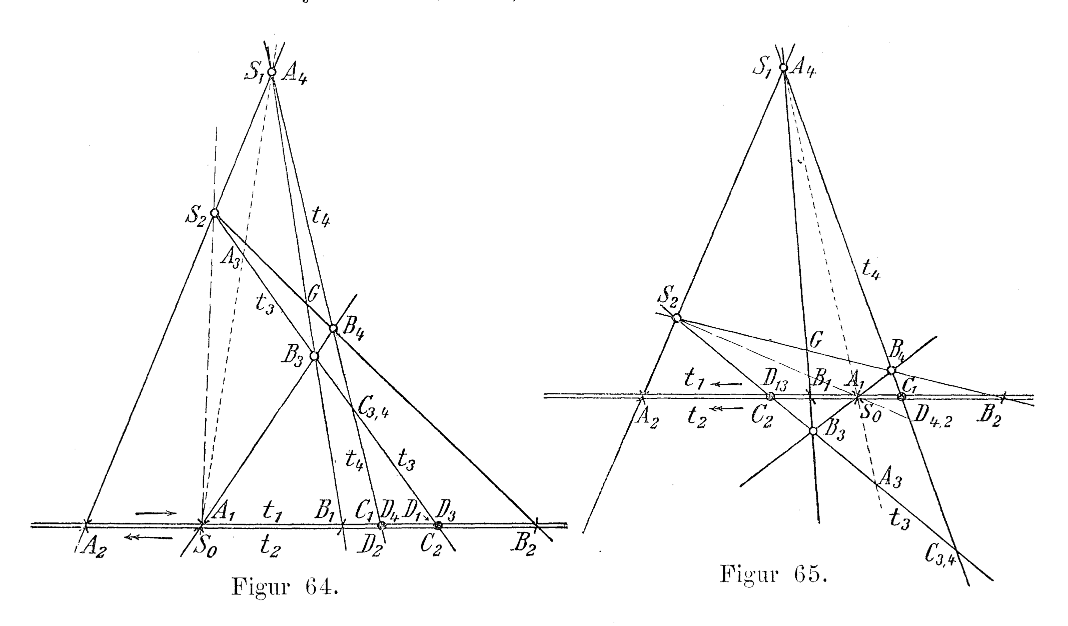
Erkl. 248. Es bedarf keiner besonderen Erwähnung, daß der Punkt B der Figur 63 ebensowohl als Scheitel eines involutorischen Büschels erscheint, wie C. Auch dort sind BE und BF Ordnungsstrahlen, aber BH_5 und BK_5 sind nicht mehr als Axenstrahlen aufzufassen, da sie keinen rechten Winkel bilden. — Auch jeder der Punkte der Zeichenebene, nicht nur B und C, kann als Scheitel eines involutorischen Strahlenbüschels auftreten, wenn man von ihm aus die Reihe der H, K projiziert; und auch jede beliebige Gerade der Ebene außer EF kann als Träger einer involutorischen Punktreihe auftreten, wenn man sie mit den Strahlen des Scheitels C zum Schnitt bringt. Man hat daher ein einfaches Mittel, durch lineare Konstruktion eine involutorische Punktreihe oder einen involutorischen Strahlenbüschel vollständig darzustellen, wenn dessen Ordnungselemente gegeben sind. Gleiche Behandlung für Involutionen der anderen Art oder ohne gegebene Ordnungselemente ergeben sich aus den folgenden beiden Antworten.

Frage 63. Welches ist das wichtigste Vorkommen der Involution am vollständigen Viereck?

Erkl. 249. Die sechs Figuren 64 bis 69 zeigen die verschiedenen Fälle, welche für den nebenstehenden Satz in Betracht kommen. Ihre Unterscheidung im einzelnen erfolgt in der Antwort der folgenden Frage 64. Die Buchstaben für den Text beider Beweise I und II aber sind in jeder der sechs Figuren in genau gleicher Weise angeordnet. Der Studierende wird also gut tun, den Beweis

Antwort. Das wichtigste Auftreten der involutorischen Beziehung am vollständigen Viereck betrifft eine Punktinvolution und besteht in folgender Tatsache:

Satz 27. Die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von jeder beliebigen Geraden geschnitten in drei Paar zugeordneten Punkten einer involutorischen Punktreihe.



Figur 64.

Figur 65.

dieser wichtigen Sätze der Reihe nach an jeder der zugehörenden sechs Figuren durchzuüben. Zusammen mit dem später folgenden Satze 31 und 32 von den konjugierten Elementen bei einer Kurve zweiten Grades kann der Satz als der grundlegendste der Involutionstheorie angesehen werden. Und diese Wichtigkeit läßt es auch gerechtfertigt erscheinen, alle diese Beweisarten hier wiederzugeben.

Erkl. 250. In jeder der Figuren ist die schneidende Transversale aufgefaßt als gemeinsamer Träger zweier zusammenfallenden Punktreihen t_1 und t_2, von deren jeder sechs Punkte in Betracht kommen, nämlich die Schnittpunkte mit den sechs Viereckseiten, aufgefaßt einmal als Punkte der Reihe t_1 und das andere Mal als Punkte der Punktreihe t_2. Und es wird der Nachweis geliefert, daß jedesmal, wenn in der einen oder in der anderen Punktreihe irgend einer der sechs Schnittpunkte herausgenommen wird, dann der projektivisch zugeordnete Punkt der auf der Gegenseite liegende Schnittpunkt ist. Dazu ist aber nicht notwendig, jedes einzelne Paar der Punkte zu behandeln, nämlich

Beweis I.

Zum Beweise verfährt man genau wie in der ursprünglichen Behandlung der involutorischen Punktreihe in Antwort 52 zu Figur 47 und 48. Bezeichnet man in Figur 64 bis 69 als $A_1 B_1 C_1$ die Schnittpunkte dreier beliebigen Viereckseiten mit der Schnittgeraden, als $A_2 B_2 C_2$ die Schnittpunkte ihrer Gegenseiten, so ist zu untersuchen, ob bei projektivischer Zuordnung dieser drei Punktepaare das Doppeltentsprechen eines und folglich aller drei Punktepaare eintrifft, welches für die Involution grundlegend ist. Man bezeichnet also den Punkt C_2 der Reihe t_2 als D_1 in t_1 und sucht den dazugehörigen Punkt D_2 in t_2 auf.

Zu dem Zwecke wählt man zunächst die durch D_1 gehende Gerade des Vierecks als neuen Träger t_3, um die Behandlung der zusammenfallenden Punktreihen t_1 und t_2 auf verschiedene Träger überzuführen. Man projiziert also aus S_1 die Punktreihe t_1 auf t_3 und erhält dadurch

$$A_1 B_1 C_1 D_1 \overline{\wedge} A_3 B_3 C_3 D_3,$$ wobei $D_3 = D_1 = C_2$ ist.

in t_1: $|A_1|B_1|C_1|C_2 = D_1|A_2 = H_1|B_2 = K_1$
in t_2: $|A_2|B_2|C_2|D_2 = C_1|A_1 = H_2|B_1 = K_2$.
Vielmehr genügt es nach Satz 24, für ein Paar das Doppeltentsprechen nachzuweisen, weil dann dasselbe für alle Paare eintreten muß. Die zusammengehörigen Punkte jedes Paares sind auch an der Figur gleichartig bezeichnet, nämlich A_1 und A_2 durch Sternchen, B_1 und B_2 durch Striche, C_1 und C_2 durch dickere Punkte. Und es ist im ersten der nebenstehenden Beweise der Nachweis des Doppeltentsprechens geführt für das Punktepaar $C_1 D_2 = C_2 D_1$, im zweiten Beweis für das Punktepaar $B_1 B_2$ bezw. $B_2 B_1$.

Erkl. 251. Man kann den Gedankengang des ersten Beweises kurz darstellen in der Formel:

$$t_1 \doublebarwedge S_1 \doublebarwedge t_3 \doublebarwedge S_0 \doublebarwedge t_4 \doublebarwedge S_2 \doublebarwedge t_2,$$

folglich $t_1 \barwedge t_2$. Denn man hat in geschlossener Aufeinanderfolge die Beziehungen:

$$A_1 B_1 C_1 D_1 \doublebarwedge A_3 B_3 C_3 D_3 \doublebarwedge A_4 B_4 C_4 D_4 \doublebarwedge A_2 B_2 C_2 D_2.$$

Man kann aber den Gedankengang auch in der Weise abändern, daß man jede der beiden Punktreihen t_1 und t_2 einzeln auf einen anderen Träger überträgt, nämlich t_1 mittels Projektion aus S_1 auf t_3, und t_2 mittels Projektion aus S_2 auf t_4. Dadurch entsteht $t_1 \doublebarwedge S_1 \doublebarwedge t_3$ und $t_2 \doublebarwedge S_2 \doublebarwedge t_4$. Betrachtet man aber die auf t_3 und t_4 so erhaltenen Punktgruppen, so zeigt sich, daß $C_{3,4}$ identisch sind, und daß je zwei der anderen entsprechenden Punktepaare $A_3 A_4$, $B_3 B_4$, $D_3 D_4$ auf Strahlen desselben Scheitelpunktes $A_1 = S_0$ zu liegen kommen. Hieraus schließt man, daß $t_3 \doublebarwedge S_0 \doublebarwedge t_4$, und folglich auch $t_1 \barwedge t_2$.

Erkl. 252. An der Figur kann der erste Beweis noch vielfache Abänderungen erfahren: Als t_3 und t_4 dienen irgend zwei Gegenseiten des Vierecks, als S_1 bezw. S_2 je irgend einer der auf t_4 bezw. t_3 liegenden Eckpunkte des Vierecks: dann wird zu S_0 jeweils der Schnittpunkt der Gegenseite von $S_1 S_2$ mit der Transversalen, und das Doppeltentsprechen

Nimmt man nun wieder, wie in Antwort 52, A_1 als Projektionsscheitel S_0, um die Punktreihe t_3 auf die durch C_1 gehende Gegenseite des Vierecks als Träger t_4 zu projizieren, so entsteht

$$A_3 B_3 C_3 D_3 \doublebarwedge A_4 B_4 C_4 D_4,$$

wobei diesmal $C_3 = C_4$ und $D_4 = C_1$ ist. — Wird endlich noch die Punktreihe t_4 zurückprojiziert auf den ursprünglichen Träger t_2 aus dem Scheitel S_2, so kommt jeder der ursprünglichen Schnittpunkte der Viereckseiten auf den Schnittpunkt mit der Gegenseite, nämlich

$$A_4 B_4 C_4 D_4 \doublebarwedge A_2 B_2 C_2 D_2,$$

wobei nun $C_2 = D_1$ und $D_2 = D_4 = C_1$ wird. Man hat also wirklich in den Punkten $A_1 B_1 C_1 D_1 \barwedge A_2 B_2 C_2 D_2$ projektivisch zugeordnete Punkte, von welchen das eine Paar $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ doppelt entsprechend ist. Folglich sind nach Satz 24 alle Paare doppelt entsprechend, und die Punktepaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ sind zugeordnete Punkte einer involutorischen Punktreihe.

Beweis II.

Faßt man (in Figur 64 bis 69) ins Auge die Schnittpunkte $A_1 B_1 D_1$ der Transversalen mit den durch den Eckpunkt B_3 gehenden Viereckseiten und nimmt hinzu den Schnittpunkt B_2 mit der Seite $B_2 B_4$ als Gegenseite zu $B_1 B_3$, so entsteht durch Projektion dieses Punktepaares aus der erstgenannten Ecke B_3 auf die letztgenannte Gegenseite $B_2 B_4$ die Beziehung

$$A_1 B_1 D_1 B_2 \doublebarwedge B_4 G S_2 B_2.$$

Nun bleibt nach den Sätzen 6a und 6b in Erklärung 315 des I. Teiles diese projektivische Verwandtschaft bestehen, auch wenn von den vier Elementen $B_4 G S_2 B_2$ zwei beliebige Paare unter einander vertauscht werden; also entsteht durch Vertauschung von B_4 mit S_2 und von G mit B_2 die Beziehung:

wird nachgewiesen für die beiden von t_3 und t_4 ausgeschnittenen Punkte. So kann man in Figur 64 bis 69 unter Beibehaltung von t_3 und t_4 und S_1 den Scheitel S_2 verlegen nach dem dort mit B_3 bezeichneten Punkte und den Scheitel S_0 nach dem Punkte B_2; und man erhält wieder das Doppeltentsprechen von $C_1 D_2$, ebenso als wenn man S_1 nach B_4, S_2 in G_2, S_0 in B_1 oder S_1 nach B_4, S_2 nach B_3, S_0 nach A_2 verlegt. Die gleichen Veränderungen der Scheitelpunkte sind dann auch bei Vertauschung der Träger t_3 und t_4 durchführbar. Will man durch den Wortlaut des ersten Beweises das Doppeltentsprechen von B_1 und B_2 nachweisen, so wählt man die beiden durch B_1 und B_2 gehenden Viereckseiten als t_3 und t_4 und zwei auf ihnen liegende Eckpunkte des Vierecks als S_1 und S_2. Wird z. B. $S_2 B_2$ zu t_3, $S_1 B_1$ zu t_4 gewählt, so können sowohl S_1 und S_2 als auch S_0 beibehalten werden.

Erkl. 253. Um den Beweis in verschiedenen Abänderungen durchzuführen, ist es ratsam, an der Figur auch die Punkte A_1 und A_2, B_1 und B_2 in den verwandten Punktreihen zu bezeichnen, etwa wie in Erklärung 250 als H_2 und H_1, K_2 und K_1, auch vielleicht den zur Vermittelung von t_1 und t_3 dienenden Scheitel S_1 als S_{13}, ebenso S_2 zwischen t_2 und t_4 als S_{24} und etwa S_0 als S_{34}. Jedenfalls muß aber auch bei Festhaltung der ursprünglichen Beweisfolge

$$t_1 \barwedge S_1 \barwedge t_3 \barwedge S_0 \barwedge t_4 \barwedge S_2 \barwedge t_2$$

der Punkt H_1 nach H_2 oder K_2 nach K_1 übergeführt werden. Diesem Zwecke dient z. B. in Figur 64 bis 69 die angedeutete Verbindungsgerade $S_0 S_2$ für die Überführung von $A_2 = H_1$ in $H_2 = A_1$ bezw. von $A_1 = H_2$ in $H_1 = A_2$.

$B_4 G S_2 B_2 \barwedge S_2 B_2 B_4 G$. Wird diese letztere Punktgruppe nun wieder aus dem Projektionsscheitel S_1 auf den ursprünglichen Träger t_2 zurückprojiziert, so entsteht

$$S_2 B_2 B_4 G \barwedge A_2 B_2 D_2 B_1.$$

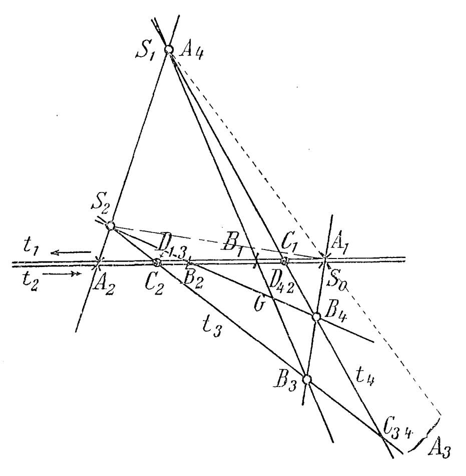
Hiernach ist $A_1 B_1 D_1 B_2 \barwedge A_2 B_2 D_2 B_1$, und man hat daher wieder in den Punktepaaren $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $D_1 D_2$, $B_2 B_1$ projektivisch verwandte Punkte der Art, daß das Punktepaar $B_1 B_2$ auf doppelte Weise entsprechend ist; folglich sind alle Punktepaare doppelt entsprechend und bilden eine Involution.

Beweis III.

Setzt man den Beweis I oder Beweis II des unten folgenden Satzes 28 als bekannt voraus, so bedarf es gar nicht mehr der dualistischen Durchführung dieses Beweises, sondern man kann unmittelbar auf Grund der Polaritäts-Übertragung den Satz 27 als Gegenstück des Satzes 28 aussprechen. Denn bei Zugrundelegung einer beliebigen Fundamentalkurve entspricht dem vollständigen Vierseit mit seinen Eckpunkten ein vollständiges Viereck mit seinen Seiten, und den involutorisch gepaarten Verbindungsstrahlen des Projektionsscheitels mit den Gegenseiten des Vierecks die involutorisch gepaarten Schnittpunkte der schneidenden Transversalen mit den Gegenseiten des Vierecks.

Erkl. 254. Der vorstehende zweite Beweis des Satzes 27 bedarf nur zweimaliger Projektion der Punktgruppen und könnte demnach als kürzer angesehen werden, wie der erste. Jedoch macht derselbe von einem Umstande Gebrauch, der sonst nicht häufig in den vorliegenden geometrischen Erörterungen Verwendung findet, nämlich von der Festhaltung der Projektivität beim Vertauschen von zwei Paar Elementen innerhalb einer Punktgruppe. Dieser Vorgang läßt den Beweis II aber als in das Gebiet der Maßbeziehungen eingreifend erscheinen. Der erste

Beweis dagegen wird nur dadurch unwesentlich verlängert, daß die Beweisführung für eben diese Vertauschbarkeit dieser Elemente teilweise in denselben aufgenommen ist, hat aber dafür vor dem zweiten den Vorzug der Selbständigkeit und der rein



Figur 66.

geometrischen Durchführung. Denn er beruft sich auf keinen fernstehenden Satz, sondern bringt die Beweisführung in fortlaufender Reihe reiner Projektionen zum Ziele.

Erkl. 255. Selbstverständlich könnte man die beiden Beweise I und II auch in maßgeometrischem Gewande vorführen, indem man das Gleichbleiben der Doppelverhältnisse bei den Projektionen bezw. beim Vertauschen zweier Elementepaare benutzt. So würde der erste Beweis die Gestalt annehmen:

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_3 B_3 C_3 D_3) = (A_4 B_4 C_4 D_4) = (A_2 B_2 C_2 D_2) = (A_2 B_2 D_1 C_1),$$

folglich sind $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2 = D_2 D_1$ zugeordnete Punktepaare einer involutorischen Punktreihe. Und ebenso entsteht im zweiten Beweise:

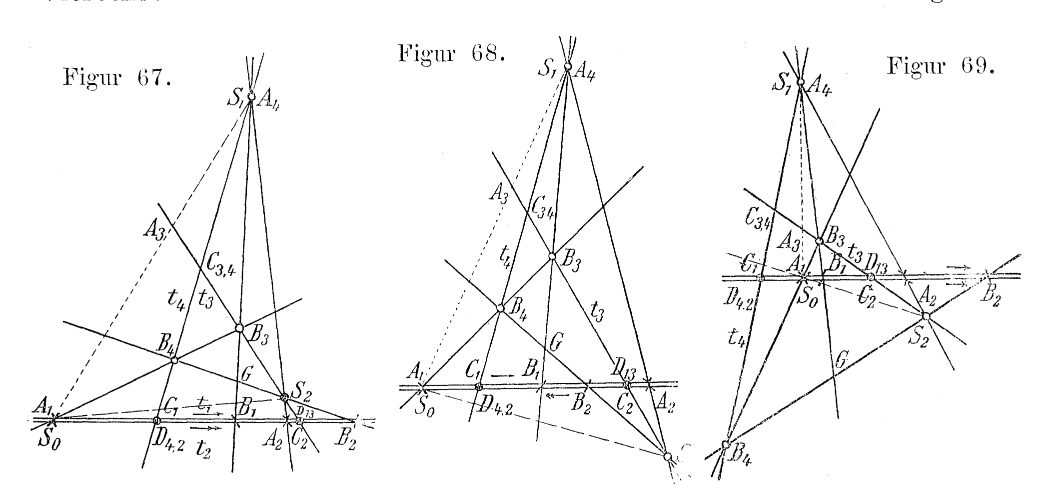
$$(A_1 B_1 D_1 B_2) = (B_4 G S_2 B_2) = (S_2 B_2 B_4 G) = (A_2 B_2 D_2 B_1),$$

folglich sind $A_1 A_2$, $D_1 D_2$, $B_1 B_2$ zugeordnete Punktepaare einer involutorischen Punktreihe.

Erkl. 256. Die Pfeile an den beiden auf der schneidenden Geraden vereinigt liegenden Punktreihen geben die Durchlaufsrichtung in der jeweils übereinstimmenden Punktfolge an, also in Figur 64 auf t_1: $A_1 B_1 C_1 D_1 K_1$ und nach rechts durchs Unendliche wieder nach $H_1 A_1$, auf t_2 von A_2 nach links durchs Unendliche nach $B_2 C_2 C_2 K_2 H_2$, also entgegengesetzte Umlaufsrichtung beider Reihen. In Figur 65 folgen in t_1 aufeinander: $A_1 B_1 D_1 H_1$ und nach links durchs Unendliche $K_1 C_1$; auf t_2 von A_2 ebenfalls nach links durchs Unendliche $B_2 D_2 H_2 K_2 C_2$, also gleiche Umlaufsrichtung in beiden Reihen. In Figur 66 ist die Punktfolge auf t_1 von rechts nach links: $A_1 C_1 B_1 K_1 D_1 H_1$, auf t_2 $A_2 C_2 B_2 K_2 D_2 H_2$ von links nach rechts, also wieder entgegengesetzte Reihenfolge. Nun ist aber gleiche oder ungleiche Reihenfolge der Einzelreihen für die involutorische Reihe dahin entscheidend, ob es eine Involution ohne oder mit Doppelelementen ist. Und demnach wird eben diese letzte Unterscheidung gegründet auf die Reihenfolge der Einzelpunktreihen bezw. auf die dadurch festgelegte Art der gegenseitigen Trennung zugeordneter Punktepaare: vgl. die folgende Antwort 64.

Frage 64. Welche Art von Punktinvolution entsteht auf verschieden liegenden Schnittgeraden der Gegenseitenpaare eines vollständigen Vierecks?

Antwort. 1) Die Feststellung der Involutionsart, welche auf jeder Transversalen entsteht, geschieht am einfachsten durch die Lagen-



Erkl. 257. Man kann die nebenstehende Untersuchung auch von anderem Gesichtspunkte aus durchführen: Faßt man nämlich irgend drei Eckpunkte des Vierecks, z. B. $A_4\,B_3\,B_4$ zu einem Dreieck zusammen, das eine der Seiten als Grundseite hat, so kann dieses Dreieck von der Transversalen nur auf zweierlei Weise geschnitten werden: erstens so, daß auf den beiden Seiten derselben null und drei, oder so, daß auf getrennten Seiten eine und zwei Ecken des Vierecks liegen. In jedem der beiden Fälle ist dann wieder zu unterscheiden die Lage des vierten Eckpunktes einerseits im Innenraum bezw. in einem Scheitelwinkelraum an der Spitze des Dreiecks oder in den an der gewählten Grundseite entstandenen Außenräumen des Dreiecks. Je nach der Lage dieses vierten Eckpunktes entstehen dann auf der Transversalen getrennt oder ungetrennt liegende Strecken der Schnittpunkte auf Gegenseiten, und man kommt durch allgemeiner gehaltene, aber etwas weniger übersichtliche Untersuchung der Einzelfälle zu demselben Ergebnis, wie in nebenstehender Durchführung in unmittelbarer Anlehnung an die Figuren selbst.

veränderung von einer beliebig gewählten Anfangslage aus: Dabei hat man aber zu unterscheiden zwischen den beiden Arten des Vierecks, ob nämlich, wie beim Viereck erster Art in Figur 64 bis 66 keine Ecke innerhalb des Dreiecks der anderen liegt, oder ob, wie beim Viereck zweiter Art, in Figur 67 bis 69 eine Ecke innerhalb des Dreiecks der drei anderen liegt.

2) In Figur 64 liegt die Transversale des Vierecks der ersten Art so, daß alle vier Ecken des Vierecks auf derselben Seite der Schnittgeraden liegen. Und die in entgegengesetzten Richtungen laufende Reihenfolge der Buchstaben in t_1 und t_2 zeigt, daß dabei eine Punktinvolution mit Ordnungspunkten entsteht. Das Punktepaar $A_1\,A_2$ liegt ganz außerhalb der beiden Paare $B_1\,B_2$ und $C_1\,C_2$, und von letzteren wird $C_1\,C_2$ von $B_1\,B_2$ umschlossen. Also liegt der Mittelpunkt der durch diese Punktepaare bestimmten involutorischen Punktreihe zwischen A_1

Erkl. 258. Bei den drei Vierecken der Figuren 64 bis 66 liegen die vier Eckpunkte so, daß wenn man dieselben durch einen einfachen Geradenzug oder in einfacher Aufeinanderfolge verbindet, ein konvexes Viereck entsteht, oder ein überschlagenes Viereck, keinenfalls aber ein konkaves Viereck mit einspringendem Winkel. Bei den drei Vierecken der Figuren 67 bis 69 aber liegen die vier Eckpunkte so, daß, wenn man dieselben in einfacher Aufeinanderfolge durch einen Geradenzug verbindet, stets ein konkaves Viereck, d. h. mit einspringendem Winkel entsteht. Man kann daher auch das Viereck der ersten Art kurzweg als konvexes Viereck bezeichnen, weil unter den in seinem vollständigen Viereck enthaltenen drei einfachen Vierecken neben den zwei überschlagenen Vierecken auch das einzige konvexe Viereck auftritt. Und das Viereck der zweiten Art kann man als konkaves Viereck bezeichnen, weil von den in seinem vollständigen Viereck enthaltenen drei einfachen Vierecken jedes ein konkaves Viereck, d. h. ein Viereck mit einspringendem Winkel ist. — Beim vollständigen Vierseit tritt solche Unterscheidung nicht auf, denn unter den in einem beliebigen vollständigen Vierseit enthaltenen drei einfachen Vierseiten befindet sich jedesmal ein konvexes, ein konkaves und ein überschlagenes Viereck, wobei alle sechs Eckpunkte des vollständigen Vierseits je zweimal als Ecken auftreten.

Erkl. 259. Von den vier Eckpunkten eines beliebigen Vierecks, ob erster oder zweiter Art, können zu beiden Seiten einer Geraden liegen: 0 und 4 oder 1 und 3 oder 2 und 2 oder 3 und 1 oder 4 und 0. Da der erste und fünfte sowie der zweite und vierte Fall gleichbedeutend sind, so hat man dreierlei Fälle zu unterscheiden; und diese sind dargestellt mit 0 und 4 in Figur 64 bezw. 67, mit 1 und 3 in Figur 65 bezw. 68, mit 2 und 2 in Figur 66 bzw. 69. Die nebenstehende Erörterung zeigt, daß der erste und dritte Fall für die vorliegende

und B_1, von den Ordnungspunkten liegt der eine zwischen A_1 und A_2, der andere zwischen C_1 und C_2.

3) Denkt man sich nun diese Transversale (Figur 64) um einen ihrer Punkte, z. B. um A_2, nach oben gedreht oder statt dessen um ihren unendlich fernen Punkt gedreht, d. h. parallel verschoben, oder auch beiderlei Ortsveränderungen unterworfen, so bleibt die obengenannte Art der gegenseitigen Lage der Punktepaare ungeändert, indem nur ihre gegenseitigen Abstände wechselnde Größe erhalten; also bleibt auch die Involution eine Involution mit Ordnungspunkten, so lange die Transversale beim Viereck erster Art alle vier Eckpunkte des Vierecks auf gleicher Seite läßt. — Geht dabei die Schneidende durch die Nebenecke C_{34} des Vierecks, so fallen die Schnittpunkte der Gegenseiten S_1C_1 und S_2C_2 in denselben Punkt C_{34} zusammen, und C_{34} wird ein Doppelpunkt oder Ordnungspunkt der Involution. Und nach dem Durchgang der Transversalen durch den Punkt C_{34} vertauschen bloß die Punkte des Paares C_1C_2 ihre Benennung, nicht aber ihre Lagebeziehung zu den anderen Punktepaaren B_1B_2 bezw. A_1A_2.

4) Rückt die Transversale aber durch einen der Vieleckspunkte, z. B. B_3 in Figur 64 hindurch, so daß sie in die Lage der in Figur 65 gezeichneten Schnittgeraden kommt, so hat sich die gegenseitige Lage der Punktepaare verändert, indem die zwei äußeren der drei Viereckseiten durch B_3 ihre Lage zur mittleren gerade vertauschen. Der Schnittpunkt A_1 der Seite $A_1B_3B_4$ rückt dadurch auf die entgegengesetzte Seite der Schnittpunkte B_1 mit S_1B_3 und C_2 mit S_2B_3: Daher liegt jetzt ein Punkt des Punktepaares A_1A_2 innerhalb des Punktepaares B_1B_2

Betrachtung wieder jedesmal gleichwertig sind, also braucht man nur noch zu unterscheiden zwischen der Lage derjenigen schneidenden Geraden, welche 0 und 4 bezw. 2 und 2, also zwei gerade Anzahlen der Eckpunkte von einander trennt, und derjenigen Transversalen, welche 1 und 3, also zwei ungerade Anzahlen der Eckpunkte des Vierecks von einander trennt. Und im Endergebnis stimmen überein der erste Fall beim konvexen und der zweite beim konkaven, bezw. der erste Fall beim konkaven und der zweite beim konvexen Viereck.

Erkl. 260. Die sechs Figuren 64 bis 69 zeigen je dreimal Involution mit und dreimal ohne Ordnungspunkte, nämlich ersteres zweimal beim konvexen Viereck (64, 66) und einmal beim konkaven (68), letzteres einmal beim konvexen Viereck (65) und zweimal beim konkaven (67, 69). Die Punktinvolutionen mit Ordnungspunkten in Figur 66 und 68 sind durch ganz gleichartige Punktepaare bestimmt, nämlich drei einander umschließende Paare. Man erkennt also, daß dieselben alle demselben Halbstrahl der involutorischen Reihe angehören müssen, daß sie also den einen Ordnungspunkt alle einschließen, den anderen samt dem Mittelpunkt alle ausschließen müssen. Es kann sich also nur noch darum handeln, die Lage der letztgenannten ausgeschlossenen Punkte auf der einen oder anderen Seite aller vorhandenen Punktepaare festzustellen. Dazu dient der Umstand, daß allen Punkten der kurzen Strecke zwischen dem Mittelpunkte und einem Ordnungspunkte alle äußeren Punkte des Halbstrahls entsprechen. Da nun in Figur 66 $A_1 C_1 < A_2 C_2$, so muß A_1 dem Mittelpunkt näher liegen als A_2, folglich der Mittelpunkt rechts von A_1; in Figur 68 aber ist $A_2 C_2 < A_1 C_1$, folglich A_2 näher beim Mittelpunkt, der Mittelpunkt rechts von A_2. — Einfacher gestaltet sich die Feststellung in Fignr 64, weil dort Punktepaare der beiderseitigen Halbstrahlen der Reihe vorliegen; also liegt der Mittelpunkt zwischen A_1 und B_1, der eine Ordnungspunkt innerhalb des einen Paares bezw. $C_1 C_2$, folglich müssen alle Punktepaare einander gegenseitig trennen, man hat eine Punktinvolution ohne Ordnungspunkte erhalten. Das zeigt auch die gleichlaufende Reihenfolge der Einzelpunktreihen an Figur 65; und der Mittelpunkt der involutorischen Reihe liegt innerhalb der von jedem der Punktepaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ überdeckten Punktstrecke $A_1 B_1$. — Geht insbesondere die Schnittgerade durch den Eckpunkt B_3 selbst hindurch, so fällt von jedem der Punktepaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ der eine Punkt in B_3 hinein, also hat man eine uneigentliche Involution nach Antwort 54, 1.

5) So lange nun die Schnittgerade weitergedreht oder verschoben wird, ohne einen der Eckpunkte zu überschreiten, so bleibt die gegenseitige Lagebeziehung der Punktepaare wieder ungeändert; also bleibt auch die Art der Involution dieselbe, bis durch neue Überschreitung eines der Eckpunkte die Richtung der Gegenseitenpaare, also auch die gegenseitige Lage der Punktepaare in der Weise vertauscht wird, daß ein Punkt eines Paares in ein bezw. zwei andere Paare hineinrückt, bezw. aus einem bezw. zwei anderen Paaren heraustritt. Und immer während die Transversale durch diesen Eckpunkt selbst hindurchgeht, liegt dieser zu vertauschende Punkt mit den Endpunkten der zwei anderen Paare vereinigt, also weder innerhalb noch außerhalb.

6) In Bestätigung dieser bisherigen Erörterungen entsteht wieder eine Involution mit Ordnungspunkten, wenn aus der Lage der Transversalen in Figur 65 durch Überschreitung der Ecke B_4 jene in Figur 66 hervorgebracht wird. In der Tat schließt jetzt das Punktepaar $A_1 A_2$ das Paar $C_1 C_2$ ein, und dieses auch noch das Paar

$A_1 A_2$, der andere innerhalb der beiden Paare $B_1 B_2$, $C_1 C_2$.

Erkl. 261. Von den Punktinvolutionen ohne Ordnungspunkte in Figur 65, 67, 69 sind ebenfalls je drei Punktepaare vorhanden. Bei dieser Involutionsart kann die Lage der Punkte gar nicht anders sein als so, daß jedes Paar jedes andere Paar trennt; und jedes Paar schließt den Mittelpunkt in sich, so daß stets ein Punkt jedes Paares auf dem einen, der andere Punkt auf dem anderen Halbstrahl der involutorischen Reihe liegen muß. Daher müssen von den sechs vorhandenen Punkten der Reihe auch drei auf der einen und drei auf der anderen Seite des Mittelpunktes liegen, also der Mittelpunkt zwischen den beiden innersten der sechs Punkte: $A_1 B_1$ in Figur 65, $A_2 B_1$ in 67, $B_1 C_2$ in Figur 69. Man könnte nunmehr noch fragen, wo bei diesen drei involutorischen Reihen die *Potenzpunkte* liegen, also die zugeordneten Punkte, welche beiderseits gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben und daher die kleinste Strecke aller Punktepaare zwischen sich einschließen. Die Lage dieser Punkte läßt sich ohne Einzelkonstruktion nur nach dem Augenmaß abschätzen und fällt in Figur 65 ungefähr mit $C_1 C_2$ zusammen, in Figur 67 einerseits zwischen $B_1 C_1$, anderseits zwischen $B_2 C_2$, in Figur 69 ziemlich nahe bei $A_1 A_2$, nämlich innerhalb A_1 und außerhalb A_2.

Erkl. 262. Als besondere Einzelfälle sind in nebenstehender Antwort bereits erwähnt das Hindurchgehen der Transversalen durch eine *Nebenecke* oder durch eine *Hauptecke* des Vierecks. In beiden Fällen liefern die beiderlei Vierecksarten (konkave und konvexe) jeweils übereinstimmendes Ergebnis. In der Nebenecke nämlich entsteht infolge des Zusammentreffens zweier Gegenseitenschnittpunkte ein *Ordnungspunkt* der Involution. In einer Hauptecke laufen je drei von den sechs Viereckseiten zusammen, also fallen dort auch die Schnittpunkte, nämlich je einer von jedem Gegenseitenpaare zusammen, und die drei außerhalb liegenden Punkte sind alle

$B_1 B_2$. Also liegt der eine *Ordnungspunkt* zwischen $B_1 B_2$, der andere samt dem *Mittelpunkt* der Reihe außerhalb $A_1 A_2$, und zwar in Figur 66 rechts von A_1. — Weitere Behandlung der Transversale am Viereck erster Art ist auch nicht mehr erforderlich, denn Überschreitung *einer* weiteren Ecke z. B. S_2 bringt wieder Figur 65 hervor, und Überschreitung der *zwei* Ecken S_2 und S_1 führt zurück auf Figur 64.

7) Ebenso braucht man beim *Viereck zweiter Art* (Figur 67 bis 69), wobei eine Ecke innerhalb des Dreiecks der drei anderen liegt, eigentlich nur *eine* Lage der Transversalen zu untersuchen, um dann die erhaltene Involutionsart bei jeder Überschreitung einer Ecke mit der anderen zu vertauschen. In Figur 67 läuft die Schneidende so, daß sie alle vier Eckpunkte auf *derselben Seite* liegen hat. Die gleichlaufende Reihenfolge der Buchstaben in t_1 und t_2 und die Lage der Punktepaare zeigt, daß hier eine Punktinvolution *ohne Ordnungspunkte* entsteht, denn das Punktepaar $A_1 A_2$ trennt das Paar $C_1 C_2$, und jedes dieser beiden wird wieder getrennt durch $B_1 B_2$. Der *Mittelpunkt* dieser Reihe liegt also innerhalb der Strecke $A_2 B_1$.

8) Geht die Transversale durch eine Ecke, so entsteht wieder eine *uneigentliche Involution* infolge des Zusammenfallens der Endpunkte von jedem der drei Punktepaare. — Überschreitet die Schneidende die Ecke S_2 in Figur 68, so vertauschen die Seiten $S_2 A_2$ und $S_2 B_2$ ihre Lage beiderseits von $S_2 C_2$, also rückt A_2 aus $C_1 C_2$ hinaus und B_2 in $C_1 C_2$ hinein, das Paar $A_1 A_2$ umschließt $C_1 C_2$ und dieses wieder $B_1 B_2$: Die Involution ist eine solche mit *Ordnungspunkten*; der eine derselben liegt innerhalb $B_1 B_2$, der andere samt dem *Mittelpunkt* der Reihe

diesem einen zugeordnet Man hat also diejenige Art der Involution, bei welcher die Eindeutigkeit verloren geht, indem die sämtlichen Punkte der involutorischen Reihe zu einem einzigen zugeordnet sind, nämlich die uneigentliche oder parabolische Involution. — Es lassen sich noch zwei andere Einzelfälle aufstellen, nämlich das Hindurchgehen der Transversalen durch zwei Nebenecken oder durch zwei Hauptecken. Der erstere Fall liefert diese beiden Nebenecken als Ordnungspunkte der Involution und dazu noch ein Punktepaar von dem übrigen Gegenseitenpaare. Der letztere Fall ist gleichbedeutend mit dem Zusammenfallen der Transversalen mit einer Viereckseite selber; dabei entstehen überhaupt nur drei Schnittpunkte, nämlich die zwei Hauptecken selber und eine der Nebenecken. Und als zugeordnet zu letzterem Schnittpunkt kann jeder beliebige Punkt der Seite selber gelten als Schnittpunkt dieser Geraden mit sich selbst. Denn die beiden Eckpunkte werden einander zugeordnet als ein Paar, und dazu darf ein zweites Punktepaar beliebig hinzutreten zur endgiltigen Bestimmung der Involution. Denkt man sich diesen übrigbleibenden beliebigen Punkt in einen der Eckpunkte verlegt, so hat man wieder die uneigentliche Involution, wie oben bei der durch einen Eckpunkt gehenden Transversalen; denkt man sich denselben beliebigen Punkt so gelegt, daß er zusammen mit der Nebenecke die beiden Eckpunkte von einander trennt oder nicht trennt, so hat man die Involution ohne oder mit Ordnungspunkten. Nur durch diese Mehrdeutigkeit der Ergebnisse ist ermöglicht, daß beiderlei Vierecke (konvexes und konkaves) aus vorher verschiedenerlei Einzelzuständen zu gleichem Grenzzustand führen können beim Übergang der Transversalen in die Viereckseite.

außerhalb $A_1 A_2$, und zwar in Figur 68 rechts von A_2. — Wird noch eine Ecke überschritten, so entsteht in Figur 69 wieder die Involution ohne Ordnungspunkte, denn von den Punktepaaren $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ wird jedes durch jedes andere getrennt; der Mittelpunkt liegt zwischen B_1 und C_2. — Weitere Verschiebung der Transversalen führt wieder auf Figur 68 und Figur 67 zurück.

9) Man kann also das Ergebnis der Untersuchung folgendermaßen zusammenfassen:

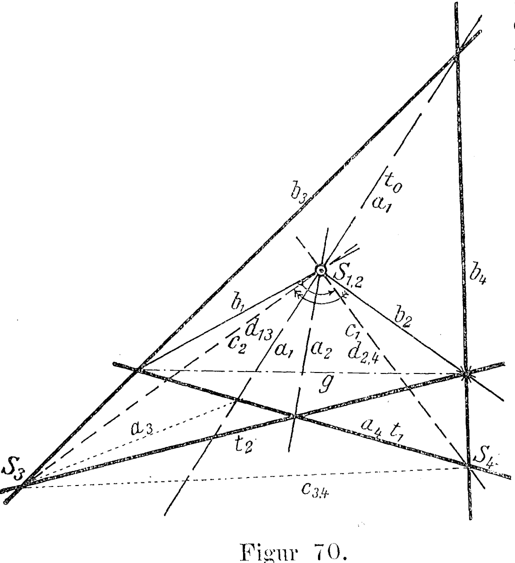
Satz 27a. Die Punktinvolution der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit den Gegenseitenpaaren eines vollständigen Vierecks besitzt zwei Ordnungspunkte, wenn die Transversale die Eckpunkte beim konvexen Viereck (erster Art) in gerader oder beim konkaven Viereck (zweiter Art) in ungerader Anzahl trennt; die Involution besitzt keine Ordnungspunkte, wenn die Transversale die Eckpunkte beim konvexen Viereck in ungerader oder beim konkaven Viereck in gerader Anzahl trennt.

Erkl. 263. Der erste Umstand, daß die Involution der Schnittpunkte von gleicher Art bleibt bei beliebiger Drehung oder Verschiebung der Transversalen, so lange letztere nur keinen Eckpunkt überschreitet, zusammen mit dem zweiten Umstand, daß jede auf der Transversalen liegende Nebenecke einen Ordnungspunkt liefert, gestattet eine andere Bestimmung der auf beliebiger Transversalen auftretenden Involution, als in Satz 27a, wobei man auch die Unterscheidung der beiden Arten des Vierecks entbehren kann. Die auf beliebiger Transversalen entstehende Punktinvolution ist eine solche mit oder ohne Ordnungspunkte, je nachdem diese Transversale sich nur ohne oder mit Überschreitung eines Eckpunktes so verschieben bezw. drehen läßt, daß sie durch eine Nebenecke des Vierecks hindurch geht. Ist dabei ohne Überschreitung einer

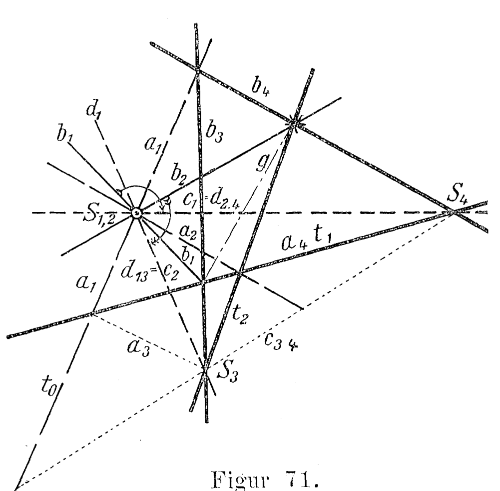
Ecke die Verschiebung in eine Nebenecke möglich (z. B. Figur 64 nach C_{34}, Figur 66 und 68 nach G), so ist immer auch Verschiebung in zwei Nebenecken möglich (Figur 64 und 66 und 68 jedesmal auch nach dem Schnittpunkt von $S_1 S_2$ und $B_3 B_4$), da ja ein Ordnungspunkt nie vereinzelt auftreten kann. Nach diesem Verschiebungsvorgang können sogar auch immer die Strecken der Schnittpunkte beurteilt werden, innerhalb deren die Ordnungspunkte auf der Transversalen liegen müssen: es sind die Strecken in denselben Winkelräumen der Gegenseiten, innerhalb deren auch die Nebenecken selbst liegen, also z. B. $C_1 C_2$ in Figur 64 wegen C_{34}, und ebenso $A_1 A_2$.

Frage 65. Welches ist das wichtigste Vorkommen der Involution beim vollständigen Vierseit?

Antwort. Das wichtigste Auftreten der involutorischen Beziehung beim vollständigen Vierseit betrifft eine Strahleninvolution und besteht in folgender Tatsache:



Figur 70.



Figur 71.

Erkl. 264. Die beiden Figuren 70 und 71 geben erschöpfend alle Arten des Vorkommens der Strahleninvolution am Vierseit wieder. Denn man hat beim Vierseit nicht die Unterscheidung der zweierlei Lagebeziehungen seiner Elemente, wie beim Viereck. Vier Strahlen können gelegt werden so beliebig als man will, es wird jedesmal ein konvexes, ein einspringendes und ein überschlagenes Viereck in dem vollständigen Vierseit enthalten sein. Die Unterscheidung der beiderlei Arten von Involution wird in der folgenden Antwort 66 durchgeführt.

Erkl. 265. In jeder der Figuren 70 und 71 ist der Scheitel der

Satz 28. Die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden aus jedem beliebigen Scheitelpunkt projiziert durch drei Paare zugeordneter Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels.

Beweis I.

Bezeichnet man in Figur 70 und 71 als $a_1 b_1 c_1$ die Verbindungsgeraden dreier beliebigen Vierseitecken mit dem Scheitel S, als $a_2 b_2 c_2$ die Verbindungsgeraden ihrer Gegenecken, so ist zu untersuchen, ob bei projektivischer

projizierenden Strahlen aufgefaßt als gemeinsamer Scheitel zweier zusammenfallenden Strahlenbüschel S_1 und S_2, von deren jedem sechs Strahlen in Betracht kommen, nämlich die sechs Verbindungsgeraden nach den Ecken des Vierseits — aufgefaßt einmal als Strahlen des Büschels S_1, und das anderemal als Strahlen des Büschels S_2. Und es wird der Nachweis geliefert, daß jedesmal, wenn in dem einen oder in dem anderen Strahlenbüschel irgend einer der sechs Strahlen herausgenommen wird, dann der projektivisch zugeordnete Strahl die Verbindungsgerade nach der Gegenecke der vorigen ist. Dazu ist es nicht notwendig, jedes einzelne Paar zu behandeln, nämlich

in S_1: $a_1 \mid b_1 \mid c_1 \mid d_1 = c_2 \mid h_1 = a_2 \mid k_1 = b_2$
in S_2: $a_2 \mid b_2 \mid c_2 \mid d_2 = c_1 \mid h_2 = a_1 \mid k_2 = b_1$.

Vielmehr genügt es nach Satz 24 für ein Paar das Doppeltentsprechen nachzuweisen, weil dann dasselbe für alle Paare eintreten muß. Diese zusammengehörigen Strahlen sind auch an der Figur gleichartig bezeichnet, nämlich a_1 und a_2 durch langgestrichelte Linien, b_1 und b_2 durch ausgezogene Linien, c_1 und c_2 durch kurzgestrichelte Linien. Und es ist im ersten der nebenstehenden Beweise der Nachweis des Doppeltentsprechens geführt für das Strahlenpaar $c_1 d_2 = c_2 d_1$, im zweiten Beweise für das Strahlenpaar $b_1 b_2$ bezw. $b_2 b_1$.

Erkl. 266. Der Gedankengang des ersten Beweises kann zusammengefaßt werden in der Formel

$$S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_3 \overline{\overline{\wedge}} t_0 \overline{\overline{\wedge}} S_4 \overline{\overline{\wedge}} t_2 \overline{\overline{\wedge}} S_2,$$

folglich $S_1 \overline{\wedge} S_2$. Denn man hat in geschlossener Aufeinanderfolge die Beziehungen:

$$a_1 b_1 c_1 d_1 \overline{\overline{\wedge}} a_3 b_3 c_3 d_3 \overline{\overline{\wedge}} a_4 b_4 c_4 d_4 \overline{\overline{\wedge}} a_2 b_2 c_2 d_2.$$

Man kann aber auch den Gedankengang dahin abändern, daß man jeden der beiden Strahlenbüschel S_1 und S_2 einzeln auf einen anderen Scheitel überträgt, nämlich S_1 durch Träger t_1 auf S_3, und S_2 durch Träger t_2 auf S_4. Dadurch entsteht: $S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_3$ und $S_2 \overline{\overline{\wedge}} t_2 \overline{\overline{\wedge}} S_4$. Betrachtet man aber die in S_3 und S_4 Zuordnung dieser drei Strahlenpaare das Doppeltentsprechen eines und folglich aller drei Strahlenpaare eintrifft, welches für die Involution grundlegend ist. Man bezeichnet also den Strahl c_2 des Büschels S_2 als d_1 in S_1 und sucht den dazu gehörigen Strahl d_2 in S_2 auf.

Zu dem Zwecke wählt man zunächst den auf d_1 liegenden Eckpunkt des Vierseits als neuen Scheitel S_3, um die Behandlung der zusammenfallenden Büschel S_1 und S_2 auf verschiedene Scheitel überzuführen. Man projiziert also erst Büschel S_1 $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ auf eine Seite t_1 des Vierseits, und die Schnittpunkte wieder aus S_3 als neue Büschelstrahlen S_3 $(a_3 b_3 c_3 d_3)$, so daß entsteht:

$$a_1 b_1 c_1 d_1 \overline{\overline{\wedge}} a_3 b_3 c_3 d_3,$$

wobei $d_3 = d_1 = c_2$ ist. Nimmt man nun weiter a_1 als vermittelnden Träger t_0, um den Strahlenbüschel S_3 in projektivische Beziehung zu setzen zu der auf c_1 liegenden Gegenecke des Vierseits als Scheitel S_4, so entsteht:

$$a_3 b_3 c_3 d_3 \overline{\overline{\wedge}} a_4 b_4 c_4 d_4,$$

wobei diesmal $c_3 = c_4$ und $d_4 = c_1$ ist. — Wird endlich noch dieser Strahlenbüschel S_4 wieder in projektivische Beziehung gebracht zum ursprünglichen Scheitel S_2 unter Vermittlung der Viereckseite t_2 als Träger, so kommt jede der ursprünglichen Verbindungsgeraden der Vierseitsecken auf die Verbindungsgerade mit der Gegenecke, nämlich

$$a_4 b_4 c_4 d_4 \overline{\overline{\wedge}} a_2 b_2 c_2 d_2,$$

wobei nun $c_2 = d_1$ und $d_2 = d_4 = c_1$ wird. Man hat also wirklich in den Strahlen $a_1 b_1 c_1 d_1 \overline{\wedge} a_2 b_2 c_2 d_2$ projektivisch zugeordnete Strahlen, von welchen das eine Paar $c_1 d_1$ und $c_2 d_2$ doppelt entsprechend ist. Folglich sind nach Satz 24 alle Paare doppelt entsprechend, und die Strahlenpaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$,

so erhaltenen Strahlengruppen, so zeigt sich, daß $c_{3,4}$ identisch sind, und daß je zwei der anderen entsprechenden Strahlenpaare $a_3 a_4$, $b_3 b_4$, $d_3 d_4$ durch Punkte derselben Geraden $a_1 = t_0$ hindurchgehen. Hieraus schließt man, daß $S_3 \doublebarwedge t_0 \doublebarwedge S_4$, und folglich auch $S_1 \barwedge S_2$.

Erkl. 267. Der erste Beweis kann an der Figur noch vielfache Abänderungen erfahren. Als S_3 und S_4 können irgend zwei Gegenecken des Vierseits dienen, als t_1 bezw. t_2 je irgend eine der durch S_4 bezw. S_3 gehenden Seiten des Vierseits: dann wird zu t_0 jeweils die Verbindungsgerade der Gegenecke zum Punkt $(t_1 t_2)$ mit dem Scheitel S_{12}, und das Doppeltentsprechen wird nachgewiesen für die beiden Projektionsstrahlen nach S_3 und S_4. So kann in Figur 70 und 71 unter Beibehaltung von S_3, S_4 und t_1 anstelle des Trägers t_2 verwandt werden die mit b_3 bezeichnete Gerade und anstatt Träger t_0 die Gerade b_2; und man erhält wieder das Doppeltentsprechen von $c_1 d_2$, ebenso als wenn t_1 mit b_4, t_2 mit t_2, t_0 mit b_1, oder t_1 mit b_4, t_2 mit b_3, t_0 mit a_2 vertauscht. Ähnliche Veränderungen der Träger sind auch bei Umwechslung der Scheitel S_3 und S_4 durchführbar. Will man durch den Wortlaut des ersten Beweises das Doppeltentsprechen von b_1 und b_2 nachweisen, so wählt man die beiden auf b_1 und b_2 liegenden Vierseitsecken als S_3 und S_4 und zwei durch diese hindurchgehenden Seiten des Vierseits als t_1 und t_2. Wird z. B. $(t_2 b_2)$ als S_3, $(t_1 b_1)$ als S_4 gewählt, so können sowohl t_1 und t_2 als auch t_0 beibehalten werden.

Erkl. 268. Um den Beweis in verschiedenen Abänderungen durchzuführen, ist es ratsam, an der Figur auch die Strahlen a_1 und a_2, b_1 und b_2 in den verwandten Strahlenbüscheln zu bezeichnen, etwa wie in Erklärung 265 als h_2 und h_1, k_2 und k_1, auch etwa den zur Vermittlung von S_1 und S_3 dienenden Träger t_1 als t_{13}, ebenso t_2 zwischen S_2 und S_4 als t_{24} und t_0 als t_{34}. — Jedenfalls muß aber auch bei Festhaltung der ursprünglichen Beweisfolge $S_1 \doublebarwedge t_1 \doublebarwedge S_3 \doublebarwedge t_0 \doublebarwedge S_4 \doublebarwedge t_2 \doublebarwedge S_2$ $c_1 c_2$ sind zugeordnete Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels.

Beweis II.

Faßt man in Figur 70 und 71 ins Auge die Verbindungsgeraden $a_1 b_1 d_1$ des Projektionsscheitels S_1 mit den auf der Seite b_3 liegenden Vierseitsecken und nimmt hinzu die Verbindungsgerade b_2 mit der Ecke $(b_2 b_4)$ als Gegenecke zu $(b_1 b_3)$, so entsteht durch Herstellung der projektivischen Verwandtschaft zwischen dieser Strahlengruppe und der letztgenannten Gegenecke $(b_2 b_4)$ als Scheitel unter Vermittlung der erstgenannten Seite b_3 als Träger die Beziehung: $a_1 b_1 d_1 b_2 \doublebarwedge b_4 g t_2 b_2$. Nun bleibt nach den Sätzen 6a, b in Erklärung 315 des I. Teils diese projektivische Verwandtschaft bestehen, auch wenn von den vier Elementen $b_4 g t_2 b_2$ zwei beliebige Paare unter einander vertauscht werden; also entsteht durch Vertauschung von b_4 mit t_2 und von g mit b_2 die Beziehung:

$$b_4 g t_2 b_2 \barwedge t_2 b_2 b_1 g.$$

Projiziert man die Schnittpunkte dieser neuen Strahlengruppe mit der Seite t_1 wieder aus dem ursprünglichen Scheitel S_2, so entsteht $t_2 b_2 b_4 g \doublebarwedge a_2 b_2 d_2 b_1$. Hiernach ist

$$a_1 b_1 d_1 b_2 \barwedge a_2 b_2 d_2 b_1,$$

und man hat daher wieder in den Strahlenpaaren $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $d_1 d_2$, $b_2 b_1$ projektivisch verwandte Geraden der Art, daß das Strahlenpaar $b_1 b_2$ auf doppelte Weise entsprechend ist; folglich sind alle Strahlenpaare doppelt entsprechend und bilden eine Involution.

Beweis III.

Setzt man den Beweis I oder Beweis II des früher aufgestellten Satzes 27 als bekannt voraus, so bedarf es gar nicht mehr der dualistischen Durchführung der

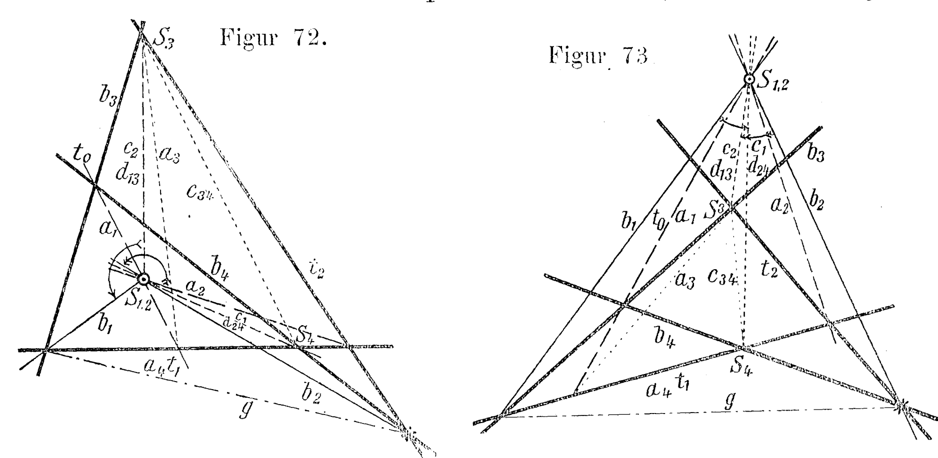
der Strahl h_1 auf h_2 oder k_2 auf k_1 übergeführt werden. Zu dem Zwecke müßte z. B. in Figur 70 und 71 noch t_0 und t_2 zum Schnitt gebracht und S_4 mit dem Schnittpunkt verbunden werden.

vorstehenden Beweise I und II, sondern man kann unmittelbar auf Grund der Polaritäts-Übertragung den Satz 28 als Gegenstück des Satzes 27 aussprechen. Denn bei Zugrundelegung einer beliebigen Fundamentalkurve entspricht dem vollständigen Viereck mit der Schnittgeraden seiner Seiten ein vollständiges Vierseit mit dem Projektionsscheitel seiner Eckpunkte, und der involutorischen Paarung der Schnittpunkte mit den Gegenseiten entspricht die involutorische Paarung der Verbindungsgeraden des Projektionsscheitels mit den Gegenecken.

Erkl. 269. Ebenso wie in den vorangehenden Erklärungen der Inhalt der früheren Erklärungen 249 bis 253 in entsprechender Umänderung für die Strahleninvolution wiedererscheinen mußte, so kann auch der Gegenstand der Erklärungen 254 und 255 ganz wörtlich hierher übernommen werden bezüglich des Gegensatzes zwischen den beiden Beweisgängen I und II unter sich oder in Hinsicht ihrer Vorführung in rein geometrischer oder mehr zahlenmäßiger Form durch Benutzung der Doppelverhältnisse. — Ebenso führt die Beachtung der den Strahlenbüscheln in den Figuren 70 und 71 beigesetzten Pfeile auf die Unterscheidung der beiden Arten der Involution und damit auf die der Antwort 64 gegenüberzustellende und hiernächst folgenden Frage 66. Denn in Figur 71 hat man im Büschel S_1 den Umlauf mit dem Uhrzeiger durch die Büschelstrahlen in der Reihenfolge $b_1\, d_1\, a_1\, k_1\, c_1\, h_1\, b_1$ und im Büschel S_2 die Reihenfolge derselben Strahlen $b_2\, d_2\, a_2\, k_2\, c_2\, h_2\, b_2$ ebenfalls mit dem Uhrzeiger; es besteht also Strahleninvolution mit gleichlaufenden Einzelbüscheln, folglich ohne Ordnungselemente. In Figur 70 dagegen zeigt im Büschel S_1 die Reihenfolge der Strahlen $b_1\, d_1\, a_1\, h_1\, c_1\, k_1$ den Umlauf gegen den Uhrzeiger, aber im Büschel S_2 die Reihenfolge derselben Strahlen $b_2\, d_2\, a_2\, h_2\, c_2\, k_2$ die Umlaufsrichtung mit dem Uhrzeiger. Demnach liegt hier Strahleninvolution mit entgegengesetzt laufenden Einzelbüscheln vor, und folglich mit Ordnungsstrahlen.

Frage 66. Welche Art von Strahleninvolution entsteht in ver-

Antwort. 1) Die Feststellung der Involutionsart, welche in jedem



schieden liegenden Projektionsscheiteln der Gegeneckenpaare eines Vierseits?

Erkl. 270. Von den fünf Figuren 70 bis 74, in welchen die Projektion der Eckpunkte des Vierseits wiedergegeben ist, enthalten zwei Involutionen mit Ordnungsstrahlen, nämlich Figuren 70 und 73, die drei anderen Figuren 71, 72, 74 enthalten Involutionen ohne Ordnungsstrahlen. In den beiden ersten Fällen sind die mit den Buchstaben bezeichneten Halbstrahlen a_{12}, b_{12}, c_{12} die Strahlen dreier Paare, welche den einen Ordnungsstrahl zwischen sich schließen, den anderen im gemeinsamen Nebenwinkelraume ausschließen. Dieser Umstand hat aber bei der Strahleninvolution nicht die Bedeutung, wie der entsprechende bei der Punktinvolution, denn man dürfte nur den Buchstaben b_1 oder b_2 je an den entgegengesetzten Halbstrahl anschreiben, dann läge der eine Ordnungsstrahl im gemeinsamen Winkelraum $(a_1\ a_2)$ und (c_1, c_2), der andere im Winkelraum $(b_1\ b_2)$. Die Axenstrahlen der Involution sind jedesmal die aufeinander senkrecht stehenden involutorisch zugeordneten Halbierungsgeraden der Winkel dieser Ordnungsstrahlen, also in Figur 70 ziemlich genau c_1 und c_2 selber, in Figur 73 ein Strahlenpaar, welches den Winkel $b_1\ b_2$ noch umschließt.

Erkl. 271. Bei der Strahleninvolution ohne Ordnungsstrahlen sind die Axenstrahlen ebenfalls die einander zugeordneten Schenkel eines senkrecht stehenden Strahlenpaares, also z. B. in Figur 71 ziemlich genau die Strahlen $a_1\ a_2$. An Stelle der nicht vorhandenen Ordnungsstrahlen treten hier die Potenzstrahlen p q auf, deren Winkel von den Axenstrahlen halbiert werden. Das wären in Figur 71 etwa zwei Strahlen zwischen $(b_1\ d_1)$ und $(b_2\ d_2)$. Denn $\sphericalangle (a_1\ d_1) < (a_1\ d_2)$, aber $\sphericalangle (a_1\ b_1) > (a_1\ b_2)$, also wird zwischen den Winkelgrößen $(a_1\ d_1)$ und $(a_1\ b_1)$ ein Winkel $(a_1\ p_1)$ liegen, dem ein gleich großer Winkel $(a_1\ p_2)$ entspricht

Projektionsscheitel erzeugt wird, geschieht am einfachsten durch die Lagenveränderung von einer beliebig gewählten Anfangslage aus. So hatte man in Figur 70 die Lage des Projektionsscheitels innerhalb des einzigen geschlossenen vierseitigen Raumes, welchen die vier Seiten eines Vierseits jedesmal umgrenzen. Die entgegengesetzt gerichtete Reihenfolge des Strahlenumlaufs $b_1\ d_1\ a_1\ h_1\ c_1\ k_1$ gegen $b_2\ d_2\ a_2\ h_2\ c_2\ k_2$ zeigt, daß dabei eine Strahleninvolution mit Ordnungsstrahlen entsteht. Das Strahlenpaar $a_1\ a_2$ wird ganz umschlossen von $c_1\ c_2$, und dieses wieder von $b_1\ b_2$. Daher liegt von den Ordnungsstrahlen der Involution der eine zwischen $a_1\ a_2$, der andere im Nebenwinkel der Strahlen $b_1\ b_2$.

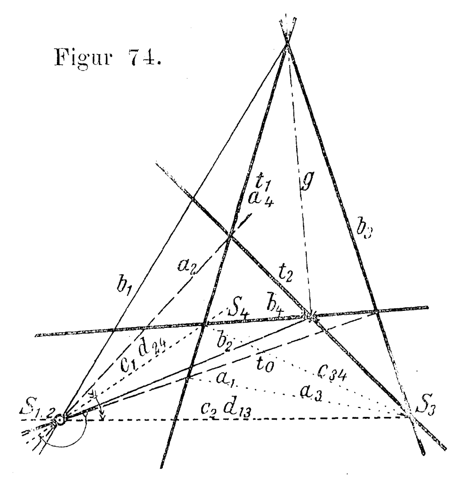
2) Denkt man sich den Scheitelpunkt S_{12} der Figur 70 irgend welchen Verschiebungen innerhalb des geschlossenen Viereckraumes unterworfen, so bleibt dabei offenbar die obengenannte Art der gegenseitigen Lage der Strahlenpaare ungeändert, indem nur ihre gegenseitigen Neigungswinkel wechselnde Größe erhalten; also bleibt auch die Involution eine Involution mit Ordnungsstrahlen, so lange der Projektionsscheitel innerhalb des gleichen von den vier Seiten des Vierecks gebildeten Raumteiles verbleibt. — Kommt dabei insbesondere der Scheitel etwa auf die Nebenseite des Vierseits zu liegen, so fallen die Projektionsstrahlen b_1 und b_2 der Gegenecken $(b_3\ t_1)$ und $(b_4\ t_2)$ in denselben Strahl g zusammen, und g wird ein Doppelstrahl oder Ordnungsstrahl der Involution.

3) Rückt aber der Projektionsscheitel S in Figur 70 über eine der Vierecksseiten, z. B. b_3, hinweg, so daß er in die Lage des Projektionsscheitels S in Fig. 71 gelangt, so hat sich die gegenseitige Lage der Strahlenpaare verändert,

zwischen den Winkelgrößen (a_1 b_2) und (a_1 d_2).

Von den Strahlenpaaren der Figur 72 sind dem rechten Winkel am nächsten die Strahlen b_1 b_2; deren stumpfer Winkel wird schon spitz, wenn b_2 nach d_2, b_1 nach der Verlängerung von d_1 gedreht wird, also sind Axenstrahlen zwei zunächst auf b_1 und b_2 in der Richtung gegen den Uhrzeiger folgende Strahlen, der eine in dem kleinen Winkel (b_2 d_2), der andere senkrecht dazu. Und Potenzstrahlen werden zwei Strahlen, die in derselben Umdrehungsrichtung folgen auf a_1 und a_2, beiderseits gleichgeneigt gegen die vorbestimmten Axenstrahlen, der eine im Winkel von b_2 mit dem verlängerten a_1, der andere im Winkel von a_2 mit dem verlangerten b_1. — In Figur 74 liegt der eine Axenstrahl jedenfalls in dem den drei Strahlenpaaren (b_1 b_2), (a_2 a_1), (c_1 c_2) gemeinsamen Winkelraum (c_1 b_2), der andere aber senkrecht dazu im gemeinsamen Außenwinkelraume, der von b_1 mit dem verlängerten c_2 gebildet wird. Und die beiden Potenzstrahlen liegen demnach in unmittelbarer Nachbarschaft der Strahlen a_1 und a_2, nämlich beiderseits gleichgeneigt gegen die vorbestimmten Axenstrahlen.

Figur 74.



Erkl. 272. Als besondere Einzelfälle sind in nebenstehender Antwort bereits erwähnt die Lage des Projektionsscheitels indem die Strahlen a_1 und c_2, welche bei Figur 70 zwischen b_1 und a_2 lagen, nun in Figur 71 außerhalb des Winkels b_1 a_2 und zwar in umgekehrter Folge zu liegen kommen. Daher liegt jetzt ein Strahl des Strahlenpaares innerhalb und einer außerhalb des Winkels b_1 b_2, folglich müssen alle Strahlenpaare einander trennen; man hat eine Involution ohne Ordnungsstrahlen erhalten, wie sich auch aus der gleichlaufenden Umlaufsfolge der Einzelstrahlen in Figur 71 ergibt. — Liegt insbesondere der Projektionsscheitel auf der Seite b_3 selbst, so fällt von jedem der Strahlenpaare a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2 ein Strahl in b_3 hinein, also hat man eine uneigentliche Involution nach Antwort 54, 2.

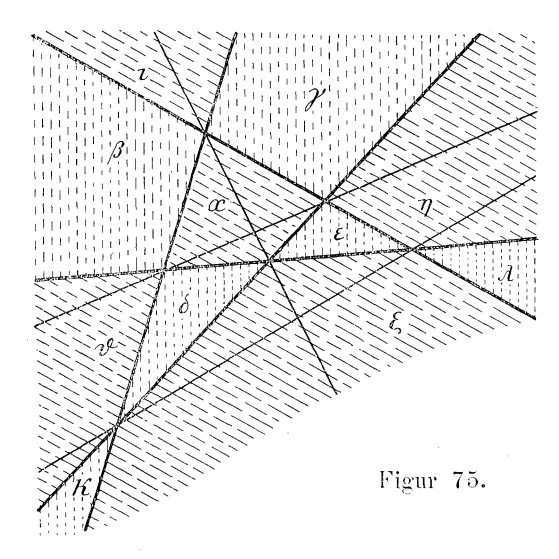
4) So lange nun der Punkt weiter v rschoben wird, ohne eine der Viereckseiten zu überschreiten, so bleibt die gegenseitige Lagebezieh ng der Strahlenpaare wieder ungeändert; also bleibt auch die Art der Involution dieselbe, bis d rch neue Ueberschreitung einer Seite die gegenseitige Lage der Strahlenpaare in der Weise vertauscht wird, daß ein Strahl eines Paares in ein bezw. zwei andere Paare hineinrückt bezw. aus einem bezw. zwei anderen Paaren heraustritt. Und immer, wenn der Scheitel auf einer Seite selbst liegt, liegen diese zu vertauschenden Strahlen mit dem einen Strahl der anderen Paare vereinigt, also weder innerhalb noch außerhalb.

5) In Bestätigung dieser bisherigen Erörterungen entsteht ebenfalls eine Involution ohne Ordnungsstrahlen, wenn die Fig. 70 statt durch Ueberschreitung der Seite b_3 in Figur 71, jetzt durch Ueberschreitung der Seite a_4 in Fig. 72 übergeführt wird, wenn also der Scheitel in einen der beiden geschlossenen dreiseitigen Räume des vollständigen Vierseits verlegt wird.

auf einer **Nebenseite** bezw. Diagonale oder auf einer **Hauptseite** des Vierseits. In der Nebenseite selbst hat man nämlich infolge des Zusammenfallens zweier zugeordneten Projektionsstrahlen einen **Ordnungsstrahl** der Involution. Und auf der Hauptseite liegen je drei von den sechs Eckpunkten, also fallen in diese Hauptseite drei Verbindungsstrahlen, nämlich je eine von jedem Gegeneckenpaare zusammen, und die drei außerhalb liegenden Projektionsstrahlen sind alle diesem **einen** zugeordnet. Man hat also diejenige Art der Involution, bei welcher die Eindeutigkeit verloren geht, indem sämtliche Strahlen des involutorischen Büschels zu einem einzigen zugeordnet sind, nämlich die uneigentliche oder parabolische Involution. — Es lassen sich noch zwei andere Einzelfälle aufstellen, nämlich die Lage des Projektionsscheitels auf **zwei Nebenseiten** oder auf **zwei Hauptseiten**. Der erstere Fall liefert diese **beiden** Nebenseiten als **Ordnungsstrahlen** der Involution, und dazu noch ein Strahlenpaar nach dem übrigen Gegeneckenpaare. Der letztere Fall ist gleichbedeutend mit dem Hineinfallen des Projektionsscheitels in einen Vierseitseckpunkt selber; dabei entstehen überhaupt nur **drei Projektionsstrahlen**, nämlich die zwei Hauptseiten selber und eine der Nebenseiten. Und als zugeordnet zu letzterem Projektionsstrahl kann jeder beliebige Strahl durch den Eckpunkt selber gelten als Verbindungsstrahl dieses Punktes mit sich selber. Denn die beiden Seiten werden einander zugeordnet als **ein** Paar und dazu darf ein zweites Strahlenpaar beliebig hinzutreten zur endgiltigen Bestimmung der Involution. Denkt man sich diesen übrig bleibenden beliebigen Strahl ebenfalls in eine der Seiten verlegt, so hat man wieder die uneigentliche Involution wie oben bei dem auf **einer Seite** liegenden Projektionsscheitel; denkt man sich denselben beliebigen Strahl so gelegt, daß er zusammen mit der Nebenseite die beiden Seiten von einander trennt oder nicht trennt, so hat man die Involution ohne oder mit Ordnungsstrahlen. — **Offene Räume** enthält das Vierseit im ganzen **s e t s a c h t**. Davon stoßen zwei, wie in Figur 71, mit einer Seite an das geschlossene Viereck an und liefern Involutionen **ohne Ordnungsstrahlen**; zwei andere stoßen je mit der einen Seite an die geschlossenen dreiseitigen, auf einer anderen Seite an die obengenannten offenen Räume an und liefern aus beiden Gründen Involutionen **mit Ordnungsstrahlen**, ebenso wie derjenige fünfte Raum, welcher an beide Dreiecke zugleich angrenzt. Es fehlen also nur noch die drei offenen Scheitelwinkelräume, deren einer (Fig. 73) vom Scheitelwinkel des geschlossenen Vierecks gebildet, die andern (Fig. 74) je von einem Scheitelwinkel der geschlossenen Dreiecke. Durch Ueberführung des Projektionsscheitels aus einem der angrenzenden Nebenräume ergibt sich für den ersteren das Auftreten der Involution **mit Ordnungsstrahlen**, für die zwei andern aber **ohne Ordnungsstrahlen**.

6) Man kann also das Ergebnis der Untersuchung folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 28a. Die **Strahleninvolution** der Verbindungsstrahlen eines beliebigen Punktes mit den Gegeneckenpaaren eines vollständigen Vierseits besitzt **zwei Ordnungsstrahlen**, wenn der Projektionsscheitel **innerhalb** des geschlossenen Viereckraumes liegt oder durch eine **geradzahlige** Überschreitung von Seiten von demselben getrennt liegt; die Involution besitzt **keine Ordnungsstrahlen**, wenn der Projektionsscheitel durch eine **ungradzahlige** Überschreitung von Seiten vom geschlossenen Vierecksraume getrennt liegt. (Vgl. Fig. 75.)



Figur 75.

Erkl. 273. In Aufgabe 32 und 33 der Aufgabensammlung am Schlusse des *ersten Teiles* dieses Lehrbuches war nachgewiesen, daß durch vier gerade Linien im ganzen elf getrennte Räume in der Ebene erzeugt werden: drei geschlossene und acht offene. Diese Räume sind in Figur 75 durch Buchstaben bezeichnet, nämlich α bis λ. Ein geschlossener Raum α wird von allen vier Seiten begrenzt; in ihm liegt der Projektionsscheitel in Fig. 70. An ihn grenzen die zwei dreilinig begrenzten offenen Räume $\beta\ \gamma$, deren erster in Fig. 71 den Projektionsscheitel enthält. Ebenso grenzen an α die beiden dreilinig geschlossenen Räume $\delta\ \varepsilon$, deren erster in Fig. 72 den Projektionsscheitel enthält. Es folgt der einzige offene vierlinig begrenzte Raum ζ, zwei dreilinig begrenzte offene Räume $\eta\ \vartheta$ und endlich die zweilinig begrenzten offenen Räume $\iota\ \varkappa\ \lambda$. Wegen deren verschiedener Bedeutung ist der Projektionsscheitel in Figur 73 im Raum ι, in Figur 74 im Raum $\varkappa$ noch besonders dargestellt.

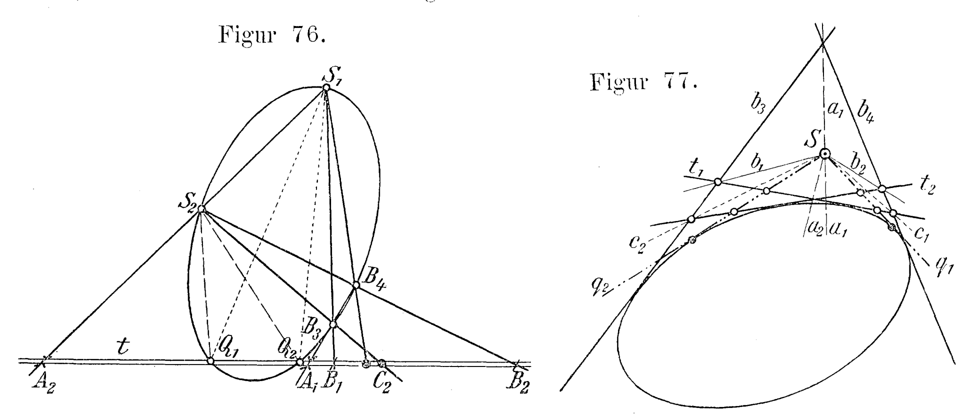
Erkl. 274. Von den acht offenen Räumen hängen je zwei durchs Unendliche mit einander zusammen, nämlich erstens β mit λ, beide im Scheitelwinkelraum $\varepsilon\ \lambda$, zweitens γ und $\varkappa$, beide im Scheitelwinkelraum $\delta\ \varkappa$, drittens ζ und ι, beide im Scheitelwinkelraum $\alpha\ \iota$, und endlich viertens η und ϑ, beide im Scheitelwinkelraum $\delta\ \varepsilon$. Fig. 75 giebt für jeden der Räume die Bezeichnung, ob die Verlegung des Projektionsscheitels in denselben eine Involution mit oder ohne Ordnungsstrahlen liefert. Die fünf durch *Striche* bezeichneten Räume $\alpha\ \zeta\ \eta\ \vartheta\ \iota$ liefern Involutionen mit *Ordnungsstrahlen*, die mit *Punktierung* bezeichneten Räume $\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \varkappa\ \lambda$ liefern Involutionen *ohne Ordnungsstrahlen*. Man sieht, daß je zwei durchs Unendliche zusammenhängende Räume *gleiche Involutionsart* liefern, da man aus dem einen in den anderen ohne Überschreitung einer Vierecksseite gelangen kann. Nimmt man je zwei solcher zusammen als *einen* Doppelraum, so hat man in drei Räumen α, $\zeta + \iota$, $\eta + \vartheta$ die *hyperbolische*, in vier Räumen δ, ε, $\beta + \lambda$, $\gamma + \varkappa$ die *elliptische* Involution, auf den Seiten selber die *parabolische* und in den Eckpunkten selbst unbestimmte Involution, wofür jede der genannten gewählt werden kann.

Erkl. 275. Der erste Umstand, daß die Involution der Projektionsstrahlen von gleicher Art bleibt bei beliebiger Verschiebung des Projektionsscheitels, so lange letzterer nur keine einzelne Seitenlinie überschreitet, zusammen mit dem zweiten Umstand,

daß jede etwa durch den Projektionsscheitel gehende Nebenseite einen Ordnungsstrahl liefert, gestattet eine andere Bestimmung der in beliebigem Scheitel entstehenden Involutionsart als in Satz 28a. Die in beliebigem Projektionsscheitel entstehende Strahleninvolution ist nämlich eine solche mit oder ohne Ordnungsstrahlen, je nachdem sich dieser Scheitelpunkt ohne oder nur mit Überschreitung einer Seitenlinie so verschieben läßt, daß er auf eine Nebenseite des Vierseits zu liegen kommt. Auch Fig. 75 zeigt, daß die gestrichenen Räume nur diejenigen sind, durch welche die Nebenseiten hindurchgehen. Ist dabei Verschiebung des Scheitels auf eine Nebenseite möglich, so ist immer auch Verschiebung auf zwei Nebenseiten möglich, d. h. in den Schnittpunkt zweier Nebenseiten, da ja ein Ordnungsstrahl nie vereinzelt auftreten kann. Je zwei im Unendlichen zusammenhängende Doppelräume gehören auch in dieser Hinsicht zusammen, indem z. B. η und ϑ den Schnittpunkt in η, ζ und ι in ζ besitzen.

* * *

d) Involutorische Beziehungen an den Kurven zweiten Grades.



Figur 76. Figur 77.

Frage 67. Welche Erweiterung erfahren die Sätze 27 und 28, wenn die Elemente des Vierecks bezw. Vierseits zugleich als erzeugende Elemente einer Kurve zweiten Grades auftreten?

Erkl. 276. Die Sätze 16 und 16a des zweiten Teiles dieses Lehrbuchs lauten:

Die Gesamtheit der in zwei beliebigen Kurvenpunkten (hier S_1 S_2) durch deren Verbindung mit allen übrigen Kurvenpunkten (hier B_3 B_4 Q_1 Q_2) gebildeten Graden liefert jedesmal zwei projektivisch verwandte Srahlenbüschel.

Die Gesamtheit der auf zwei beliebigen Tangenten (hier t_1 t_2) durch deren Schnitt mit allen übrigen Tangenten (hier b_3 b_4 q_1 q_2) gebildeten Punkte liefert jedesmal zwei projektivisch verwandte Punktreihen.

Antwort. 1) Sind die vier Eckpunkte des Vierecks in Fig. 64 bis 69 zugleich Kurvenpunkte einer Kurve zweiter Ordnung, so hat man ein der Kurve eingeschriebenes Viereck, und auf der Transversale liegen außer den Schnittpunkten mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks auch zwei Schnittpunkte mit der Kurve. Bezeichnet man alle Elemente in Fig. 76 ganz wie in Fig. 64 bis 69, also die Eckpunkte des Vierecks mit S_1 S_2 B_3 B_4 und die neuen Kurvenschnittpunkte mit Q_1 Q_2, so werden die vier Kurvenpunkte B_3 B_4 Q_1 Q_2 aus S_1 und S_2 jedenfalls durch zugeordnete Strahlen zweier projektivischen Büschel S_1 und S_2 projiziert. Man hat also $S_1\ (B_3\ B_4\ Q_1\ Q_2) \overline{\wedge}\ S_2\ (B_3\ B_4\ Q_1\ Q_2)$.

Und der bereits in Antwort 63 und 65 zur Verwendung gebrachte Satz 6b in Erkl. 315 des ersten Teiles lautet: Wenn zwei Gruppen von je vier Elementen zweier Gebilde projektivisch sind, so bleibt die Projektivität auch dann bestehen, wenn in einer der Gruppen zwei beliebige Paare der Elemente mit einander vertauscht werden.

Erkl. 277. So lange die projektivische Verwandtschaft der Elemente in Fig. 76 und 77 ausgedrückt wird durch die (mit großen bezw. kleinen Buchstaben zu schreibende) Formel $B_1\ C_2\ Q_1\ Q_2 \barwedge C_1\ B_2\ Q_1\ Q_2$ hat die Beziehung keinen bemerkenswerten Inhalt, denn es entsprechen sich nicht die Gegenelemente des Vierecks und auch von den Elementen Q ist jedes einfach sich selbst zugeordnet. Auch würde in dieser Verwandtschaft dem Strahl $S_1\ S_2$ bezw. dem Punkt $(t_1\ t_2)$ die Tangente im andern Scheitel bezw. der Berührungspunkt des anderen Trägers zuzuordnen sein, also nicht A_1 und A_2. Nach der Vertauschung der Elemente der einen Gruppe aber sind zugeordnet die Gegenelemente des Vierecks, darunter auch A_1 und A_2, und — was die Hauptsache ist — dem Elemente Q_1 entspricht nicht wieder Q_1 sondern Q_2, und in gleicher Richtung entspricht dem Element Q_2 nicht wieder Q_2 sondern Q_1. Und dadurch werden $Q_1\ Q_2$ doppelt entsprechende Elemente, liegen also involutorisch gepaart.

Erkl. 278. In der nebenstehenden Beweisführung treten die Elemente $A_1\ A_2\ a_1\ a_2$ erst nachträglich hinzu. Das rührt bloß daher, daß die Beweisführung mit den Punkten $S_1\ S_2$ bezw. den Kurventangenten $t_1\ t_2$ durchgeführt ist. Dasselbe trifft zu, wenn $B_3\ B_4$ bezw. $b_3\ b_4$ gleicherweise benutzt werden. Würde man aber als Büschelscheitel in Fig. 76 die Punkte S_1 und B_3 oder S_2 und B_4, bezw. als Träger in Fig. 77 die Geraden t_1 und b_3 oder t_2 und b_4 auswählen, so würden die Elemente A und C bezw. a und c im Beweis auftreten

Folglich sind auch projektivisch entsprechend die Schnittpunkte dieser Strahlen mit der Transversalen, nämlich $B_1\ C_2\ Q_1\ Q_2 \barwedge C_1\ B_2\ Q_1\ Q_2$. Nun bleibt aber die projektivische Zuordnung dieser Punkte aufrecht erhalten, wenn man auch in der einen dieser beiden Punktgruppen das Paar $Q_1\ Q_2$ und zugleich das andere Punktpaar vertauscht. Dadurch entsteht $B_1\ C_2\ Q_1\ Q_2 \barwedge B_2\ C_1\ Q_2\ Q_1$. Und hierin liegt ausgesprochen, daß projektivisch zugeordnete Punktpaare sind: zu B_1 Punkt B_2, zu C_2 Punkt C_1, zu Q_1 Punkt Q_2 und auch in derselben Verwandtschaft zu Q_2 rückwärts wieder Punkt Q_1. Hier sind also $Q_1\ Q_2$ ein doppelt entsprechendes Punktpaar und folglich sind sämtliche Punktpaare doppelt entsprechende, und sie bilden eine Involution. Der von den Punktpaaren $B_{1\ 2}\ C_{1\ 2}$ gebildeten Punktinvolution gehören aber nach Satz 27 auch die Punkte $A_1\ A_2$ als zugeordnete Punkte an, folglich gesellt sich nun das Punktpaar $Q_1\ Q_2$ als viertes (involutorisch zugeordnetes) Paar den drei vorhandenen Punktpaaren $A_{1\ 2}\ B_{1\ 2}\ C_{1\ 2}$ noch hinzu.

2) Sind die vier Seitenlinien des Vierseits in Fig. 70 bis 74 zugleich Kurventangenten einer Kurve zweiter Klasse, so hat man ein der Kurve um- bezw. angeschriebenes Vierseit, und durch den Projektionsscheitel gehen außer den Projektionsstrahlen nach den Gegeneckenpaaren des Vierseits auch zwei Tangenten an die Kurve. Bezeichnet man alle Elemente in Fig. 77 ganz wie in Fig. 70 bis 74, also auch die Seiten des Vierseits mit $t_1\ t_2\ b_3\ b_4$ und die neuen Kurventangenten aus S mit $q_1\ q_2$, so werden durch die vier Kurventangenten $b_3\ b_4\ q_1\ q_2$ auf t_1 und t_2 jedenfalls zugeordnete Punkte zweier projektivischen Punktreihen t_1 und t_2 ausgeschnitten.

und $B_{1\,2}$ $b_{1\,2}$ erst nachträglich hinzukommen. Man hat also viererlei Auswahl für die Durchführung des Beweises und kann dafür im Voraus auswählen, welche Elementenpaare im Beweis auftreten sollen und welche nicht. — Und jedesmal kann die Kurve zu den gegebenen vier Elementen jede beliebige Lage haben. Denn da eine Kurve erst durch fünf Elemente eindeutig bestimmt ist, so kann man zu den vier Punkten in Fig. 76 noch einen beliebigen fünften Punkt oder eine Tangente durch einen der gegebenen Punkte wählen, bezw. zu den vier Tangenten in Fig. 77 eine beliebige fünfte Gerade oder einen Berührungspunkt auf einer der gegebenen Tangenten.

Erkl. 279. Das von den Kurvenschnittpunkten auf der Transversalen bezw. von den Kurventangenten aus dem Projektionsscheitel gebildete Elementenpaar ordnet sich selbstverständlich ein in diejenige Involutionsart, welche durch die Sätze 27a und 28a bestimmt ist. Daher muß in Fig. 76, wo die Paare $A_{1\,2}$ $B_{1\,2}$ $C_{1\,2}$ wie in Fig. 64 einander nicht trennen, auch das Punktpaar $Q_{1\,2}$ als ein ungetrenntes Paar erscheinen. Ebenso sind in Fig. 77 die Strahlenpaare $a_{1\,2}$ $b_{1\,2}$ $c_{1\,2}$ wie in Fig. 70 ungetrennt, folglich wird auch das Tangentenpaar $q_{1\,2}$ ein ungetrenntes Strahlenpaar, indem das Paar $a_{1\,2}$ ganz innerhalb $q_{1\,2}$, die Paare $b_{1\,2}$ $c_{1\,2}$ ganz außerhalb $q_{1\,2}$ liegen. Dagegen ist in Fig. 78, welche nach Fig. 65, und in Fig. 79, welche nach Fig. 71 hergestellt ist, jedes Paar $A_{1\,2}$ $B_{1\,2}$ $C_{1\,2}$ bzw. $a_{1\,2}$ $b_{1\,2}$ $c_{1\,2}$ durch jedes andere Elementenpaar innen und außen getrennt, und daher liegt auch in Fig. 78 das Punktpaar $Q_{1\,2}$ und in Fig. 79 das Strahlenpaar $q_{1\,2}$ so, daß es von jedem anderen Strahlenpaar innen und außen getrennt wird, bezw. daß dieses Elementenpaar selber jedes andere innen und außen trennt.

Erkl. 280. Wird in Fig. 76 die Transversale so viel weiter nach unten

Man hat also t_1 $(b_3\ b_4\ q_1\ q_2) \,\overline{\wedge}\, t_2$ $(b_3\ b_4\ q_1\ q_2)$. Folglich sind auch projektivisch entsprechend die Projektionsstrahlen nach diesen Schnittpunkten aus dem Scheitel S, nämlich $b_1\ c_2\ q_1\ q_2 \,\overline{\wedge}\, c_1\ b_2\ q_1\ q_2$. Nun bleibt aber die projektivische Zuordnung dieser Strahlen aufrecht erhalten, wenn man auch in der einen dieser beiden Strahlengruppen das Paar q_1 q_2 und zugleich das andere Strahlenpaar vertauscht. Dadurch entsteht $b_1\ c_2\ q_1\ q_2 \,\overline{\wedge}\, b_2\ c_1\ q_2\ q_1$. Und hierin liegt ausgesprochen, daß projektivisch zugeordnete Strahlenpaare sind: zu b_1 Strahl b_2, zu c_2 Strahl c_1, zu q_1 Strahl q_2, und auch in derselben Verwandtschaft zu q_2 rückwärts wieder Strahl q_1. Es sind also q_1 q_2 ein doppelt entsprechendes Strahlenpaar, und folglich sind sämtliche Strahlenpaare doppelt entsprechend, und sie bilden eine Involution. Der von den Strahlenpaaren $b_{1\,2}$ $c_{1\,2}$ gebildeten Strahleninvolution gehören aber nach Satz 28 auch die Strahlen a_1 a_2 als zugeordnete Strahlen an, folglich gesellt sich nun das Strahlenpaar q_1 q_2 als viertes involutorisch zugeordnetes Paar den drei vorhandenen Strahlenpaaren $a_{1\,2}$ $b_{1\,2}$ $c_{1\,2}$ noch hinzu.

3) Nun können aber durch dieselben vier Punkte S_1 S_2 B_3 B_4 des Vierecks in Fig. 76 beliebig viele umgeschriebenen Kurven zweiter Ordnung gehen, und ebenso können an dieselben vier Tangenten t_1 t_2 b_3 b_4 des Vierseits in Fig. 77 beliebig viele ein- bezw. angeschriebene Kurven zweiter Klasse gelegt werden, — und bei jeder dieser Kurven gilt für die Scheitelpunkte $Q_{1\,2}$ bezw. für die Tangenten $q_{1\,2}$ dieselbe involutorische Einordnung unter die Elementenpaare der durch die Gegenseitenpaare bezw. die Gegeneckenpaare im Voraus festgelegten Involu-

verlegt, daß sie die Kurve nicht mehr in zwei Punkten Q_1 Q_2 schneidet, sondern in einem Punkte berührt, so fallen zwei involutorisch zugeordnete Punkte in einen Doppelpunkt zusammen, der vereinigte Berührungspunkt $Q_{1\,2}$ wird zu einem Ordnungspunkt der Involution. Liegt die Transversale in Fig. 76 noch weiter ab, so daß sie die Kurve gar nicht mehr trifft, so hat sie gar keine Schnittpunkte. Man spricht dann wohl auch in der projektivischen Geometrie von imaginären oder idealen Schnittpunkten einer außerhalb der Kurve verlaufenden Transversale mit der Kurve, bezw. von einem imaginären oder idealen Punktpaar der Involution, als dessen Verbindungsgerade eben die Transversale, d. h. eine reelle Gerade aufgefaßt wird, welche der Träger der involutorischen Punktreihe ist. In Anlehnung an Satz 27a findet man, daß in Fig. 78, wo die Involution keine reellen Ordnungselemente hat, auch wirklich die Gerade gar nicht so gelegt werden kann, daß sie die Kurve berührt — oder umgekehrt: daß durch die vier Grundpunkte des Vierecks in Fig. 78 (oder 65, 67, 69) gar keine Kurve gelegt werden kann, welche jene Transversale berührt. Anderseits aber gibt es in Fig. 76 (bezw. 64, 66, 68) zwei Ordnungspunkte der Involution, und daher gibt es unter allen durch die vier Grundpunkte der Fig. 76 (bezw. 64, 66, 68) gehenden Kurven gerade zwei, welche die dort gegebene Transversale berühren: eben in je einem der Ordnungspunkte der Involution. Die eine Kurve wird eine Ellipse sein, nur wenig verschieden von der in Fig. 76 vorhandenen; die andere wird eine Hyperbel sein, deren einer Ast oberhalb der Transversalen durch die vier Eckpunkte geht, während der andere die Transversale von unten her zwischen C_1 und C_2 berührt. In Fig. 66 und 68 sind es je zwei Hyperbeln, welche die Transvale in den Ordnungspunkten berühren.

tionen auf der schneidenden Transversalen bezw. in dem projicierenden Scheitelpunkte.

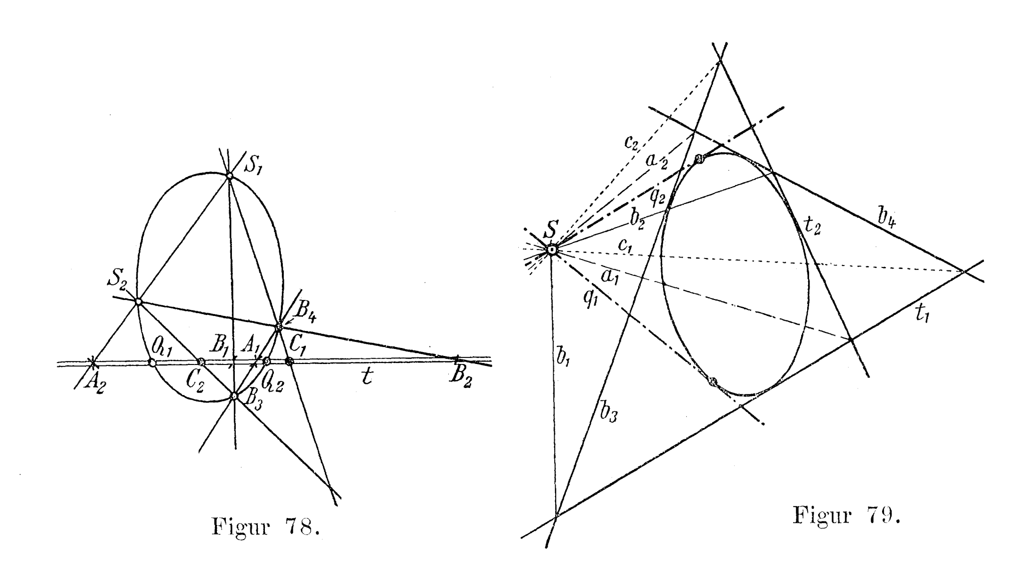
4) Man erhält also folgenden wichtigen, gewöhnlich nach seinem Entdecker Desargues (1639) benannten Doppelsatz für Viereck und Vierseit.

Satz 29. Die zwei Schnittpunkte einer beliebigen Schnittgeraden mit jeder durch die vier Hauptecken eines vollständigen Vierecks hindurch gehenden Kurve zweiter Ordnung bilden ein zugeordnetes Punktepaar derselben Punktinvolution, welche auf dieser Transversalen durch ihre Schnittpunkte mit den Gegenseitenpaaren des vollständigen Vierecks bestimmt wird. — Berührt die Transversale die Kurve, so wird ihr Berührungspunkt zu einem Ordnungspunkt der Involution.

Satz 30. Die zwei Tangenten aus einem beliebigen Scheitelpunkte an jede die vier Hauptseiten eines vollständigen Vierseits berührende Kurve zweiter Klasse bilden ein zugeordnetes Strahlenpaar derselben Strahleninvolution, welche in diesem Scheitel durch seine Verbindungsgeraden mit den Gegeneckenpaaren des vollständigen Vierseits bestimmt wird. — Liegt der Scheitelpunkt auf der Kurve, so wird seine Tangente zu einem Ordnungsstrahl der Involution.

Erkl. 281. Denkt man sich in Fig. 77 den Projektionsscheitel in denselben Außenraum verlegt, welcher die Kurve selber enthält, und in welchem nach Fig. 75 ζ die gleiche Art von Strahleninvolution entsteht, wie Fig. 77 selbst aufweist, so kann der Scheitel S so nahe an die Kurve heranrücken, daß er keine zwei Tangenten mehr gestattet, sondern nur noch eine einzige, indem S selbst zum Kurvenpunkt

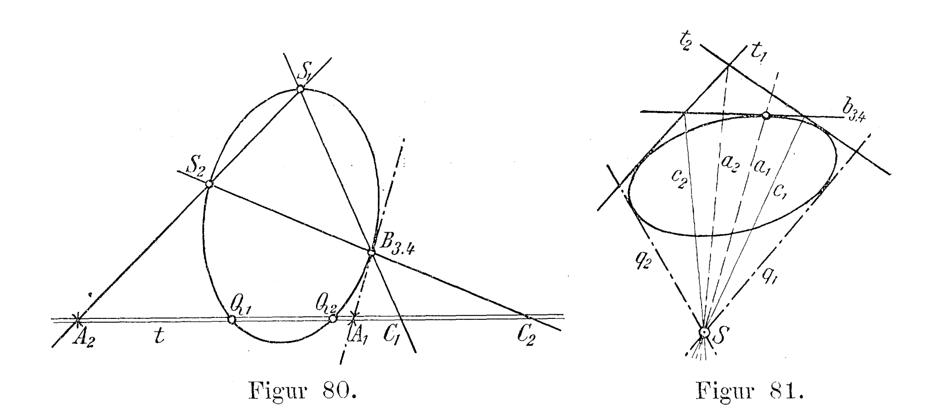
wird. Dann fallen zwei involutorisch zugeordnete Strahlen in einen Doppelstrahl zusammen, die vereinigte Berührungsgerade $q_{1\,2}$ wird zu einem Ordnungsstrahl der Involution. Rückt der Scheitelpunkt vollends in die Kurve hinein, so gestattet er überhaupt keine Tangenten mehr an die Kurve. Man spricht dann wohl auch in der projektivischen Geometrie von imaginären oder idealen Tangenten aus einem innerhalb der Kurve liegenden Punkte an die Kurve, von einem imaginären oder idealen Strahlenpaar der Involution, als dessen Schnittpunkt eben der Scheitelpunkt, d. h. ein reeller Punkt aufgefaßt wird, welcher der Scheitel des involutorischen Strahlenbüschels ist. In Anlehnung an Satz 28a findet man, daß in Fig. 79, so lange die Involution keine reellen Ordnungselemente hat, auch wirklich der Scheitelpunkt



Figur 78. Figur 79.

S gar nicht so gelegt werden kann, daß eine dem Vierseit angeschriebene Kurve durch ihn hindurchgeht, — oder daß den vier Tangenten der Fig. 79 (oder 71, 72, 74) gar keine Kurve ein- oder angeschrieben werden kann, welche durch jenen Scheitel geht, bezw. welche in die Räume $\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \varkappa\ \lambda$ der Fig. 75 hineinkommt. Anderseits aber gibt es in Fig. 77 (bezw. 70, 73) zwei Ordnungsstrahlen der Involution, und daher gibt es unter allen die vier Tangenten der Fig. 77 (70, 73) berührenden Kurven gerade zwei, welche durch den dort gegebenen Scheitelpunkt hindurchgehen, eben mit der Tangentenrichtung je eines der Ordnungsstrahlen der Involution. Die eine Kurve ist in Fig. 77 und 70 eine sehr schmale Ellipse, welche aufrechtstehend in den Winkeln ($t_1\ t_2$) und ($b_3\ b_4$) berührt und den zwischen a_1 und a_2 verlaufenden Ordnungsstrahl zur Tangente hat; die andere Kurve ist eine minder schmale Ellipse, welche querliegend in den Winkeln ($t_1\ b_3$) und ($t_2\ b_4$) berührt. In S hat je eine davon einen der Ordnungsstrahlen der Involution zur Tangente. In Fig. 73 sind beide Kurven Hyperbeln, eine äußerst schmale, welche in den Winkeln ganz bei S_3 und S_1 berührt und den zwischen c_1 und c_2 verlaufenden Ordnungsstrahl zur Tangente hat, die andere ziemlich flache hat den anderen Ordnungsstrahl in S zur Tangente.

Frage 68. Zu welchen Ergebnissen führt eine Behandlung der vorigen Sätze 29 und 30 nach der Art der Überführung der Sätze von Paskal und Brianchon vom Sechseck auf andere Vielecke?



Figur 80. Figur 81.

Erkl. 282. Will man den nachstehenden Beweis nicht als Grenzübergang sondern in selbständigem Aufbau durchführen, so wird man wieder die projektivischen Gebilde verwenden, durch welche die Kurve erzeugt wird, indem man berücksichtigt, daß dem Verbindungsstrahl zweier Büschelscheitel die Tangente bezw. dem Trägerschnittpunkt der Berührungspunkt zugeordnet werden muß, nämlich B mit S_1 oder S_2 bezw. b mit t_1 oder t_2. So wird in Fig. 80 mittels der Scheitel S_1 und B entstehen S_1 (S_2 B Q_1 Q_2) $\overline{\wedge}$ B (S_2 B Q_1 Q_2), also auf der Transversalen A_2 C_1 Q_1 Q_2 $\overline{\wedge}$ C_2 A_1 Q_1 Q_2; letztere Gruppe durch paarweise Elementenvertauschung $\overline{\wedge}$ A_1 C_2 Q_2 Q_1; also diese Gruppe A_1 C_2 Q_2 Q_1 $\overline{\wedge}$ A_2 C_1 Q_1 Q_2, d. h. Q_1 Q_2 involutorisch doppelt entsprechend. Ebenso wird in Fig. 81 mittels Träger t_1 und b entstehen t_1 (t_2 b q_1 q_2) $\overline{\wedge}$ b (t_2 b q_1 q_2), also im Scheitel S: a_2 c_2 q_1 q_2 $\overline{\wedge}$ c_1 a_1 q_1 q_2; letztere Gruppe durch paarweise Elementenvertauschung $\overline{\wedge}$ a_1 c_1 q_2 q_1; also diese Gruppe a_1 c_1 q_2 q_1 $\overline{\wedge}$ a_2 c_2 q_1 q_2, d. h. q_1 q_2 involutorisch doppelt entsprechend.

Antwort. 1) Läßt man in Fig. 76 bezw. 78 zwei benachbarte Punkte des Vierecks auf der Peripherie der Kurve zusammenrücken, so nähert sich die Länge der Sehnenstrecke immer mehr dem Werte Null, und die Sekante wird beim Zusammenfallen der beiden Kurvenpunkte zur Tangente im Punkte $B_{3\,4}$. Die Sekanten von S_1 und S_2 nach B_3 und B_4, welche bisher die Punkte $B_{1\,2}$ $C_{1\,2}$ getrennt geliefert hatten, fallen zusammen und ergeben nur noch die Punkte C_1 und C_2, indem B_1 mit C_1 und B_2 mit C_2 zusammengerückt ist. Dabei bleiben aber die Punktpaare $A_{1\,2}$, $C_{1\,2}$, $Q_{1\,2}$ wie zuvor involutorisch gepaart, und man

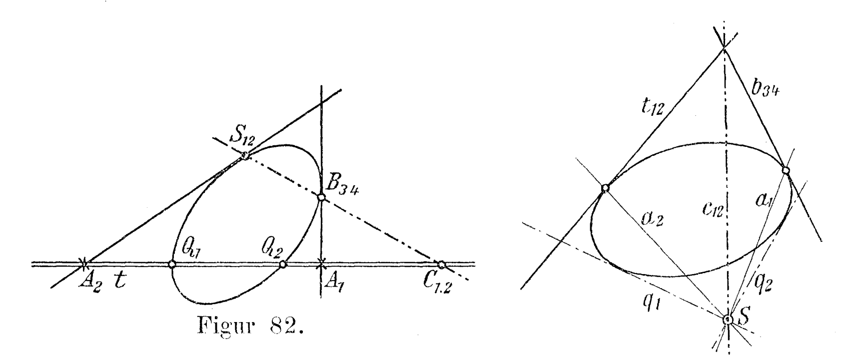
1) Läßt man in Fig. 77 bezw. 79 zwei benachbarte Seitenlinien des Vierseits längs der Peripherie der Kurve zusammenrücken, so nähert sich die Größe des Tangentenwinkels immer mehr dem Werte 0^0 bezw. 180^0, und der Tangentenschnittpunkt wird beim Zusammenfallen der beiden Tangenten zum Kurvenberührungspunkt auf der Tangente $b_{3\,4}$. Die Schnittpunkte von t_1 und t_2 mit b_3 und b_4, welche bisher die Strahlen $b_{1\,2}$ $c_{1\,2}$ getrennt geliefert hatten, fallen zusammen und ergeben nur noch die Strahlen c_1 und c_2, indem b_1 mit c_1 und b_2 mit c_2 zusammengerückt ist. Dabei bleiben aber die Strahlenpaare $a_{1\,2}$ $c_{1\,2}$ $q_{1\,2}$

erhält (Fig. 80) den Satz von Desargues fürs Dreieck nebst Tangente:

Satz 29a. Die zwei *Schnittpunkte* einer beliebigen *Schnittgeraden* mit jeder Kurve zweiter Ordnung, welche durch die *drei Eckpunkte* eines gegebenen *Dreiecks* hindurchgeht und in einem derselben eine *gegebene Gerade berührt*, bilden ein *zugeordnetes Punktpaar* derselben *Punktinvolution*, welche auf dieser Transversalen bestimmt wird durch die beiden zugeordneten Punktpaare ihrer Schnittpunkte mit der gegebenen Tangente und deren Gegenseite sowie mit den beiden übrigen Seiten des Dreiecks. — *Berührt* die Transversale die Kurve, so wird ihr Berührungspunkt zu einem *Ordnungspunkt* dieser Involution.

wie zuvor involutorisch gepaart, und man erhält (Fig. 81) den Satz von Desargues fürs Dreieck nebst Berührungspunkt:

Satz 30a. Die zwei *Tangenten* aus einem *beliebigen Scheitelpunkte* an jede Kurve zweiter Klasse, welche die *drei Seiten* eines gegebenen *Dreiseits* und davon die eine in einem *gegebenen Punkte berührt*, bilden ein *zugeordnetes Strahlenpaar* derselben *Strahleninvolution*, welche in diesem Scheitelpunkte bestimmt wird durch die beiden zugeordneten Strahlenpaare seiner Verbindungsgeraden mit dem gegebenen Berührungspunkte und dessen Gegenecke sowie mit den beiden übrigen Ecken des Dreiseits. — Liegt der Scheitelpunkt *auf der Kurve*, so wird seine Tangente zu einem *Ordnungsstrahl* dieser Involution.



Figur 82.

Figur 83.

2) Läßt man in Fig. 80 auch noch die beiden übrigen Eckpunkte des ursprünglichen Vierecks auf der Peripherie der Kurve zusammenrücken, so muß auch deren Sehne in eine *Kurventangente* übergehen, sobald die beiden Eckpunkte *in einen* Kurvenpunkt zusammenfallen. Dabei fallen aber auch die beiden bisher getrennt laufenden Dreieckseiten $S_1\ B_3$ und $S_2\ B_3$ der Fig. 80 in *eine Gerade* zusammen, und die

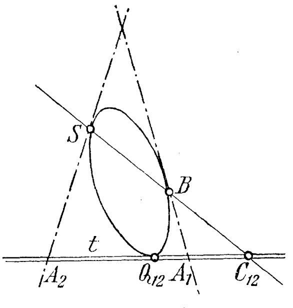
2) Läßt man in Fig. 81 auch noch die beiden übrigen Seiten des ursprünglichen Vierseits längs der Peripherie der Kurve zusammenrücken, so muß auch deren Schnittpunkt in einen *Kurvenpunkt* übergehen, sobald die beiden Geraden in eine Tangente zusammenfallen. Dabei fallen aber auch die beiden bisher getrennt liegenden Dreieckspunkte $t_1\ b_3$ und $t_2\ b_3$ der Fig. 81 *in einem Punkt* zusammen, und

beiden von ihnen ausgeschnittenen Punkte $C_{1\,2}$ der Involution rücken zu einem Doppelpunkte $C_{1\,2}$ zusammen. Man erhält also (Fig. 82) den Satz von Desargues für die Sekante nebst Berührungstangente:

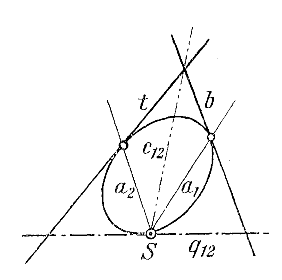
Satz 29b. Die zwei Schnittpunkte einer beliebigen Schnittgeraden mit jeder Kurve zweiter Ordnung, welche in zwei gegebenen Punkten zwei gegebene Gerade berührt, bilden ein zugeordnetes Punktpaar derselben Punktinvolution, welche auf dieser Transversalen bestimmt wird durch ihre Schnittpunkte mit den beiden gegebenen Tangenten als ein zugeordnetes Punktpaar, und ihren Schnittpunkt mit der Berührungssehne der beiden gegebenen Punkte als Ordnungspunkt. — Berührt die Transversale die Kurve, so wird ihr Berührungspunkt zum zweiten Ordnungspunkt dieser Involution. (Fig. 84.)

die beiden nach ihnen führenden zugeordneten Strahlen $c_{1\,2}$ der Involution rücken zu einem Doppelstrahl $c_{1\,2}$ zusammen. Man erhält also (Fig. 83) den Satz von Desargues für den äußeren Punkt nebst Berührungssehne:

Satz 30b. Die zwei Tangenten aus einem beliebigen Scheitelpunkt an jede Kurve zweiter Klasse, welche zwei gegebene Gerade in zwei gegebenen Punkten berührt, bilden ein zugeordnetes Strahlenpaar derselben Strahleninvolution, welche in diesem Scheitelpunkt bestimmt wird durch seine Verbindungsstrahlen mit den gegebenen Berührungspunkten als ein zugeordnetes Strahlenpaar, und seinen Verbindungsstrahl mit dem Schnittpunkt der beiden gegebenen Tangenten als Ordnungsstrahl. — Liegt der Scheitelpunkt auf der Kurve, so wird seine Tangente zum zweiten Ordnungsstrahl dieser Involution (Fig. 85.)



Figur 84.



Figur 85.

Erkl. 283. Die Sätze 29a und 30a gelten selbstverständlich auch für die Tangente in jedem anderen Eckpunkt des Dreiecks Fig. 80 und für den Berührungspunkt auf jeder anderen Seite des Dreiecks Fig. 81. Dann bleiben aber die an Fig. 80 und 81 bezeichneten Elemente $A_{1\,2}$ $C_{1\,2}$ bezw. $a_{1\,2}$ $c_{1\,2}$ nicht zugeordnet, sondern es würden in Fig. 80 $Q_{1\,2}$ zugeordnete Punkte einer zweiten Involution mit den Punktpaaren A_2 C_2 und C_1 mit dem Schnittpunkt der Tangente in S_2, bezw. einer dritten Involution mit den Punktpaaren A_2 C_1 und C_2 mit dem Schnittpunkt der Tangente in S_1. Und in Fig. 81 würden q_1 q_2 zugeordnete Strahlen einer zweiten Involution mit den Strahlenpaaren a_2 c_2 und c_1 mit dem Strahl zum Berührungspunkt auf t_1, bzw. einer dritten Involution mit den Strahlenpaaren a_2 c_1 und c_2 mit dem Strahl zum Berührungspunkt auf t_2. — In den Sätzen 29 und 30 war also stets $Q_{1\,2}$ bezw. $q_{1\,2}$ als ein viertes Paar zu drei vorhandenen Elementenpaaren derselben Involution hinzugetreten, welches bei jeder Vertauschung der gegebenen Kurven-

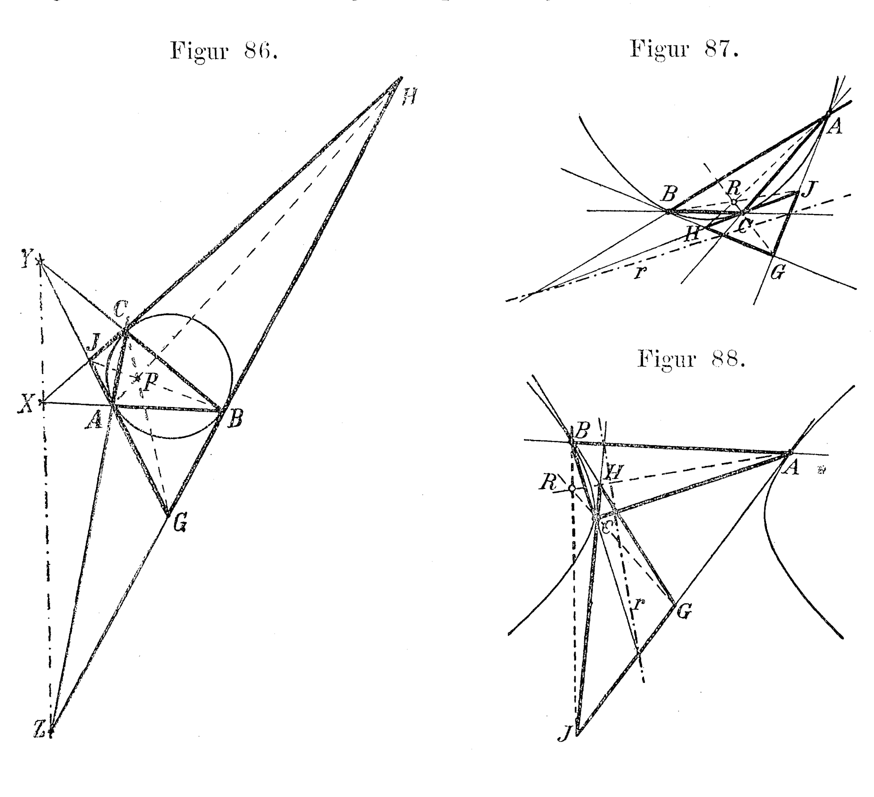
elemente wiederkehrte; in Satz 29a und 30a tritt $Q_{1\,2}$ $q_{1\,2}$ stets nur als ein drittes zu zwei vorhandenen Elementenpaaren hinzu von je einer der drei Involutionen, welche durch Vertauschung der Kurvenelemente entstehen können. Aber sowohl die vier Kurvenpunkte der Fig. 76, 78 bezw. die vier Kurventangenten der Fig. 77, 79, als auch die drei Kurvenpunkte nebst einer Tangente in Fig. 80 bezw. die drei Kurventangenten nebst einem Berührungspunkt in Fig. 81 bestimmen eine einfach unendliche Anzahl von Kurven, aus welchen nur durch Hinzunahme eines passend gewählten fünften Elementes die einzelne Kurve bestimmt herausgehoben wird.

Erkl. 284. Entsprechend den Ausführungen der Erklärungen 280 und 281 findet man, daß in Fig. 80 zwei Ordnungspunkte der Involution bestehen, einer zwischen Q_1 Q_2, der andere zwischen C_1 C_2, und daß daher zwei Kurven mit den gegebenen Elementen möglich sind, welche die gewählte Transversale berühren. Die eine ist eine von der gezeichneten nicht sehr verschiedene Ellipse, welche zwischen Q_1 Q_2 berührt, die andere eine Hyperbel, deren einer Ast hindurchgeht durch S_1 S_2 B_1, im letzteren Punkte die gegebene Tangente B_3 A_1 berührend, während ihr zweiter Ast die Transversale zwischen C_1 und C_2 von unten her berührt. Analog gibt es in Fig. 81 zwei Ordnungsstrahlen der Involution, einen zwischen a_1 a_2, den anderen im Nebenwinkel von q_1 q_2. Daher gibt es auch zwei Kurven mit den gegebenen Elementen, welche durch den gewählten Scheitelpunkt hindurchgehen. Die eine ist eine Ellipse, aus der in Fig. 81 gezeichneten durch Erweiterung nach unten zu erhalten, welche in S eine Tangente im Nebenwinkel von q_1 q_2 besitzt; die andere eine Hyperbel, deren unterer Ast in S eine zwischen a_1 und a_2 verlaufende Tangente und b im gegebenen Punkte berührt, während ihr oberer Ast im oberen Scheitelwinkelraume von t_1 t_2 verläuft.

Erkl. 285. Will man Satz 29b und 30b ohne Grenzübergang direkt beweisen, so wählt man in Fig. 82 als Scheitel die beiden Berührungspunkte S und B und erhält: $S\,(B\;S\;Q_1\;Q_2) \barwedge B\,(B\;S\;Q_1\;Q_2)$, also $C\;A_2\;Q_1\;Q_2 \barwedge A_1\;C\;Q_1\;Q_2 \barwedge C\;A_1\;Q_1\;Q_2$, folglich Q_1 Q_2 involutorisch doppelt entsprechend, und dabei C selbstentsprechender Doppelpunkt. Ebenso wird in Fig. 83 mit Trägern t und b entstehen: $t\,(b\;t\;q_1\;q_2) \barwedge b\,(b\;t\;q_1\;q_2)$, also $c\;a_2\;q_1\;q_2 \barwedge a_1\;c\;q_1\;q_2 \barwedge c\;a_1\;q_2\;q_1$, folglich q_1 q_2 involutorisch doppelt entsprechend, und dabei c selbstentsprechender Doppelstrahl. Dabei treten $Q_{1\,2}$ bezw. $q_{1\,2}$ als ein neues Elementenpaar hinzu zu der durch ein Elementenpaar und ein Ordnungselement bestimmten Involution auf der Transversale bezw. im Scheitel. Und durch die in beiden Sätzen 29b und 30b gleicherweise auftretenden Kurvenelemente (TP) (TP) (vergl. Erkl. 109 und 121 des II. Teils) ist wieder eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven bestimmt, aus welcher die einzeln vorliegende Kurve durch ein passend hinzugewähltes Element herausgehoben wird.

Erkl. 286. Das fünfte Kurvenelement zu (P T) (P T) pflegte nun aber bisher bei der Ordnungskurve ein Kurvenpunkt, bei der Klassenkurve eine Tangente zu sein. Die Figuren 82 und 83 ermöglichen nunmehr auch Vertauschung dieser beiden Elemente. Da nämlich in Fig. 82 die Punktinvolution auf der Transversalen zum vorhandenen Ordnungspunkt $C_{1\,2}$ nur noch einen zweiten haben kann, so gibt es nur eine Kurve zweiter Ordnung, welche in S und B die gegebenen Tangenten und außerdem auch die gegebene Transversale berührt, und letztere Berührung muß im zweiten Ordnungspunkt der Involution stattfinden. Ebenso hat die Strahleninvolution im Scheitel S der Fig. 83 neben $c_{1\,2}$ nur noch einen zweiten Ordnungsstrahl, es gibt also nur eine Kurve zweiter Klasse, welche t und b in den gegebenen Punkten berührt und außerdem durch S geht, und letztere Berührung muß den zweiten Ordnungsstrahl der Involution als Tangente haben.

Erkl. 287. Mit dieser letzteren Überlegung kommt man aber auf den in Fig. 82 und 83 dargestellten Schlußsatz der Sätze 29b und 30b. Dieser Satz enthält keine neuen Tatsachen, sondern bildet eine Verknüpfung des vorliegenden Gegenstandes mit schon früher bekannt gewordenen Dingen. Daß nämlich in Fig. 84 C und Q Ordnungspunkte, c und q Ordnungsstrahlen der Involutionen sind, heißt nach Satz 24 nichts anderes, als daß C Q durch A_1 A_2 bezw. c q durch a_1 a_2 harmonisch getrennt werden. Und bereits in Erkl. 165 bezw. Fig. 53b des II. Teils war auf anderem Wege nachgewiesen worden, „daß der Berührungspunkt einer Tangente vierter harmonischer Punkt ist zu ihren Schnittpunkten mit zwei anderen Tangenten und der Berührungssehne der letzteren.“ Und dasselbe Ergebnis in dualistischer Gegenüberstellung ergab sich in den Sätzen der Erkl. 209 des II. Teils als Ableitung aus den Sätzen von Paskal und Brianchon für Dreieck und Dreiseit. So hat man an den hier folgenden Figuren 86—88 an einem Kreis (Fig. 86), einer Hyperbel (Fig. 88) und einem beliebigen Kurvenbogen (Fig 87) vereinigt die beiden Erscheinungen: 1) daß auf jeder Seite des um- bezw. angeschriebenen Dreiecks G H J der vierte harmonische Punkt zu Eckpunkten und Berührungspunkt durch die Berührungssehne der beiden anderen Seiten ausgeschnitten wird, 2) daß in jeder Ecke des eingeschriebenen Dreiecks A B C der vierte harmonische Strahl zu Seiten und Kurventangente durch die Verbindungsgerade nach dem Schnittpunkte der Tangenten in den beiden übrigen Eckpunkten gebildet wird.



Figur 86. Figur 87. Figur 88.

Frage 69. Was für involutorische Eigenschaften der Kurven ergeben sich aus den Polaritätsbeziehungen der in bezug auf eine beliebig gewählte Grundkurve konjugierten Elemente?

Erkl. 288. In Fig. 89 ist $p = t_{12}$ Polare zu P, und umgekehrt P Pol zu p, weil P Schnittpunkt und p Berührungssehne der Tangenten x und y ist; in Fig. 90 ist ebenso wie in Fig. 89 p Polare zu P und P Pol zu p, weil P die eine Nebenecke und p Verbindungsgerade der anderen Nebenecken ist im eingeschriebenen Viereck der Punkte S_1 S_2 A U oder S_1 S_2 B V. Aus derselben letztgenannten Beziehung geht auch hervor, daß U_1 Pol zu a bezw. a Polare zu U_1, und u Polare zu A_1 bezw. A_1 Pol zu u ist. Wenn aber u Polare zu A_1, a Polare zu U_1, und A_1, U_1 die Schnittpunkte von a, u mit p sind, so sind eben einerseits A_1 und U_1 zwei Punkte der Geraden p, deren jeder auf der Polaren des anderen liegt, also zwei konjugierte Punkte, und anderseits sind a und u zwei Strahlen des Punktes P, deren jeder durch den Pol des andern geht, also zwei konjugierte Strahlen.

Erkl. 289. Die Punktreihen auf p und die Strahlenbüschel in P in Fig. 89 und 90 zeigen alle Eigentümlichkeiten, welche für involutorische Gebilde mit und ohne Ordnungselemente früher aufgestellt wurden. In Fig. 90 ist auf p der Durchlauf A_1 B_1 C_1 U_1 V_1 W_1 gleichlaufend mit dem Durchlauf A_2 B_2 C_2 U_2 V_2 W_2, und kein Punktpaar $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, C_1 C_2 usw. wird von einem der andern innen und außen getrennt; und dasselbe gilt für Durchlauf und Lage der zugehörigen Strahlenbüschel mit Scheitel P. In Fig. 89 dagegen ist A_1 B_1 C_1 X W_1 V_1 U_1 Y entgegengesetzt dem Durchlauf A_2 B_2 C_2 X W_2 V_2 U_2 Y, und in X bezw. Y findet Begegnung statt, und jedes Punktpaar A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2 wird von jedem anderen innen und außen getrennt; und dasselbe gilt von den zugehörigen Strahlenbüscheln mit Scheitel P und mit

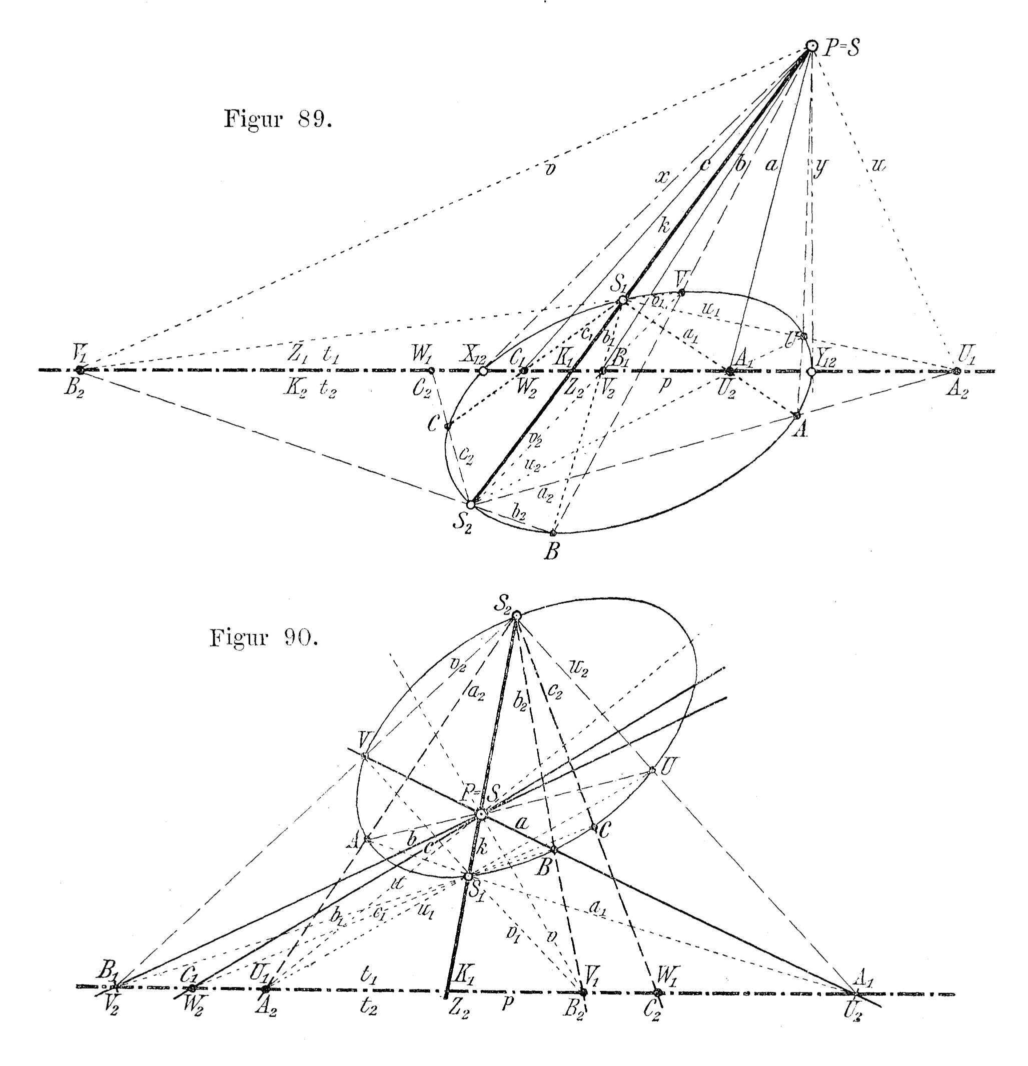
Antwort. Schon in der Antwort der Frage 21 und nochmals in der Antwort 22 wurde der Beweis geliefert für den Satz 8 bezw. 8a, daß polar zugeordnete Gebilde stets projektivisch verwandt sind. Da von je zwei konjugierten Elementen stets jedes eine sich in vereinigter Lage befindet mit dem polar zugeordneten des andern, so gilt diese projektivische Verwandtschaft besonders auch für konjugierte Elemente, also für die konjugierten Punkte einer Geraden und für die konjugierten Strahlen eines Scheitels. Betrachtet man also in Fig. 89 und 90 die Gerade t als Träger zweier Punktreihen, nämlich der Punktreihe beliebiger Punkte t_1 und der Reihe der ihnen konjugierten Punkte t_2, sowie den Punkt S als Scheitel zweier Strahlenbüschel S und S^1, wovon das zweite die konjugierten Strahlen zu den Strahlen des ersten enthält, so ordnet man in jedem dieser beiden Gebildepaare die konjugierten Elemente einander zu durch die Beziehung $S \,\overline{\wedge}\, t_1 \,\overline{\wedge}\, S_1 \,\overline{\wedge}\, S_2 \,\overline{\wedge}\, t_2 \,\overline{\wedge}\, S^1$. Dabei ist aber schon aus der Konstruktion ersichtlich, daß zu einem Punkt A_1 konjugiert ist U_1, und umgekehrt zu U_1 wieder A_1, bezw. zum Strahl a konjugiert u, und umgekehrt zu u wieder konjugiert a. Man kann aber auch in der früher angewandten Weise schreiben (A_1 B_1 C_1 U_1 X Y) $\overline{\wedge}$ (U_1 B_2 C_2 A_1 X Y) bezw. (a b c u x y) $\overline{\wedge}$ (u v w a x y). Aus beiden Überlegungen geht hervor, daß die Gesamtheit sowohl der konjugierten Punkte der Geraden als auch der konjugierten Strahlen der Büschel projektivische Gebilde sind, in welchen A U, a u und folglich je zwei zugeordnete Elemente einander doppelt entsprechen, während die Elemente X Y, x y — wenn solche vorhanden sind — je sich selbst

den Doppelstrahlen x **y**. Mittelpunkt der involutorischen Reihe ist in Fig. 89 selbstverständlich der Mittelpunkt der Sehne X Y, in Fig. 90 ein Punkt zwischen A_2 und Z_2. Die Axenstrahlen des involutorischen Büschels mit Scheitel P verlaufen in Fig. 89 im Innenwinkel und Nebenwinkel der Strahlen P A_1 und P B_1, denn ∢ A_1 P A_2 ist spitz und bei Bewegung des Büschelstrahls P A_1 bis nach P B_1 ist derselbe bereits in den stumpfen Nebenwinkel B_1 P B_2 übergegangen; in Fig. 90 kann man ungefähr das Strahlenpaar b v als Axenstrahlen ansehen, indem ∢ B_1 P B_2 nahezu ein rechter Winkel ist.

entsprechen. Daher erhält man die beiden Sätze:

Satz 31. Die polar konjugierten Punkte einer Geraden bilden eine involutorische Punktreihe, und die Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve sind die Ordnungspunkte der Involution.

Satz 31a. Die polar konjugierten Strahlen eines Punktes bilden einen involutorischen Strahlenbüschel, und die Tangenten von dem Punkte an die Kurve sind die Ordnungsstrahlen der Involution.



Figur 89.

Figur 90.

Frage 70. Welche Einzelbeziehungen zeigen die Involutionen der konjugierten Elemente für verschiedene Punkte und Geraden?

Erkl. 290. Wenn eine Gerade die Kurve schneidet bezw. berührt bezw. nicht trifft, so ist ihr Pol innerhalb bezw. auf der Kurve bezw. außerhalb der Kurve. Für eine Tangente ist aber der Berührungspunkt zugleich der Pol, durch ihn geht für jeden Punkt der Tangente die Polare, daher ist er auch konjugierter Punkt zu jedem Punkt der Tangente. Die Punktinvolution auf der Tangente ist daher von der eigentümlichen Art, daß alle Punkte zu einem und dieser eine zu allen anderen zugeordnet ist: die beiden Doppelpunkte sind mit dem Mittelpunkt der involutorischen Reihe in einen Punkt zusammengefallen. — Wenn ein Punkt außerhalb bezw. auf bezw. innerhalb der Kurve liegt, so ist seine Polare eine schneidende bezw. berührende bezw. nicht schneidende Gerade. Für einen Kurvenpunkt ist also die Tangente zugleich Polare, auf ihr liegt der Pol für jede Gerade durch den Berührungspunkt, daher ist sie konjugierte Gerade für jeden Strahl durch den Berührungspunkt. Die Strahleninvolution in diesem Punkt als Büschelscheitel ist daher von der eigentümlichen Art, daß alle Strahlen zu einem und dieser eine zu allen anderen zugeordnet ist: die beiden Doppelstrahlen sind mit einem der Axenstrahlen in einen Strahl zusammengefallen.

Erkl. 291. Projiziert man die Punktinvolution der konjugierten Punkte auf p in Fig. 89 und 90 aus einem beliebigen Punkte Q, so entsteht dadurch in Q eine Strahleninvolution derselben Gattung wie auf p. Das ist aber eine andere Involution, als die im Punkte Q durch die Kurve erzeugte Strahleninvolution der konjugierten Strahlen durch Q — außer wenn Q in den Polpunkt P von p fällt. — Schneidet man die Strahleninvolution der konjugierten Strahlen durch P in Fig. 89 und 90 durch

Antwort. 1) Bei jeder Kurve bildet die Gesamtheit der konjugierten Punkte auf einer schneidenden Geraden eine Punktinvolution mit zwei Ordnungspunkten, nämlich den Kurvenschnittpunkten der Geraden. Dieselben Punkte auf einer berührenden Geraden bilden eine Involution mit zwei im Berührungspunkt zusammenfallenden Doppelpunkten, wobei alle äußeren Punkte diesem einzigen Berührungspunkt als konjugierte zugeordnet sind. Auf einer nicht schneidenden Geraden bilden die konjugierten Punkte eine Punktinvolution ohne Ordnungspunkte.

2) Bei jeder Kurve bildet die Gesamtheit der konjugierten Geraden durch einen äußeren Punkt eine Strahleninvolution mit zwei Ordnungsstrahlen, nämlich den Kurventangenten aus diesem äußeren Punkt. Dieselben Geraden durch einen Kurvenpunkt bilden eine Involution mit zwei in der Tangente des Punktes zusammenfallenden Doppelstrahlen, wobei alle schneidenden Strahlen dieser einzigen Tangente als konjugierte zugeordnet sind. In einem inneren Punkte bilden die konjugierten Strahlen eine Strahleninvolution ohne Ordnungsstrahlen.

3) Die Punktinvolution der konjugierten Punkte auf einer beliebigen Geraden wird aus jedem Punkt durch ein involutorisches Strahlenbüschel projiziert, und die Strahleninvolution der konjugierten Strahlen durch einen beliebigen Scheitel wird von jeder Geraden in einer involutorischen Punktreihe geschnitten. Wenn insbesondere die Gerade selber die Polare des Punktes, bezw. der Punkt der Pol der Geraden ist, wie in Fig. 89 und 90, dann gelangen die Punktinvolution auf der Geraden und die Strahleninvolution durch den Punkt in perspektivische

eine *beliebige* Gerade q, so entsteht dadurch auf q eine Punktinvolution derselben Gattung wie in P. Das ist aber eine *andere* Involution, als die auf der Geraden q durch die Kurve erzeugte Punktinvolution der konjugierten Punkte auf q — außer wenn q in die Polare p von P fällt.

Lage, denn jedes Punktpaar in p liegt auf zwei zugeordneten Strahlen aus P, und jedes Strahlenpaar von P geht durch zwei zugeordnete Punkte auf p.

Frage 71. Was für besondere *Punktinvolutionen* erzeugen die *einzelnen Kurvengattungen*?

Antwort. Die Unterscheidung der *verschiedenen Kurvengattungen* beruht auf deren Beziehung zur *unendlich fernen Geraden*, und auf dieser erzeugen sie verschiedenerlei charakteristische Involutionen.

1) Bei der *Ellipse* ist die unendlich ferne Gerade eine *nicht schneidende* Gerade, und daher wird *auf der unendlich fernen Geraden durch jede Ellipse der Ebene eine Involution ohne Ordnungspunkte* bestimmt. Aus diesem Grunde nennt man überhaupt eine *Punktinvolution ohne Ordnungselemente eine elliptische Involution*. Um zu einem beliebig gegebenen Punkt der unendlich fernen Geraden den konjugierten Punkt in Bezug auf eine beliebig gegebene Ellipse aufzusuchen, konstruiert man etwa mittels zweier Paralleltangenten oder zweier Parallelsekanten die Polare dieses Punktes, welche ein *Durchmesser* der Ellipse sein muß, und bringt diesen wieder zum Schnitt mit der unendlich fernen Geraden. Der so erhaltene unendlich ferne Punkt ist der *konjugierte zum vorigen*.

2) Ein *Kreis* erzeugt auf der unendlich fernen Geraden ebenfalls eine *elliptische* Involution, da ja der Kreis eine besondere Ellipse ist. Weil aber jeder Kreisdurchmesser auf der Tangente seiner Kurvenpunkte *senkrecht* steht, so gehört hier zu einem in beliebiger Richtung liegenden unendlich fernen

Erkl. 292. Man sieht ohne weiteres ein, daß *nicht* etwa eine Ellipse bloß elliptische Involutionen erzeugt, eben so wenig eine Hyperbel bloß hyperbolische usw. Vielmehr erzeugt eine bestimmte *Ellipse* auf jeder sie schneidenden Geraden eine hyperbolische Involution, auf jeder berührenden eine parabolische und nur auf jeder außerhalb laufenden Geraden eine elliptische Involution. Auch letztere Involutionen sind wieder von einander verschieden je nach Lage der Geraden, und eine davon ist die von dieser Ellipse auf der unendlich fernen Geraden erzeugte Involution, nach deren Gattung alle von dieser Art ihren Namen erhalten. Ebensolche verschiedene Involutionen erzeugt ein Kreis; und nur *auf der unendlich fernen Geraden* allein existiert die von allen Kreisen gleicherweise erzeugte sogenannte *absolute* oder *Kreisinvolution* mit ihren für alle Kreise gemeinsamen, also *festliegenden* imaginären Doppelpunkten, während im allgemeinen jede verschiedene Ellipse auf der unendlich fernen Geraden auch wieder eine *andere* elliptische Involution mit *verschiedenen* imaginären Doppelpunkten erzeugt.

Erkl. 293. Auch jede *Hyperbel* erzeugt elliptische Punktinvolutionen auf allen nicht schneidenden Geraden, d. h. solchen, welche zwischen den beiden Ästen verlaufen, dagegen parabolische auf jeder berührenden, hyperbolische auf jeder schneidenden Geraden, so auch auf der

unendlich fernen. Und zwar entsteht auch hier wieder eine verschiedene Involution je nach Wahl der Hyperbel, und nur dann jeweils dieselbe Involution, wenn die von den Asymptoten ausgeschnittenen Ordnungspunkte dieselben sind. Demnach ist die auf der unendlich fernen Geraden ausgeschnittene hyperbolische Involution für alle solche Hyperbeln dieselbe, deren Asymptoten parallel laufen. Und da die Winkelhalbierenden der Asymptoten die Axen sind, so erzeugt Parallelität der Asymtoten jedesmal auch Parallelität der Axen. Man kann also sagen: Alle Hyperbeln mit parallelen Asymptoten erzeugen auf der unendlich fernen Geraden dieselbe Involution und haben auch parallele Axen. Aber Hyperbeln mit parallelen Axen brauchen nicht auch parallele Asymptoten zu haben, erzeugen also nicht immer dieselbe Involution auf der unendlich fernen Geraden.

Erkl. 294. Eine bestimmte Parabel erzeugt wieder auf jeder außerhalb liegenden Geraden eine elliptische, auf jeder schneidenden Geraden eine hyperbolische und auf jeder berührenden Geraden, so auch auf der unendlich fernen, eine parabolische Involution. Die Involution auf der unendlich fernen Geraden bleibt dieselbe, so lange der unendlich ferne Berührungspunkt, also so lange die Axenrichtung der Parabel dieselbe bleibt. Man hat also für alle Parabeln mit gemeinsamer Axen- und Durchmesserrichtung dieselbe parabolische Involution auf der unendlich fernen Geraden, für Parabeln mit verschiedener Axenrichtung auch verschiedene Involutionen.

Erkl. 295. Nächst der unendlich fernen Geraden sind die wichtigsten geraden Linien für eine Kurve ihre Durchmesser. Auch auf jedem Kurvendurchmesser bilden die konjugierten Punkte eine Involution; und zwar bei der Ellipse und dem Kreis stets eine hyperbolische, weil diese Kurven von jedem ihrer Durchmesser in zwei Punkten, den Ordnungspunkten der Involution,

Punkte derjenige unendlich ferne Punkt als konjugierter, welcher in der zur vorigen Richtung senkrechten Richtung liegt. Dieser Umstand bleibt aber für alle Kreise der Ebene gleicherweise bestehen, und daher erzeugen sämtliche Kreise der Ebene eine und dieselbe Involution auf der unendlich fernen Geraden. Man nennt diese Involution deshalb auch die absolute Involution oder die Kreisinvolution auf der unendlich fernen Geraden, und sie besteht aus der Gesamtheit der in je zwei senkrechten Richtungen liegenden unendlich fernen Punktpaare. Da für sie keine reellen Doppelpunkte vorhanden sind, so spricht man von diesen als den imaginären absoluten Kreispunkten der Ebene, nämlich als den gemeinsamen Schnittpunkten jedes Kreises der Ebene mit der unendlich fernen Geraden (vergl. Erkl. 298).

3) Bei der Hyperbel ist die unendlich ferne Gerade eine schneidende Gerade, und daher wird auf der unendlich fernen Geraden durch jede Hyperbel der Ebene eine Involution mit Doppelpunkten erzeugt. Aus diesem Grunde nennt man überhaupt eine Punktinvolution mit Ordnungselementen eine hyperbolische Involution. Um zu einem beliebig ausgewählten Punkt der unendlich fernen Geraden den konjugierten Punkt in Bezug auf eine beliebig gegebene Hyperbel aufzusuchen, konstruiert man etwa mittels zweier parallelen Tangenten oder Sekanten die Polare dieses Punktes, nämlich einen Durchmesser der Kurve; dann ist dessen unendlich ferner Punkt der zum vorigen involutorisch gepaarte. Die Kurvenschnittpunkte der Hyperbel mit der unendlich fernen Geraden, d. h. die unendlich fernen Punkte der Asymptoten, sind die sich selbst konjugierten

geschnitten werden. Es ist daher der Kurvenmittelpunkt stets auch der Mittelpunkt der involutorischen Reihe, und die Involution der konjugierten Punkte ist auf je zwei zu den Axen symmetrisch liegenden und daher gleichlangen Durchmessern dieselbe, beim Kreis auf jedem Durchmesser die gleiche, nämlich hier wie im folgenden Falle jeweils gebildet durch die Gesamtheit der Punktpaare, welche durch die Endpunkte des Durchmessers harmonisch getrennt werden. Bei der Hyperbel hat man auf den schneidenden Durchmessern ebenfalls hyperbolische Involution der konjugierten Punkte, und ebenfalls die gleiche auf je zwei symmetrisch gleich großen Durchmessern; auf den nicht schneidenden Hyperbeldurchmessern dagegen entsteht elliptische Involution, ebenfalls mit Mittelpunkt im Kurvenmittelpunkt, und als gleiche auf je zwei symmetrisch liegenden Durchmessern.

Erkl. 296. Besondere Fälle liefern einerseits die Asymptoten der Hyperbel, andererseits die Durchmesser der Parabel und die Parallelgeraden zu einer Hyperbelasymptote. Die ersteren als Kurventangenten liefern parabolische Involution, wobei der unendlich ferne Punkt der einzig ausgezeichnete ist. Ihm sind alle Punkte der Asymptote, samt dem Kurvenmittelpunkte selbst, konjugiert. — Die Parabel wird von jedem Durchmesser und auch die Hyperbel von jeder Parallelen zu einer Asymptote in zwei Punkten geschnitten, welche somit die Ordnungspunkte dieser hyperbolischen Involution sein müssen. Der eine davon ist aber der unendlich ferne Kurvenpunkt, durch welchen bei der Parabel die Durchmesser sämtlich hindurchgehen. Man hat also die besondere Art der Punktinvolution, bei welcher ein Ordnungspunkt samt dem Mittelpunkt der involutorischen Reihe unendlich fern liegen: je zwei zugeordnete Punkte liegen in gleichem Abstand beiderseits des anderen Ordnungspunktes (vergl. Antw. 7 der Frage 61 und Fig. 59). Dies bildet eine andere Ausdrucksweise der in Erkl. 139 aufgestellten Eigenschaft der Parabel, daß auf jedem Durchmesser der Kurvenschnittpunkt den Mittelpunkt bildet zwischen einem beliebigen seiner Punkte und dem Schnittpunkt mit seiner Polaren. Denn dieser Schnittpunkt des Durchmessers mit der Polaren eines seiner Punkte ist eben der konjugierte Punkt zu jenem Punkte.

Ordnungspunkte. Sie teilen die sämtlichen Punkte der unendlich fernen Geraden in zwei Teile, nämlich Punkte innerhalb und außerhalb der Kurve oder innerhalb und außerhalb der Ordnungspunkte, so daß je zwei involutorisch gepaarte zu den Ordnungspunkten harmonisch liegen; zu den inneren Punkten kann man die Polare und dadurch den konjugierten Punkt nur durch solche Parallelsekanten konstruieren, welche beide Äste der Hyperbel je einmal treffen, und nicht durch Paralleltangenten; zu den äußeren Punkten nur durch solche Parallelsekanten, welche denselben Ast der Hyperbel zweimal treffen, oder auch durch Paralleltangenten.

4) Für die Parabel ist die unendlich ferne Gerade eine Tangente, folglich ist der unendlich ferne Berührungspunkt zu jedem anderen Punkt der unendlich fernen Geraden konjugiert, und jede Parabel erzeugt auf der unendlich fernen Geraden eine uneigentliche Punktinvolution, bei welcher alle Punkte zu einem, dieser eine zu allen anderen Punkten konjugiert ist. Aus diesem Grunde nennt man überhaupt eine Punktinvolution der eben genannten Art eine parabolische Involution. Eine Konstruktion zusammengehöriger Punktpaare ist bei der eigentümlichen Art der Zuordnung nicht aufzustellen, und dies bestätigt sich dadurch, daß ja alle Durchmesser parallel durch denselben unendlich fernen Punkt gehen.

Frage 72. Was für besondere Strahleninvolutionen erzeugen die einzelnen Kurvengattungen?

Erkl. 297. Die Art der von den konjugierten Durchmessern jeder Kurve gebildeten Strahleninvolution richtet sich auch nach der Lage des Mittelpunktes auf Grund der allgemeinen Aussage der Antwort 2 der Frage 70. Denn da der Mittelpunkt der Ellipse stets ein innerer Punkt ist, so können keine Tangenten als Ordnungsstrahlen entstehen, folglich bilden die konjugierten Durchmesser der Ellipse eine elliptische Strahleninvolution ohne Ordnungsstrahlen bezw. mit imaginären Ordnungsstrahlen, insofern man die nicht vorhandenen Kurventangenten aus einem Punkte innerhalb der Kurve als imaginäre Tangenten bezeichnet. Die nicht vorhandenen Schnittpunkte derselben mit der unendlich fernen Gerade schneiden dann auch auf dieser die nicht vorhandenen oder imaginären Ordnungspunkte der elliptischen Punktinvolution auf der unendlich fernen Geraden aus. Bei dieser Ausdrucksweise kann man also jeglicher Involution zwei Ordnungselemente zuschreiben: bei der hyperbolischen Involution hat man zwei reelle Ordnungspunkte bezw. Ordnungsstrahlen, bei der parabolischen zwei zusammenfallende, und bei der elliptischen Involution spricht man von zwei imaginären Ordnungspunkten bezw. Ordnungsstrahlen; und jedes involutorisch zugeordnete Elementenpaar wird durch die reellen oder imaginären Ordnungselemente harmonisch getrennt.

Erkl. 298. Auch aus dem Kreismittelpunkt gehen auf Grund dieser Auffassungsweise an den Kreis zwei nicht vorhandene oder zwei imaginäre Tangenten; sie treffen die unendlich ferne Gerade in den imaginären Ordnungspunkten der absoluten orthogonalen Kreisinvolution. Da diese letztere aber für alle Kreise unbeweglich dieselbe ist, so sind auch ihre imaginären Ordnungspunkte festliegend, und folglich müssen auch die imaginären Tangenten, welche an jeden

Antwort. 1) Der wichtigste Punkt der Ebene für eine einzelne Kurve ist ihr Mittelpunkt, und in ihm erzeugen die verschiedenen Kurven besondere charakteristische Involutionen. Es ist nämlich jede Gerade durch den Mittelpunkt ein Kurvendurchmesser, und zwei polar zugeordnete Durchmesser, deren jeder also durch den Pol des anderen geht, heißen konjugierte Durchmesser. Folglich hat man in erster Linie das allgemeine Ergebnis:

> **Satz 32.** Die Gesamtheit der Paare je zweier konjugierten Durchmesser einer Kurve bilden einen involutorischen Strahlenbüschel.

2) Da der Mittelpunkt der Pol der unendlich fernen Geraden ist, so befindet sich die Strahleninvolution der konjugierten Durchmesser einer Kurve in perspektivischer Lage mit der Punktinvolution, welche von den in Bezug auf die Kurve polar konjugierten Punkten der unendlich fernen Geraden gebildet wird. Hiernach ist auch die Strahleninvolution aller konjugierten Durchmesser stets von derselben Art wie die Punktinvolution auf der unendlich fernen Geraden, sie bilden nämlich stets bei der Ellipse eine elliptische, bei der Hyperbel eine hyperbolische, bei der Parabel eine parabolische Strahleninvolution.

3) Hiernach bestätigen sich die in Antwort 44 und 45 für die konjugierten Durchmesser der einzelnen Kurvengattungen abgeleiteten Ergebnisse: Bei der Ellipse entsteht eine Involution ohne Ordnungsstrahlen, jedes Paar konjugierter Durchmesser wird von jedem anderen Paar innen und außen getrennt. Bei der Hyperbel entsteht eine Involution mit Ordnungsstrahlen, nämlich den

Kreis aus dessen Mittelpunkt gezogen gedacht werden, für alle Kreise durch dieselben in zwei senkrechten Richtungen auf der unendlich fernen Geraden liegenden imaginären Punkte gehen. Diese zu einander senkrechten imaginären Kreistangenten sind also gewissermaßen die Asymptoten des Kreises, zugleich die Ordnungsstrahlen der orthogonalen Strahleninvolution der konjugierten Durchmesser des einzelnen gewählten Kreises, und wegen der perspektivischen Lage beider Involutionen schneiden sie für jeden Kreis auf der unendlich fernen Geraden jene zwei Punkte aus als Schnittpunkte des Kreises mit der unendlich fernen Geraden, folglich auch als Berührungspunkte eben dieser Tangenten. Daher muß man annehmen, daß jeder Kreis die unendlich ferne Gerade in denselben zwei Punkten trifft, daß also auch alle Kreise der Ebene parallele (imaginäre) Asymptoten haben, und daß sie alle auch einander in diesen gleichen zwei absoluten Kreispunkten der Ebene treffen. So eigentümlich diese Auffassung klingt, so bietet sie doch eine wertvolle Bestätigung der allgemeinen Tatsache, daß ein Kreis schon durch drei Punkte bestimmt ist. Ebenso nämlich, wie durch den Namen der Parabel schon die unendlich ferne Gerade als eine Tangente der Kurve festgelegt ist, so wird durch den Namen des Kreises schon bestimmt, daß für die Kurve die beiden absoluten Kreispunkte, d. h. die beiden imaginären Doppelpunkte der orthogonalen Kreisinvolution auf der unendlich fernen Geraden als zwei Kurvenpunkte voraus zu nehmen sind; folglich sind nur noch drei willkürliche Punkte zulässig.

Erkl. 299. Die Bedeutung der imaginären Doppelpunkte der absoluten Kreisinvolution auf der unendlich fernen Geraden und der imaginären Doppelstrahlen der orthogonalen Strahleninvolution der Kreisdurchmesser zeigt sich noch in einer weiteren Reihe von Übereinstimmungen der so definierbaren Eigentümlichkeiten des Kreises mit den Eigenschaften der übrigen Kurven zweiten Grades. Zunächst kann man überhaupt den Kreis Asymptoten, und zu diesen liegen je zwei konjugierte Durchmesser harmonisch, also stets der eine als ein schneidender, der andere als ein nicht schneidender Durchmesser.

4) In jeder Strahleninvolution befinden sich als zwei ausgezeichnete Strahlen die sogenannten Axenstrahlen, d. h. das einzige Paar derjenigen involutorisch zugeordneten Strahlen, welche einen rechten Winkel bilden. In der Tat ist auch unter der Gesamtheit der konjugierten Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel ein einziges Paar senkrechter konjugierter Durchmesser, und diese sind als die Axen der Kurve schon in Abschnitt 2, d festgestellt worden. Wie die ganze Kurve beim Umklappen um eine einzelne dieser Axen mit sich selbst zur Deckung gelangt, so erhält man durch Umklappen des involutorischen Büschels der konjugierten Durchmesser um jeden Axenstrahl aus jedem Paar zugeordneter Strahlen wieder ein zugeordnetes Strahlenpaar.

5) Beim Kreise stehen je zwei konjugierte Durchmesser aufeinander senkrecht, man hat also nicht nur ein Paar, sondern lauter Paare von Axenstrahlen, und die Strahleninvolution wird von der besonderen in Antwort 8 der Frage 61 und Fig. 60 erörterten Art, welche durch Drehung eines rechten Winkels um seinen Scheitel entsteht. Aus diesem Grunde nennt man die vorliegende Art von Strahleninvolution die circulare Strahleninvolution oder die rechtwinklige (orthogonale) Kreisinvolution. Wegen der bei jedem Kreise auftretenden rechten Winkel muß die Involution der konjugierten Durchmesser jedes Kreises sich in perspektivischer Lage befinden zu der absoluten Kreisinvolution auf der unendlich fernen

ohne metrische Hilfsmittel definieren als die Kurve zweiten Grades, welche durch jenes imaginäre Punktpaar hindurchgeht, (so daß die Anzahl aller Kreise auf ∞^3 festgelegt wird), ferner die Gesamtheit aller Kreise der Ebene als das Büschel aller Kurven durch jene zwei festen Punkte, die Gesamtheit der Kreise eines Kreisbüschels im gewöhnlichen Sinne als Gesamtheit des Kurvenbüschels durch vier feste Punkte, nämlich die beiden imaginären und zwei beliebige reelle (vergl. Satz 29b), endlich konzentrische Kreise als Kreise mit gemeinsamen Asymptoten, die folglich einander in den imaginären Kreispunkten berühren. Ferner kann man den Begriff des rechten Winkels ohne Maßbeziehungen definieren, indem man berücksichtigt, daß jedes Strahlenpaar des orthogonalen Kurvendurchmesserbüschels zu diesen (imaginären) Ordnungsstrahlen harmonisch sein muß. Hiernach sind zwei Strahlen dann als rechtwinkelig anzusehen, wenn sie harmonisch liegen zu den (imaginären) Verbindungsgeraden ihres Schnittpunktes zu den imaginären Kreispunkten. (Unter Benützung des Logarithmus des Doppelverhältnisses solcher vier Strahlen gelangt die analytische Geometrie von da aus auch zu der projektivischen Auffassung des Winkelbegriffs überhaupt.) Dabei ergibt sich die Gleichheit der auf demselben Kreisbogen stehenden Peripheriewinkel ganz selbstverständlich als metrische Ausdrucksweise für die Gleichheit des Doppelverhältnisses der von allen beliebigen Kurvenpunkten nach vier festen Punkten der Kurve gezogenen Strahlen. Von diesen vier Strahlen aus einem beliebigen Kreispunkte gehen nämlich im vorliegenden Falle je zwei nach den Endpunkten des betrachteten Bogens und zwei nach den beiden absoluten imaginären Kreispunkten.

Erkl. 300. Bewirkt man die Erzeugung eines Kreises durch zwei projektivische Büschel, deren Scheitel die Endpunkte eines Durchmessers sind, so entstehen die Peripheriepunkte durch den Schnitt je zweier rechtwinklig stehenden Geraden. Und da die circulare Strahleninvolution eine elliptische Involution ist, so schreibt man auch ihr zwei imaginäre Ordnungsstrahlen zu, und diese laufen auch jeweils vom Kreismittelpunkte nach den imaginären Ordnungspunkten der absoluten Involution auf der unendlich fernen Geraden.

6) Bei der hyperbolischen Strahleninvolution der konjugierten Durchmesser der Hyperbel kann der besondere Fall eintreten, daß die Ordnungsstrahlen selber auf einander senkrecht stehen, also ebenso wie die Axenstrahlen mit einander rechte Winkel bilden. Da die Ordnungsstrahlen die Asymptoten sind, so entsteht diese Besonderheit dann, wenn eine Hyperbel mit senkrecht stehenden Asymptoten vorliegt. Dies trifft zu bei der sogenannten gleichseitigen Hyperbel: man erhält die in Antwort 9 der Frage 61 und Figur 61 erörterte besondere Art der Strahleninvolution, welche durch Zusammenlegung zweier entgegengesetzt kongruenter Strahlenbüschel gebildet wird: je zwei konjugierte Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel bilden mit den Asymptoten derselben beiderseits gleich große Neigungswinkel. Aus diesem Grunde nennt man auch diese besondere Art von Strahleninvolution die gleichseitig-hyperbolische Involution.

7) Bei der Parabel ist jeder Durchmesser zur unendlich fernen Geraden konjugiert, und diese zu jedem anderen Durchmesser — insofern man die unendlich ferne Gerade als Gerade durch den Parabelmittelpunkt ebenfalls als einen Parabeldurchmesser auffassen will. Man hat also in der Gesamtheit der konjugierten Durchmesser einer Parabel wieder die uneigentliche oder parabolische Involution,

Strahlen der Scheitel. Auf der unendlich fernen Geraden schneiden die beiden Büschel wieder je zwei zugeordnete Punkte der absoluten Kreisinvolution aus. Durch jeden Ordnungspunkt dieser Involution gehen also auch je zwei zugehörige Strahlen beider Büschel, und damit hat man einen zweiten Beweis dafür, daß diese imaginären Kreispunkte wirklich Kurvenpunkte des Kreises sind, weil auch sie Schnittpunkte zweier entsprechenden Strahlen der Büschel sind. Man erhält dabei die paradox erscheinenden Eigenschaften, daß je zwei (imaginäre) Strahlen, welche von zwei reellen Punkten nach demselben von den beiden unendlich fernen absoluten Kreispunkten gehen, zu einander zugleich parallel und senkrecht sind. Dies zeigt aber wieder Übereinstimmung mit der Eigenschaft der Kreisasymptoten, deren jede als ein zusammenfallendes Paar konjugierter Durchmesser aufzufassen ist. Da je zwei konjugierte Durchmesser des Kreises zu einander senkrecht sind, so muß jede Gerade aus dem Kreismittelpunkt nach einem der absoluten Punkte als zu sich selber parallel und senkrecht betrachtet werden.

bei welcher jeder Strahl des Parallelstrahlenbüschels aller Durchmesser zu einem einzigen derselben konjugiert ist.

Erkl. 301. Nächst dem Mittelpunkt sind die wichtigsten Punkte in Beziehung zu einer Kurve die Punkte der unendlich fernen Geraden. Die Gesamtheit der konjugierten Geraden durch einen unendlich fernen Punkt bildet einen involutorischen Parallelstrahlenbüschel, als dessen jeweilige Ordnungsstrahlen die beiden Paralleltangenten der Kurve in der Richtung nach dem unendlich fernen Büschelscheitel auftreten. Der Büschel weist stets hyperbolische Involution auf für alle Ellipsen und Kreise und Parabeln, sowie für die Punkte der unendlich fernen Geraden im Außenwinkel der Asymptoten der Hyperbel, elliptische Involution nur für die Punkte der unendlich fernen Geraden im Innenwinkel der Asymptoten der Hyperbel, parabolische Involution für den unendlich fernen Punkt jeder Parabel sowie für die beiden unendlich fernen Berührungspunkte der Asymptoten der Hyperbel, denn in letzteren Fällen ist stets die unendlich ferne Gerade bezw. die Asymptote selber jedem anderen Büschelstrahl konjugiert bezw. umgekehrt. Von besonderer Art ist dabei die hyperbolische Strahleninvolution in den Punkten der unendlich fernen Geraden in Bezug auf die Parabel, indem dort die unendlich ferne Gerade als Kurventangente selber den einen Ordnungsstrahl bildet. Daher bildet die einzige im endlichen laufende Parabeltangente in der Weise den anderen Ordnungsstrahl, daß je zwei in gleichem Abstand zu ihren beiden Seiten liegende Geraden — je eine die Kurve schneidende und eine nicht schneidende — ein zugeordnetes Strahlenpaar des involutorischen Parallelstrahlenbüschels liefern. Dies zeigt wieder Übereinstimmung mit der in Erkl. 139 und 296 erwähnten Eigenschaft der Parabel.

Frage 73. Wie treten die einzelnen Arten der Involutionen bei den verschiedenen Kurvengattungen auf?

Erkl. 302. Die vorstehende Frage erfährt in nebenstehender Antwort fünffach doppelte Lösung. Denn man unterscheidet nach den bisherigen Ausführungen außer den beiden allgemeinen Involutionsarten, nämlich der elliptischen und hyperbolischen, d. h. ohne und mit

Antwort. 1) Eine allgemeine elliptische Punktinvolution tritt auf bei jeglicher Kurve in der Gesamtheit der konjugierten Punkte auf einer beliebig gewählten nicht treffenden Geraden, so auch auf den nicht treffenden Durchmessern jeder Hyperbel und speziell auf der unendlich fernen Geraden für jede allgemeine Ellipse.

Ordnungselementen, noch die parabolische Involution, sowie die beiden besonderen Involutionsarten, nämlich die circulare und die gleichseitig-hyperbolische; und von jeder Gattung der Involutionen gibt es wieder Punktinvolutionen und Strahleninvolutionen. Dabei kann in neun von diesen zehn Fällen die verlangte Involution in verschiedener Weise erscheinen, je nach Lage der Elemente bezw. nach dem Zahlenwerte der zugehörigen Potenz; nur bei der circularen Punktinvolution ist das Auftreten ein ganz einzigartiges, ohne jede Veränderlichkeit, nämlich nur auf der unendlich fernen Geraden und in stets gleichbleibender Lage.

Erkl. 303. Jede einzelne der nebenstehenden fünf Doppelantworten gibt die Lösung der Frage noch in dreifacher Weise, nämlich zunächst hinsichtlich der allgemeinen Bedingungen für das Auftreten der gefragten Involutionsart, zweitens werden diejenigen besonderen Einzelfälle in Erinnerung gebracht, welche schon in den vorhergehenden Antworten zur Erwähnung gelangt waren, und drittens wird angegeben, wie die gefragte Involutionsart speziell mit unendlich fernem Träger auftreten kann, also jede Punktinvolution auf der unendlich fernen Geraden, jede Strahleninvolution mit unendlich fernem Scheitel, d. h. als Parallelstrahlenbüschel. Die meisten dieser Einzelfälle sind in anderm Zusammenhang bereits besprochen in den beiden vorhergehenden Antworten.

Erkl. 304. Da die circulare und die gleichseitig-hyperbolische Involution nur durch metrische Eigenschaften definiert sind, so kann als Projektion derselben im allgemeinen nicht wieder eine gleichartige Involution erzeugt werden. So entsteht durch Projektion einer gleichseitig-hyperbolischen Punktinvolution nur in dem Ausnahmefalle wieder eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution, daß der Scheitel auf der im Involutionsmittelpunkt errichteten Senkrechten gewählt wird, also bei dem Parabeldurchmesser bezw. der Asymptotenparallelen einer Hyperbel auf

Eine allgemeine elliptische Strahleninvolution tritt auf bei jeglicher Kurve in der Gesamtheit der konjugierten Geraden durch einen beliebig gewählten innern Punkt, so auch in den konjugierten Durchmessern der allgemeinen Ellipse und speziell als Parallelstrahlenbüschel bei jeder Hyperbel durch jeden innerhalb der Kurve liegenden Punkt der unendlich fernen Geraden.

2) Eine allgemeine hyperbolische Punktinvolution erscheint bei jeglicher Kurve in der Gesamtheit der konjugierten Punkte auf einer beliebig gewählten schneidenden Geraden, so auch auf jedem Durchmesser von Ellipse oder Kreis sowie auf den schneidenden Durchmessern jeder Hyperbel und speziell auf der unendlich fernen Geraden für die allgemeine Hyperbel.

Eine allgemeine hyperbolische Strahleninvolution erscheint bei jeglicher Kurve in der Gesamtheit der konjugierten Geraden durch einen beliebig gewählten äußern Punkt, so auch in den konjugierten Durchmessern der allgemeinen Hyperbel und speziell als Parallelstrahlenbüschel durch jeden Punkt der unendlich fernen Geraden für Ellipse und Kreis und bei jeder Hyperbel für jeden außerhalb der Kurve liegenden Punkt der unendlich fernen Geraden.

3) Eine parabolische Punktinvolution entsteht bei jeglicher Kurve in der Gesamtheit aller zum Berührungspunkt konjugierten Punkte einer beliebig gewählten berührenden Geraden, also auch mit unendlich fernem Doppelpunkte auf den Asymptoten jeder Hyperbel und speziell auf der unendlich fernen Geraden bei der Parabel.

der Senkrechten im Kurvenschnittpunkt. Umgekehrt wird durch eine gleichseitig hyperbolische Strahleninvolution nur auf einer solchen Geraden wieder eine gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution ausgeschnitten, welche zum ersten oder zum zweiten Ordnungsstrahl senkrecht steht, bezw. zum zweiten oder zum ersten Ordnungsstrahl parallel läuft, also wieder bei den Asymptotenparallelen einer gleichseitigen Hyperbel. Dabei ist aber sehr wohl zu beachten, dass die so entstehende gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution nicht dieselbe gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution ist, welche durch die Kurve selbst in der Gesamtheit der konjugierten Punkte auf dieser Geraden erzeugt wird, denn letztere hat den Kurvenschnittpunkt der Geraden zum Ordnungspunkt, erstere aber den Schnittpunkt mit der anderen Asymptote.

Eine parobolische Strahleninvolution entsteht bei jeglicher Kurve in der Gesamtheit aller zur Tangente konjugierten Geraden durch einen beliebig gewählten Kurvenpunkt, und speziell als Parallelstrahlenbüschel durch die beiden unendlich fernen Asymptotenpunkte jeder Hyperbel, wobei die Asymptote als Doppelstrahl erscheint, sowie durch den einen unendlich fernen Punkt jeder Parabel, hier aufzufassen als Gesamtheit aller zur unendlich fernen Geraden als Parabeldurchmesser konjugierten übrigen Durchmesser der Parabel.

4) Die zirkulare oder absolute Punktinvolution wird einzig beim Kreise, und zwar identisch bei jedem Kreise erzeugt als Gesamtheit der konjugierten Punkte auf der unendlich fernen Geraden.

Eine zirkulare oder orthogonale Strahleninvolution wird erzeugt als Gesamtheit der konjugierten Geraden durch einen derart ausgewählten Punkt, daß je zwei seiner konjugierten Strahlen aufeinander senkrecht stehen, also besonders in den konjugierten Durchmessern jedes Kreises. Als Grenzfall könnte man die parabolische Strahleninvolution der zur unendlich fernen Geraden konjugierten Parabeldurchmesser auch als orthogonale Strahleninvolution auffassen, insofern jeder dieser Parabeldurchmesser zum unendlich fernen konjugierten auch senkrecht ist.

5) Eine gleichseitig-hyperbolische Punktinvolution erhält man in der Gesamtheit der konjugierten Punkte auf einer Geraden, welche eine Kurve in einem ersten in endlicher und einem zweiten in unendlicher Entfernung liegenden Punkte schneidet, also bei der Parabel auf jedem Durchmesser sowie auf der Axe, bei jeder Hyperbel auf einer beliebig gewählten Parallelgeraden zu einer Asymptote, und als speziellen Fall auch auf der endlich fernen Geraden bei der gleichseitigen Hyperbel.

Eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution erhält man in der Gesamtheit der in Beziehung zu einer Kurve konjugierten Geraden durch einen derart ausgewählten Punkt, daß die von ihm an die Kurve gelegten Tangenten als Ordnungsstrahlen aufeinander senkrecht stehen, also besonders in den konjugierten Durchmessern der gleichseitigen Hyperbel und speziell als Parallelstrahlenbüschel bei der Parabel durch jeden beliebigen Punkt der unendlich fernen Geraden (also außer ihrem unendlich fernen Berührungspunkt).

---

e) Brennpunkts-Eigenschaften der Kurven zweiten Grades.

Frage 74. Welche beiden Fälle der besonderen Involutionen konjugierter Elemente sind in den bisherigen Erörterungen noch nicht vollständig erledigt worden?

Antwort. Die beiden Einzelfälle, deren abschließende Behandlung noch aussteht, sind die Aufsuchung von solchen Punkten, in welchen die inbezug auf eine gegebene Kurve konjugierten Geraden eine orthogonale bezw. eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution bilden.

Punkte von der Art, daß ihnen inbezug auf eine Kurve zweiten Grades eine orthogonale Strahleninvolution der konjugierten Geraden zugehört, nennt man Brennpunkte der Kurve, und die Polare eines Brennpunktes heißt Leitgerade, Leitlinie (im engeren Sinn) oder Direktrix der Kurve.

Punkte von derjenigen Art, daß ihnen inbezug auf eine Kurve zweiten Grades eine gleichseitig-hyperbolische Strahleninvolution der konjugierten Geraden zugehört, erfüllen eine gerade oder krumme Linie, welche Leitlinie im weiteren Sinne bezw. Direktorkreis der Kurve genannt wird.

Erkl. 306. In der vorigen Antwort 73 waren in allen Teilen völlig bestimmte Antworten gegeben, außer in den beiden letzten Fällen der orthogonalen und gleichseitig-hyperbolischen Strahleninvolution, wo beidemale nur gesprochen werden konnte von „einem derart ausgewählten Punkt, daß . . .“ Wenn man berücksichtigt, daß in beiderlei Strahleninvolutionen die Ordnungsstrahlen die reellen bezw. imaginären Tangenten an die Kurve aus dem Büschelscheitel bilden, so kann man die beiden noch zu erledigenden Fälle dahin zusammenfassen, daß Punkte zu suchen sind, von welchen zwei (reelle bezw. imaginäre) senkrechte Tangenten an die Kurve gehen. Denn sowie von einem Punkte zwei reelle senkrechte Tangenten an eine Kurve gehen, so müssen je zwei andere konjugierte Strahlen dieses Punktes zu den beiden senkrechten Ordnungsstrahlen der Strahleninvolution harmonisch liegen, müssen also mit diesen Senkrechten beiderseits gleichgroße Winkel bilden, d. h. eine gleichseitig-hyperbolische Involution bilden. Bei der orthogonalen Strahleninvolution aber gilt die Auffassung, daß ihre imaginären Ordnungsstrahlen ebenfalls als imaginäre Kurven-Tangenten aus dem Büschelscheitel aufeinander senkrecht stehen sollen, und nach je einem der beiden imaginären Kreispunkte der unendlich fernen Geraden gehen. — Aus der Definition erkennt man sofort, daß Punkte der letztgenannten Art, also mit senkrechtstehenden imaginären Kurventangenten nur innerhalb der Kurve gesucht werden dürfen, daß dagegen Punkte der anderen Art mit senkrechten reellen Tangenten nur außerhalb der Kurve vorkommen können.

Frage 75. Welche Schlüsse über die Lage eines Brennpunktes zur Kurve ergeben sich aus der Definition solcher Punkte?

Antwort. 1) Da die durch einen Brennpunkt F gehenden konjugierten Geraden eine orthogonale Strahleninvolution, also ohne reelle Ordnungsstrahlen, bilden müssen, so können keine reellen Tangenten vom Brennpunkt an

Erkl. 307. Zwei senkrechte konjugierte Gerade, wie solche durch jeden Brennpunkt stets gehen sollen, treffen

die unendlich ferne Gerade in zwei zugeordneten Punkten der sogenannten absoluten Kreisinvolution. Man kann also die Brennpunkte auch in Anlehnung an die Auffassung der Erkl. 298 definieren als Punkte der Art, daß die ihnen zugehörige Involution der konjugierten Strahlen perspektivisch liegt zur Kreisinvolution auf der unendlich fernen Geraden. Und da die Ordnungspunkte letzterer Involution zwei imaginäre Punkte sind, welche in zwei zueinander senkrechten Richtungen gedacht werden, so sind auch die Ordnungsstrahlen der dazu perspektivisch liegenden Orthogonalinvolution der konjugierten Strahlen des Brennpunktes zwei zueinander senkrecht gedachte imaginäre Tangenten an die Kurve.

Erkl. 308. Ellipse und Hyperbel haben zwei Axen, die Parabel eine Axe. Nach dem zweiten Teile nebenstehender Antwort ist für beide letzteren Kurven kein Zweifel mehr zulässig über die Gerade, auf welcher ein Brennpunkt liegen kann. Denn von den beiden Hyperbelaxen ist die schon früher als Nebenaxe bezeichnete eine die Kurve nicht treffende Gerade, hat also gar keine Punkte innerhalb der Kurve. Demnach können Brennpunkte nur liegen auf dem Innenteil der Parabelaxe bezw. auf den beiden Innenteilen der die Kurve schneidenden Hauptaxe der Hyperbel. Für die Ellipse aber ist noch zu entscheiden zwischen den beiden Axen. Nur soviel wird durch den dritten Teil der nebenstehenden Antwort festgestellt, daß Brennpunkte nur auf der einen oder nur auf der anderen Axe liegen können; — welche von beiden die Hauptaxe ist, die längere oder die kürzere, wird erst in der Antwort der nächsten Frage festgestellt.

Erkl. 309. Es ist auch einstweilen noch nicht festgestellt, wieviele Brennpunkte einer Kurve zukommen. Wegen der Symmetrie zur Nebenaxe aber erkennt man, daß bei Ellipse und Hyperbel die Brennpunkte jedenfalls in gerader An-

die Kurve gehen, da solche die Ordnungsstrahlen der Involution sein würden. Folglich kann ein Brennpunkt nur innerhalb der Kurve vorhanden sein, nicht außerhalb und nicht auf der Kurve.

2) Unter den Strahlen durch einen Brennpunkt F befindet sich jedenfalls ein solcher nach dem Kurvenmittelpunkt M, also ein Durchmesser. Der zu diesem Durchmesser FM konjugierte Strahl durch den Brennpunkt F geht nach dem endlich fernen Pol des Durchmessers, läuft also mit dem zu FM konjugierten Durchmesser parallel. Da aber der zu FM konjugierte Strahl auch zu FM senkrecht sein muß, so müssen auch die mit diesem Strahlenpaar parallel laufenden konjugierten Durchmesser zueinander senkrecht stehen, und folglich muß die Verbindungsgerade FM einer von denjenigen Durchmessern sein, welche mit ihrem konjugierten rechte Winkel bilden, d. h. eine Kurvenaxe. Danach kann ein Brennpunkt nur auf der Innenstrecke einer Axe liegen.

3) Angenommen F_1 und F_2 wären zwei Brennpunkte einer Kurve, so befindet sich unter den durch F_1 bezw. F_2 gehenden Strahlen jedenfalls auch der Verbindungsstrahl $F_1 F_2$; und der zu $F_1 F_2$ konjugierte Strahl des Punktes F_1 sowohl, als auch der zu $F_1 F_2$ konjugierte Strahl des Punktes F_2 muß auf $F_1 F_2$ senkrecht stehen. Der Pol der Geraden $F_1 F_2$ müßte also sowohl auf der ersten als auch auf der zweiten Senkrechten liegen, d. h. die beiden zu einander parallelen Geraden liefern als ihren unendlich fernen Schnittpunkt den Pol der Geraden $F_1 F_2$.

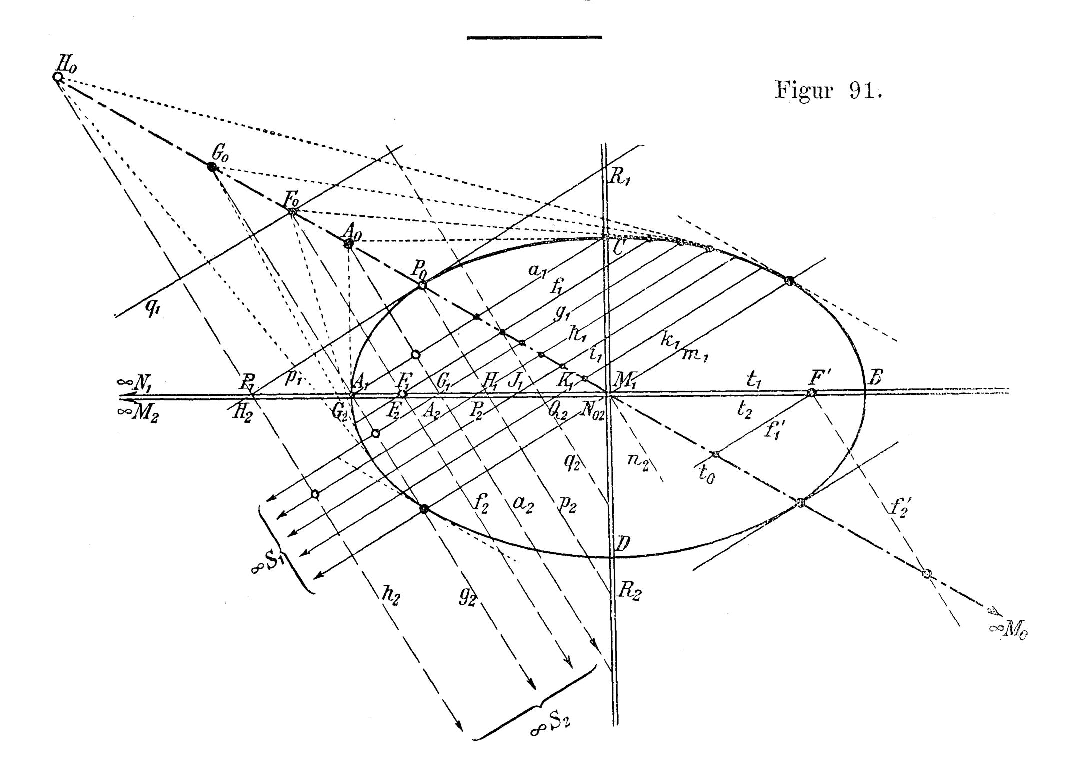
Darnach muß die Verbindungsgerade zweier Brennpunkte stets einen unendlich fern liegenden Pol haben, d. h. sie muß ein Durch-

zahl vorhanden sein müssen, bei der Parabel in noch nicht genau bestimmter Anzahl; denn letztere besitzt keine eigentliche Nebenachse. Wollte man die unendlich ferne Gerade, weil sie den unendlich fernen Parabelmittelpunkt enthält, als Nebenaxe ansehen, so käme ein symmetrisch liegender Brennpunkt eben auch in den unendlich fernen Parabelpunkt zu liegen. In der Tat wird sich zeigen, daß dieser unendlich ferne Punkt anzusehen ist gleichzeitig als Berührungspunkt der Kurve mit der unendlich fernen Geraden, als sich selbst konjugierter Kurvenpunkt, als Mittelpunkt und als Brennpunkt der Parabel. Zu erledigen bleiben also noch die allgemeine Frage bei jeder Kurve nach der Anzahl der Brennpunkte und die andere Frage für die Ellipse, welche von beiden Axen ihre Brennpunkte enthalten muß.

messer sein. Und hiernach können sämtliche einer Kurve etwa zugehörigen Brennpunkte auch nur auf einer und derselben Axe dieser Kurve liegen. Diese die Brennpunkte der Kurve enthaltende Axe wird daher als Hauptaxe bezeichnet und unterscheidet sich eben durch die Brennpunkte von der andern oder Nebenaxe.

4) Wird die Kurve um die Nebenaxe umgeklappt, so werden je zwei symmetrisch liegende Punkte mit einander vertauscht, also wird auch ein auf der Hauptaxe liegender Brennpunkt mit allen seinen Eigenschaften übergeführt in einen auf der entgegengesetzten Halbaxe im gleichen Abstand vom Mittelpunkt liegenden Punkt mit denselben Beziehungen zur Kurve. Somit müssen zwei Brennpunkte einer Kurve stets auf der Hauptaxe zum Mittelpunkt symmetrisch liegen.

Figur 91.

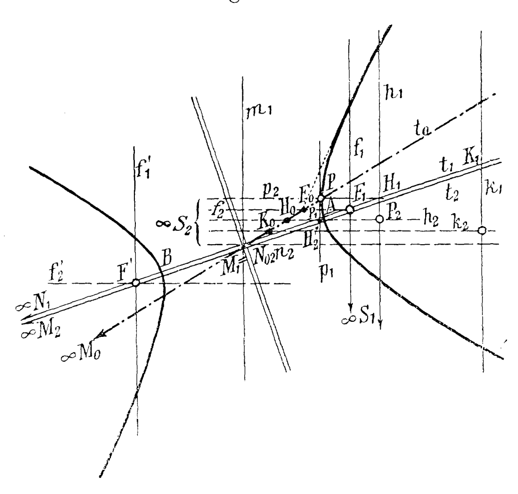


Frage 76. Wie bestimmt man die Anzahl und Lagebeziehung der Brennpunkte einer Kurve?

Erkl. 310. Der nebenstehende Nachweis, daß die Ellipse und Hyperbel zwei, die Parabel einen Brennpunkt auf ihrer Hauptaxe besitzen müssen, könnte auch aus den später bewiesenen Maßeigenschaften dieser Punkte entnommen werden. Jedoch ist es vorzuziehen, auch diese Eigenschaften auf rein projektivische Weise abzuleiten, und diesem Zwecke dient die Ausführung der nebenstehenden Antwort. Zudem liefert dieselbe nebenbei auch noch andere bemerkenswerte Beziehungen der Kurve zu ihren Brennpunkten, insbesondere die sog. Fokalinvolution. — Wegen der Wichtigkeit der Beweisführung ist dieselbe auch nicht nur in Fig. 91 an der Ellipse, sondern auch in Fig. 92 für die Hyperbel und in Fig. 93 für die Parabel noch besonders zur Darstellung gebracht.

Antwort. 1) Da ein Brennpunkt nach dem bisherigen ein Punkt auf der Innenstrecke einer Axe sein muß und lauter senkrechte konjugierte Strahlen besitzt, so sucht man zunächst überhaupt eine gegenseitige Beziehung senkrechter konjugierter Strahlen aufzufinden. Zu dem Zwecke zieht man durch beliebig viele Punkte $A_1\ F_1\ G_1\ H_1 \ldots$ einer Kurven-Axe AMB in Fig. 91 bis 93 Strahlen $a_1\ f_1\ g_1\ h_1 \ldots$ in einer willkürlich ausgewählten gemeinsamen Richtung, also sämtlich parallel nach einem unendlich fernen Punkte S_1. Diese Strahlen bilden einen Parallelstrahlenbüschel S_1, und alle zu ihm senkrechten Strahlen müssen einem zweiten Parallelstrahlenbüschel S_2 angehören, dessen Scheitel S_2 in der zur Richtung S_1 senkrechten Richtung liegt.

Figur 92.

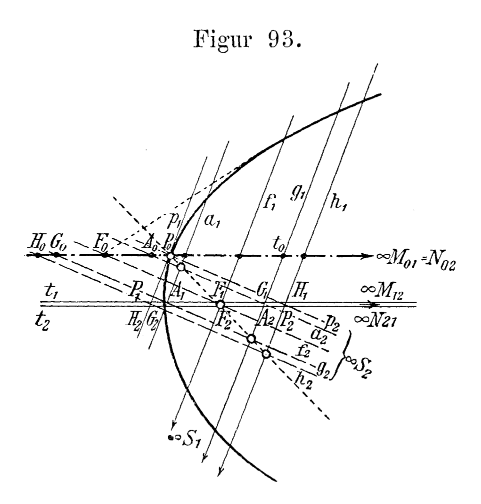


Erkl. 311. Die beiden unendlich fernen Punkte S_2 liegen in zwei zu einander senkrechten Richtungen auf der unendlich fernen Geraden. Jeder ist Scheitel eines Parallelstrahlenbüschels, und es fragt sich, ob und wie die Strahlen der beiden Büschel zugeordnet werden. Dies geschieht durch die Zu-

2) Zu einem Strahle $a_1\ f_1\ g_1 \ldots$ des ersten Büschels ist nun derjenige Strahl $a_2\ f_2\ g_2 \ldots$ des zweiten Büschels der konjugierte Strahl, und zwar ein senkrecht stehender konjugierter Strahl, welcher durch den Pol des erstgenannten Strahles $a_1\ f_1\ g_1 \ldots$ hindurchgeht,

ordnung der konjugierten Punkte auf dem Durchmesser t_0. Je zwei Punkte dieses Durchmessers sind durch die polare Beziehung entsprechend, und immer durch den einen Punkt eines Paares geht ein Strahl von S_1, durch den anderen der zugeordnete Strahl von S_2. Der Schnittpunkt zweier solchen Strahlen muß irgendwo in der Kurvenebene liegen. Fällt er insbesondere auf die Axe selber, dann muß dieser Punkt F ein Brennpunkt sein. Denn außer den beiden senkrechten konjugierten Strahlen f_1 und f_2 der Büschel S_1 und S_2 geht durch diesen Punkt F eben die Axe a selbst, deren konjugierte Gerade der anderen Axe b parallel laufen muß, also ebenfalls senkrecht zu a stehen muß. Sowie aber in der Involution der konjugierten Strahlen eines Punktes F zwei senkrechte Strahlenpaare vorhanden sind, müssen alle Strahlen der Involution, also alle konjugierten Strahlen des Punktes F aufeinander senkrecht stehen, d. h. F ist ein Brennpunkt der Kurve.

Figur 93.



Erkl. 312. Da der Mittelpunkt der Ellipse M in Fig. 91 innerhalb der Kurve liegt, so ist der Durchmesser m_1 dort einer der in Betracht kommenden Strahlen; bei der Hyperbel in Fig. 92 liegt der Punkt M_1 außerhalb der Kurve, und es brauchte der Strahl m_1 hier eigentlich nicht benutzt zu werden.

— und umgekehrt. Da aber die Strahlen a_1 f_1 g_1 sämtlich parallel laufen durch den Punkt S_1, so müssen ihre Pole sämtlich liegen auf der Polaren des unendlich fernen Punktes S_1, also auf einem Kurvendurchmesser, und zwar auf dem konjugierten Durchmesser zu demjenigen Kurvendurchmesser m_1, welcher unter den Parallelstrahlen des Büschels S_1 enthalten ist. Die Pole A_0, F_0, G_0 ... der Strahlen a_1 f_1 g_1 werden geliefert durch die Tangenten in den Kurvenschnittpunkten von a_1 f_1 g_1. (Den Pol M_0 des Durchmessers m_1 liefern bei der Ellipse Fig. 91 die Paralleltangenten in den Endpunkten des Durchmessers m_1.)

3) Nun bilden aber diese Polpunkte A_0 F_0 G_0 ... auf dem zu m_1 konjugierten Durchmesser nichts anderes als die involutorische Punktreihe t_0 der inbezug auf die gewählte Kurve konjugierten Punkte dieses Durchmessers, denn es sind konjugierte Punkte.

A_0 und der Schnittpunkt $(a_1\ t_0)$,
F_0 und der Schnittpunkt $(f_1\ t_0)$,
G_0 und der Schnittpunkt $(g_1\ t_0)$, ...
M_0 und der Schnittpunkt $(m_1\ t_0)$,
weil stets der eine Punkt eines solchen Paares auf der Polaren des andern liegt. Demnach sind nunmehr die durch die Punkte A_0 F_0 G_0 ... gezogenen Senkrechten zu m_1, nämlich $a_2 \perp a_1$, $f_2 \perp f_1$ $g_2 \perp g_1$, $h_2 \perp h_1$ ... die senkrechten konjugierten Geraden zu den letzteren, und sie bilden zusammen ein zweites Parallelstrahlenbüschel nach dem unendlich fernen Punkte S_2, dessen Richtung senkrecht zur Richtung nach S_1 gelegen ist.

4) Wenn nun von den Strahlenpaaren a_1 a_2, f_1 f_2, g_1 g_2, h_1 h_2 eines oder mehrere einander auf der Axe schneiden würden, dann wären diese Schnittpunkte Kurvenbrennpunkte. Dies ist in Fig. 91 bis

Bei der *Parabel* Fig. 93 endlich ist M selbst unendlich fern, folglich ist der konjugierte Durchmesser t_0 hier der Axe parallel, während er in der Ellipse nach innen, bei der Hyperbel nach außen gegen die Axe konvergiert. Die Involution der konjugierten Punkte auf t_0 ist die durch die Kurve bestimmte, hat also die Kurvenschnittpunkte von t_0 zu Doppelpunkten, sodaß der Punkt P_0 jedenfalls auch ein Schnittpunkt zweier senkrechten zugeordneten Strahlen von S_1 und S_2 wird. Denn zur Tangente p_1 ist überhaupt *jeder* Strahl durch P_0 konjugiert, darunter folglich auch der zu p_1 senkrechte Strahl p_2. Nach Antwort 5 der Fig. 73 ist auch bei der Parabel Fig. 93 die Involution auf t_0 eine gleichseitig hyperbolische, besitzt also gleichgroße Strecken zwischen P_0 und den beiderseits zugeordneten Punkten.

Erkl. 313. Der Gang der nebenstehenden Beweisführung führt zur Erkenntnis von Anzahl und Lage der *Kurvenbrennpunkte* auf grund der Eigenschaft, daß diese Brennpunkte die Ordnungspunkte einer gewissen Involution auf der Axe sein müssen. Denn je zwei *beliebige* zugehörigen Strahlen der beiden Büschel S_1 S_2, also zwei *beliebige* senkrechte konjugierte Strahlen zur Kurve schneiden auf der Axe zugeordnete Punkte der beiden involutorisch gepaarten Punktreihen t_1 t_2 aus. Damit also F ein *Brennpunkt* sein kann, müssen zwei solche Schnittpunkte zugeordneter Strahlen zusammenfallen, oder F muß ein *Ordnungspunkt* der involutorischen Reihe sein. Diese besondere Involution auf der Axe, deren Ordnungspunkte die Brennpunkte werden, wird *Fokalinvolution* genannt. Und da eine allgemeine Involution stets zwei Ordnungspunkte hat, so ist damit auch Anzahl und Lage der Kurvenbrennpunkte bestimmt. Es ist aber besonders zu beachten, daß die Fokalinvolution eben nicht die der Kurve *zugehörige* Involution der konjugierten Punkte auf der Axe ist, denn diese hat die Kurvenschnittpunkte der Axen zu Ordnungspunkten. Für letztere ist das konstante Produkt

93 der Fall für (f_1 f_2) im Brennpunkte $F_{1\,2}$, aber für kein anderes Paar der Strahlen auf gleicher Seite von m_1. Es werden nämlich durch je zwei zugeordnete Strahlen der beiden Strahlenbüschel S_1 und S_2 je zwei Punkte eines involutorisch gepaarten Punktpaares der Involution auf dem Durchmesser t_0 nach der Axe MA projiciert, sodaß auf der Axe zwei Punktreihen t_1 und t_2 entstehen von der Beziehung $t_2 \overline{\wedge}\ S_2 \overline{\wedge}\ t_0$, bezw. $t_1 \overline{\overline{\wedge}}\ S_1 \overline{\wedge}\ t'_0$. Da aber die involutorisch gepaarten Punkte auf t_0 selbst durch Zusammenlegung zweier projektivisch verwandten Punktreihen entstanden gedacht werden können, so schließt auch diese Reihe von Beziehungen in der Weise, daß entsteht

$$t_1 \overline{\wedge}\ S_1 \overline{\wedge}\ t'_0 \overline{\wedge}\ t_0 \overline{\wedge}\ S_2 \overline{\wedge}\ t_2,$$

und so entstehen auf der Kurven-Axe AM durch die Schnittpunkte je zweier konjugierten Strahlen der beiden zueinander senkrechten Strahlenbüschel zwei projektivisch verwandte Punktreihen A_1 F_1 G_1 $H_1 \ldots \overline{\wedge}\ A_2$ F_2 G_2 $H_2 \ldots$

5) Betrachtet man aber die Art Verwandtschaft dieser beiden Punktreihen t_1 und t_2 genauer, so erkennt man, dass je zwei Punkte einander *doppelt* entsprechen. So wird man in der Figur 91 geführt von A_1 durch a_1 zum Schnittpunkte (t_0 a_1) dann zu dessen konjugiertem Punkt A_0, und durch $a_2 \perp a_1$ nach A_2; und wenn man jetzt A_2 bezeichnet als G_1, so gelangt man von G_1 durch g_1 zum Schnittpunkt (t_0 g_1), dann zu dem konjugierten Punkte G_0, und durch $g_2 \perp g_1$ wieder zurück nach demselben Punkte $G_2 = A_1$. Zum *Beweis* dieser involutorischen Zuordnung genügt nach Satz 22 der Nachweis für ein *einziges Punktpaar* z. B. den Kurvenmittelpunkt M_1 und N_2. Pol von m_1 ist der unendlich ferne Punkt M_0, folglich ist die unendlich ferne Gerade als gemeinsamer Strahl der Büchel S_1 und S_2 sowohl als m_2 in

der Abstände vom Mittelpunkt gleich $\overline{MA}^2 = a^2$, für die Fokalinvolution aber $\overline{MF}^2 = e^2$. Aus diesem Umstande sowie aus Fig. 93 erkennt man, daß bei der Parabel wegen des unendlich fern liegenden Mittelpunktes der Kurve sowie der Fokalinvolution auch nur ein einziger Brennpunkt im endlichen erscheinen kann.

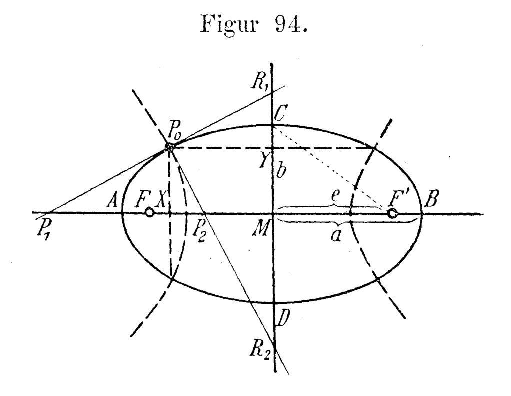
Erkl. 314. Da in Fig. 91 bis 93 F_0 der Pol von f_1 ist, so muß auch die Polare jedes Punktes von f_1 durch F_0 gehen, insbesondere muß also auch die Polare von $F_{1,2}$ selber, nämlich die sog. Leitgerade der Kurve durch F_0 gehen, und zwar senkrecht zur Axe. Und dabei bildet die Kurventangente von F_0 an die Kurve mit f_1 und f_2 ein bei $F_{1,2}$ rechtwinkeliges Dreieck. Der letztere Umstand wird noch besondere Erörterung erfahren.

S_2 zugeordneter Strahl zu m_1 in S_1, wie auch als n_1 in S_1 zugeordneter Strahl zu n_2 in S_2. Daher ist M_1 und ∞M_2, N_2 und ∞N_1 doppelt entsprechend, und folglich bilden t_1 und t_2 auf der Axe eine involutorische Reihe mit Mittelpunkt M.

6) Da aber eine involutorische Reihe nur zwei Doppelpunkte hat, und zwar in beiderseits gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Reihe, so giebt es auch auf der Kurven-Axe nur zwei Brennpunkte in bestimmt gleichen Abständen vom Kurvenmittelpunkte, nämlich den Punkt $F_{1,2}$ als Schnittpunkt der zugeordneten Strahlen f_1 und f_2 und den in symmetrischer Lage befindlichen Punkt F'_1 durch welchen die symmetrisch liegenden Strahlen $f'_1 \perp f'_2$ hindurchgehen. Man hat also bei jeder Ellipse und Hyperbel zwei Brennpunkte, je einen auf einer Axenhälfte, und man benennt deren Abstand vom Mittelpunkte mit dem Namen Excentricität der Kurve. Bei der Parabel aber gibt es wegen des unendlich fernen Mittelpunktes nur einen Brennpunkt, und man kann bei ihr auch keine Excentricität von endlicher Größe aufstellen; man könnte aber den unendlich fernen Punkt auch als zweiten unendlich fern liegenden Brennpunkt der Parabel auffassen.

Frage 77. In welcher Beziehung stehen die Brennpunkte und die Excentricität MF zu den beiden Axen der Ellipse?

Figur 94.



Antwort. 1) In Fig. 94 sei P_0 ein Kurvenpunkt einer Ellipse oder Hyperbel mit Mittelpunkt M und Brennpunkten F und F', dann ist der Strahl $P_1 P_0 R_1$ Tangente der Ellipse und $P_0 P_2 R_2$ ein senkrechter konjugierter Strahl, oder der Strahl $P_0 P_2 R_2$ ist Tangente der Hyperbel, und dann ist der Strahl $P_1 P_0 R_1$ ein senkrecht konjugierter. Zieht man ferner noch $P_0 X \perp MA$ und $P_0 Y \perp MC$, so ist $P_0 X$ wegen der Symmetrie zur Axe MA die Berührungssehne also Polare des Punktes P_1 für die Ellipse bezw. von P_2 für die Hyperbel, und aus gleichem Grunde $P_0 Y$ wegen der Axe MC die Berührungssehne und

Erkl. 315. Auf jeder der Axen MA und MC in Fig. 94 sind zunächst die zweierlei Involutionen zu unterscheiden, welche sämtlich den Punkt M als gemeinsamen Mittelpunkt haben. Erstens besteht die Involution polar konjugierter Punkte für die Ellipse: dafür sind zugeordnete Punktepaare P_1 und X mit den Kurvenschnittpunkten AB bezw. R und Y mit den Kurvenschnittpunkten CD, und da die Kurvenschnittpunkte stets Ordnungspunkte der Involution sind, so besteht hierfür die Gleichung der harmonischen Beziehung: $\overline{MA}^2 = MP_1 \cdot MX = \overline{MB}^2$ bezw. $\overline{MC}^2 = MR_1 \cdot MY = \overline{MD}^2$. Zweitens besteht die Involution der polar konjugierten Punkte für die Hyperbel: dafür sind zugeordnet P_2 und X zu den reellen Kurvenschnittpunkten der Hyperbel auf MA, und R_2 und Y zu den imaginären Kurvenschnittpunkten der Hyperbel auf MC. Bezeichnet man also mit a die reelle Halbaxe der Hyperbel auf MA, so wird $a^2 = MP_2 \cdot MX$. Auf der andern Axe ist wieder M der Mittelpunkt der Involution, R_2 und Y zugeordnete Punkte, also das konstante Produkt $MR_2 \cdot MY$; da aber diese Strecken entgegengesetzte Richtung haben, so muß das Produkt gleich $-b^2$ gesetzt werden, indem man als ib die imaginäre Länge von M bis zu den imaginären Kurvenschnittpunkten der Hyperbel auf MC bezeichnet, also $MR_2 \cdot MY = (i\,b)^2 = -b^2$.

Erkl. 316. Schon an Fig. 91 und 92 war zu erkennen, daß die beiden Parallel-Strahlenbüschel S_1 und S_2 nicht nur auf der einen Axe, sondern auch auf der anderen Schnittpunkte liefern, welche durch die zugeordneten Strahlen der beiden Büschel als zugeordnete bezeichnet werden. Und da die Strahlen der beiden Büscheln einander je doppelt entsprechen, so findet dies auch unter den Paaren der Schnittpunkte auf der zweiten Axe statt. Man hat also auch dort eine Involution dieser Schnittpunkte. Und die nebenstehende Ueberlegung zeigt, daß diese dritte Involution, welche auf den Axen MA und MC erscheint, beidemale gleiches Streckenprodukt Polare des Punktes R_1 für die Ellipse bezw. von R_2 für die Hyperbel.

2) Man hat also für die Involution der konjugierten Punkte auf den Axen MAB bezw. MCD für die Ellipse: $MP_1 \cdot MX =$ const. $= MA^2 = a^2$ und $MR_1 \cdot MY =$ const. $= MC^2 = b^2$; und für die Fokalinvolution auf der Axe MA wird $MP_1 \cdot MP_2 =$ const. $= MF^2 = e^2$. Dabei ist mit dem Buchstaben e die Excentricität MF, und diejenige Halb-Axe, welche die Brennpunkte enthält, mit dem Buchstaben a, die andere Halbaxe mit b bezeichnet.

Nun haben aber die rechtwinkligen Dreiecke MP_1R_1, XP_1P_0 $P_0P_1P_2$ YP_0R_1, $P_0R_2R_1$, YR_2P_0, MR_2P_2, lauter gleiche Winkel, sind also sämtlich ähnlich. Und wegen des ersten und letzten ist $MP_1 : MR_1 = MR_2 : MP_2$; also gilt auch auf der Axe b ohne Rücksicht auf Vorzeichen der Strecken $MR_1 \cdot MR_2 = MP_1 \cdot MP_2 = e^2$, wie oben.

3) Ferner sind aber die Strecken P_0Y und XM einander parallel und gleichgroß, folglich $MP_1 : MX = MP_1 : YP_0 = MR_1 : YR_1$. Und endlich ist wegen des Höhenquadrats in dem rechtwinkligen Dreieck $P_0 R_2 R_1$ auch $MX^2 = P_0Y^2 = YR_1 \cdot YR_2 = YR_1 \cdot (MY + MR_2)$.

Werden die beiden letzten Ergebnisse multipliziert, so fällt einerseits einmal MX weg, andererseits der gleichgroße Faktor YR_1, und es bleibt $MP_1 \cdot MX = MR_1 (MY + MR_2) = MR_1 \cdot MY + MR_1 \cdot MR_2$. Von diesen Produkten ist aber nach dem zweiten Teil dieser Antwort das erste a^2, das zweite b^2, das dritte e^2; folglich ist $a^2 = b^2 + e^2$.

4) Hieraus geht nun noch hervor daß diejenige Halbaxe a der Ellipse welche die Brennpunkte enthält, eine größere Länge haben muß, als die andere Halbaxe b, oder daß bei der Ellipse stets die längere der beiden Axen die die Brennpunkte enthaltende Hauptaxe sein muß.

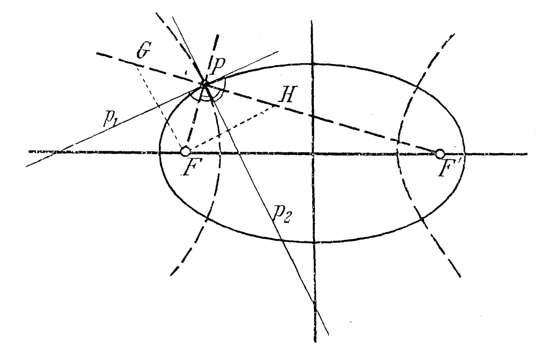
erzeugt, nur das einemal von positivem, das anderemal von negativem Vorzeichen, nämlich: $MP_1 \cdot MP_2 = MF^2 = e^2$, aber $MR_1 \cdot MR_2 = -MF^2 = -e^2$.

Erkl. 317. Führt man hiernach für die Hyperbel gleiche Rechnung durch, wie nebenstehend für die Ellipse, so entsteht erstens $MP_2 : MX = MP_2 : YP_0 = MR_2 : YR_2$, und zweitens $\overline{MX}^2 = \overline{YP_0}^2 = R_1Y \cdot YR_2 = YR_2 \cdot (R_1M - YM)$. Multiplikation liefert wieder links Wegfall des einen Faktors MX, rechts des gleichen Faktors YR_2, oder $MP_2 \cdot MX = MR_2 \cdot (R_1M - YM) = -MR_1 \cdot MR_2 + MR_2 \cdot MY$. Für die Hyperbel ist aber von diesen drei Produkten wieder das erste a^2, das zweite $+e^2$, das dritte $-b^2$, also bleibt $a^2 + b^2 = e^2$ oder $b^2 = e^2 - a^2$, während bei der Ellipse $a^2 - b^2 = e^2$ oder $b^2 = a^2 - e^2$. Hieraus ergibt sich, daß beidemale b Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, welches bei der Ellipse die Strecke a zur Hypotenuse und e zur Kathete, bei der Hyperbel umgekehrt e zur Hypotenuse und b zur zweiten Kathete hat. Daher muß in Fig. 94 jede der Verbindungsstrecken $FC = F'C = FD = F'D$ die Länge a haben, sodaß die Brennpunkte der Ellipse aus den Axen sofort konstruierbar sind.

Frage 78. Welche Brennpunkts-Eigenschaften der Kurven ergeben sich aus den Beziehungen der Fokalinvolution?

Antwort. 1) Verbindet man in Fig. 91 bis 93 irgend einen der Schnittpunkte zugeordneter Strahlen $(a_1\ a_2)$ oder $(g_1\ g_2)$ mit den beiden Brennpunkten der Kurve, so hat man vier Strahlen nach vier harmonischen Punkten, nämlich nach den Ordnungspunkten und einem Punktepaar der Fokalinvolution. Von diesen vier harmonischen Strahlen sind aber zwei zugeordnete aufeinander senkrecht, folglich müssen diese die Winkel der beiden andern halbieren. Geschieht dasselbe insbesondere auch mit dem Kurvenpunkte P als Schnittpunkt der Strahlen p_1 und p_2, also der Kurventangente und ihrer Normalen, so muß dieselbe Beziehung erscheinen. Dadurch er-

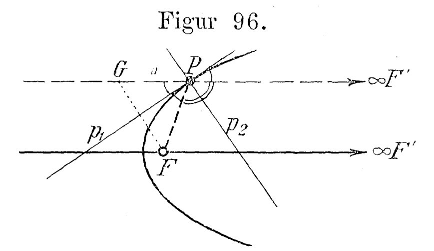
Figur 95.



Erkl. 318. In jedem Punkte der Ebene bilden die konjugierten Strahlen eine Involution, und innerhalb jeder Strahleninvolution befinden sich zwei senkrecht stehende Strahlen, welche die Axenstrahlen sind. Diese Axenstrahlen sind die Strahlen nach S_1 und S_2 in Fig. 91—93 in jedem Schnittpunkt zweier zugeordneten Strahlen $(a_1\ a_2)$. Sie schneiden auf der Axe das perspektivisch liegende Punktepaar der Fokalinvolution aus. Das Paar der Ordnungsstrahlen jener Involution aber muß in der Fokalinvolution ebenfalls durch die Ordnungspunkte gehen, also jedesmal die Brennpunkte der Kurve ausschneiden. Man hat daher in jedem

der Schnittpunkte (a_1 a_2) die Winkelhalbierung der Strahlen nach A_1 A_2 F und F' oder im Schnittpunkt (h_1 h_2) der Strahlen nach H_1 H_2 F und F'. Am bemerkenswertesten aber wird die Winkelbeziehung, wenn der Punkt auf der Kurve selbst liegt, indem dann das senkrechte konjugierte Strahlenpaar zu Tangente und Normale der Kurve wird, und das Strahlenpaar, dessen Winkel halbiert wird, zu den beiden Fahrstrahlen des Kurvenpunktes nach den Kurvenbrennpunkten.

Figur 96.



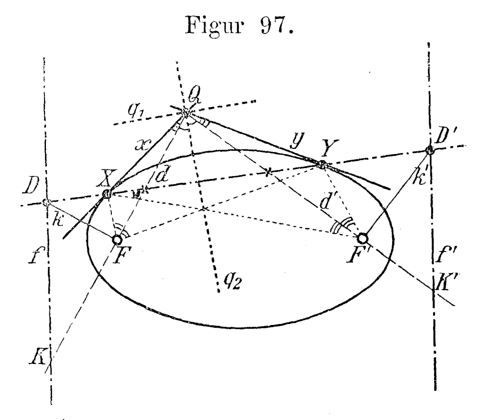
Erkl. 319. Die Fig. 95 dient zur Darstellung des Satzes 32 sowohl für Ellipse als für Hyperbel. — Im ersten Falle ist p_1 Tangente und p_2 Normale, im zweiten Falle ist p_2 Tangente und p_1 Normale. Da der Mittelpunkt und die Brennpunkte F und F' für beide Kurven dieselben sind, so muß auch die Fokalinvolution die gleiche werden, also auch die Winkelbeziehung an den Fahrstrahlen. Bei der Parabel fällt (Fig. 96) der zweite Brennpunkt ins Unendliche, indem die Fokalinvolution eine gleichseitig hyperbolische wird, und so wird der Strahl PF stets parallel zur Axe (Fig. 96). Es bilden also die Strahlen PF und PF' für alle drei Kurven gleiche Winkel einerseits mit der Kurventangente, andererseits mit der Kurvennormale. Noch sei für spätere Verwendung bemerkt, daß man den jenseits der Kurventangente symmetrischliegenden Punkt G zum Punkt F als Gegenpunkt des Brennpunktes bezeichnet, also in Fig. 95 für die Ellipse Punkt G, für die Hyperbel Punkt H.

Erkl. 320. Die vorgenannte Eigenschaft der Winkel hat in der antiken Geometrie zur Benennung der Punkte F F' als Brennpunkte geführt. Wendet hält man die Tatsache (Fig. 95) welche zur Namengebung der Kurvenbrennpunkte geführt hat.

Satz 32. Irgend zwei senkrechte konjugierte Gerade, also insbesondere die Tangente und ihre Normale eines Kurvenpunktes halbieren die Winkel der Verbindungsgeraden ihres Schnittpunktes nach den beiden Kurvenbrennpunkten.

2) Wählt man in Fig. 91 bis 93 einen außerhalb der Kurve gelegenen Schnittpunkt zweier ebensolchen zugeordneten Strahlen (h_1 h_2) oder (q_1 q_2) so bilden dessen konjugierte Strahlen eine Involution, deren Ordnungsstrahlen die Kurventangenten x y (Fig. 97) sind. Die senkrechtstehenden Strahlen q_1 q_2 dieser Involution müssen nach Satz 26 die sog. Axenstrahlen dieser Involution sein, also mit den Ordnungsstrahlen gleiche Winkel bilden. Nimmt man hierzu das Ergebnis des vorigen Satzes 32, so wird in Fig. 97 nicht nur $\sphericalangle (q_2 x) = (q_2 y)$, sondern auch $\sphericalangle (q_2 d) = (q_2 d')$. Hieraus folgt aber, daß auch $\sphericalangle (q_2 x) - (q_2 d) = (q_2 y) - (q_2 d')$, d. h. $\sphericalangle (xd) = (yd')$ bezw. $(xd') = (yd)$ sein muß.

Figur 97.



3) Bringt man noch in Fig. 97 die Berührungssehne X Y, also die Polare des Punktes Q, zum Schnitt

man nämlich auf die von einem Brennpunkt F nach einem Kurvenpunkte P ausgehenden Strahlen das physikalische Reflexionsgesetz für Schallstrahlen oder elektrische bezw. magnetische, insbesondere für Licht- oder Wärmestrahlen an, so bildet die Kurvennormale das Einfallslot, und der Strahl nach dem zweiten Brennpunkt liefert die Richtung des reflektierten Strahles. Es werden also bei der Ellipse alle Strahlen, die von F kommen, nach F' zusammengeführt und umgekehrt alle von F' kommenden Strahlen nach F. Bei der Hyperbel werden alle von F kommenden Strahlen an jedem Kurvenaste so auseinander geführt, als ob sie von F' kämen, und umgekehrt alle von F' ausgehenden Strahlen an beiden Ästen so reflektiert, als ob sie von F kämen. Und bei der Parabel werden alle vom Brennpunkte F ausgehenden Strahlen parallel zur Axe reflektiert („Scheinwerfer") und alle parallel zur Axe einfallenden Strahlen im Brennpunkte vereinigt („Brennspiegel").

Erkl. 321. Die vom Brennpunkte einer Kurve ausgehenden Strahlen werden wegen ihrer Wichtigkeit auch geradezu als Brennstrahlen oder schlechtweg als Fahrstrahlen oder Radienvektoren bezeichnet. Man kann also den Satz 32 auch in veränderter Weise aussprechen:

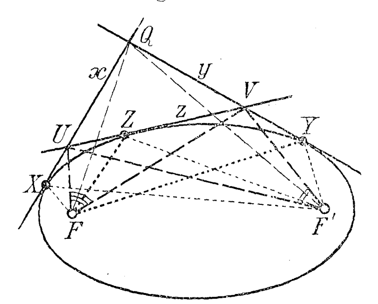
Satz 32a. Die beiden Fahrstrahlen irgend eines Kurvenpunktes bilden beiderseits gleiche Winkel mit der Tangente des Punktes.

Auch umgekehrt liefert diese Beziehung für die Maßgeometrie eine einfache Konstruktionsweise einerseits der Kurventangente in gegebenem Punkte, anderseits des Berührungspunktes auf gegebener Tangente für eine Kurve, deren Brennpunkte bekannt sind. Die verlangte Tangente ist nämlich die Winkelhalbierende der beiden Fahrstrahlen des Kurvenpunktes, und der gesuchte Berührungspunkt ist der Schnittpunkt des Fahrstrahles vom zweiten Brennpunkt nach dem Gegenpunkt des ersten.

mit der Polare des Punktes F, also der Leitgeraden f, so muß der Schnittpunkt D dieser beiden Polaren jedenfalls der Pol zur Verbindungsgeraden d der beiden Pol-Punkte Q und F werden, und ebenso der Schnittpunkt K von f und d zum Pol der Verbindungsgraden k der Punkte F und D. Demnach geht von den beiden Strahlen d und k des Brennpunktes F der erste durch den Pol K von k, der zweite durch den Pol D von d, folglich sind d und k konjugierte Strahlen des Brennpunktes F und stehen aufeinander senkrecht. Auf der Geraden XY aber schneidet die Polare d den vierten harmonischen Punkt aus zu dem Polpunkt D und den Kurvenschnittpunkten X und Y, folglich sind die senkrechten Strahlen d und k zugleich harmonisch getrennt durch FX und FY, bilden also mit diesen beiden gleichgroße Winkel $XFQ = QFY = \frac{1}{2} \cdot XFY$. Man erhält also in Zusammenfassung mit dem vorigen Ergebnis die weitere Beziehung:

Satz 33. Die Verbindungsstrahlen von den beiden Brennpunkten nach dem Schnittpunkt zweier Tangenten bilden zwei gleichgroße Winkelpaare mit diesen beiden Tangenten, und jeder einzelne von ihnen ist ein Halbierungsstrahl des Winkels der Fahrstrahlen seines Brennpunktes nach den Berührungspunkten der beiden Tangenten.

Figur 98.



Erkl. 322. Die Strahlen q_1 und q_2 der Fig. 97 sind gedacht als zwei zugeordnete Strahlen der beiden Büschel S_1 und S_2 in Fig. 91 bis 93, also Q als ihr Schnittpunkt, in welchem sie die senkrechten Strahlen der Strahleninvolution konjugierter Strahlen bilden. Sie sind zugeordnete harmonische Strahlen nicht nur zu den beiden Ordnungsstrahlen x und y, sondern auch zu den Brennstrahlen FQ und F′Q. Man kann daher den ersten Teil des Satzes 33 auch folgendermaßen aussprechen: Die Brennstrahlen eines beliebigen Punktes und die Kurven-Tangenten aus diesem Punkte haben ein gemeinsames Paar Winkelhalbierende, nämlich q_1 q_2. Bei der Ellipse tritt diese Erscheinung stets in der Lagebeziehung der Fig. 97 auf; bei der Parabel ändert sich daran bloß, daß die Richtung des einen Brennstrahles stets der Axe parallel läuft; es bleibt aber gemeinsam mit der Ellipse die Größenbeziehung, daß die Brennstrahlen den kleineren, die Tangenten den größeren Winkel bilden. Bei der Hyperbel dagegen bilden Tangenten an getrennte Aeste den kleineren Winkel, während Tangenten an den gleichen Ast gemeinsame Winkelhalbierende mit dem Nebenwinkel der Brennstrahlen aufweisen.

Erkl. 323. In Fig. 97 kommt erstmals die Polare des Brennpunktes, also die Leitgerade der Kurve in der Beweisführung vor; dieselbe hat so wichtige Beziehungen zur Kurve, daß sie in der folgenden Antwort noch besonders behandelt wird. Man hat damit an Fig. 97 dieselbe Schlußfolge, welche bereits durch Satz 8 festgelegt war, nämlich XY Polare von Q, f Polare von F, folglich FQ oder d Polare des Schnittpunktes D von f und XY, und weiter DF oder k Polare des Schnittpunktes K von d und f. Auch ließe sich schließen, daß DQ die Polare des Schnittpunktes von d mit XY sein muß. Dieselbe Schlußfolge gilt selbstverständlich auch, wenn zu XY als Polare von Q die andere Leitgrade f′ als Polare von F′ hinzukommt. Dann wird F′Q oder d′

4) Nimmt man zu den beiden Tangenten x und y in den Kurvenpunkten X und Y eine beliebige dritte Tangente z im Punkt Z hinzu (Fig. 98), so liefert das letztgenannte Ergebnis einerseits für die Tangenten x und z, deren Schnittpunkt U sei, die Beziehung $XFU = UFZ = \frac{XFZ}{2}$, andererseits für die Tangenten z und y, deren Schnittpunkt V sei, die Beziehung $ZFV = VFY = \frac{ZFY}{2}$. Also entsteht durch Addition beider Gleichungen $UFV = UFZ + ZFV = \frac{XFY + ZFY}{2} = \frac{XFY}{2} = XFQ = QFY$. Nun behält aber jede der drei zuletzt stehenden Winkelgrößen ihren Wert unverändert bei, welche Lage auch dem Punkte Z bezw. der beliebig gewählten Tangente z zukommt. Folglich bleibt auch der Winkel UFV stets von gleicher Größe für jede Lage, die man der veränderlich gedachten Tangente z geben mag. Dies ergibt die weitere Tatsache:

Satz 34. Die von zwei festen Tangenten einer Kurve auf einer veränderlichen dritten Tangente ausgeschnittene Strecke wird aus jedem Kurvenbrennpunkt stets unter demselben Winkel gesehen, nämlich wie die Strecke zwischen Schnittpunkt und Berührungspunkt auf jeder der beiden festen Tangenten.

5) Da man von früher weiß, daß die von der veränderlichen Tangente z auf den zwei festen Tangenten x und y als Trägern ausgeschnittenen Punkte U und V je die zugeordneten Punkte zweier projektivischen Punktreihen durchlaufen, so nimmt der vorige Satz noch folgende Gestalt an:

Satz 34a. Die projektivischen Punktreihen, welche auf irgend

Polare von D′, D′F′ oder k′ Polare von K′ bezw. D′Q Polare des Schnittpunktes von d′ mit XY. Ferner sind auf jeder Sekante durch einen Polpunkt vier harmonische Punkte gebildet durch die Kurvenschnittpunkte nebst Pol und Polarenschnittpunkt, also auf QF, auf KF, auf DF, auf DX, und ebenso auf QF′, K′F′, D′F′, D′Y. Sind nun unter den Projektionsstrahlen eines Brennpunktes nach solchen vier harmonischen Punkten zwei zugeordnete konjugierte Strahlen, so sind diese senkrecht und folglich Winkelhalbierende.

zwei festen Tangenten einer Kurve durch alle übrigen Tangenten der Kurve ausgeschnitten werden, werden aus jedem Kurvenbrennpunkte durch zwei vereinigt liegende kongruente gleichlaufende Strahlenbüschel projiciert.

Erkl. 324. Die Winkel XFY bezw. XF′Y in Fig. 97 welche durch den Strahl FQ bezw. F′Q halbiert werden, sind desto spitzer, je stumpfer der Tangentenwinkel, und desto größer je kleiner der Tangentenwinkel. Dabei kann der Winkel am Brennpunkt auch zu einem überstumpfen werden, also größer als 180^0, während die entsprechenden Verbindungsgraden des Kurvenmittelpunktes nur bis zur Grenze 180^0 beim Durchmesser gelangen. Bei der Hyperbel ist für Tangenten an getrennten Aesten FQ stets Halbierungsgrade des Nebenwinkels von XFY bezw. XF′Y, deshalb wird in Satz 33 der unbestimmte Artikel „ein Halbierungstrahl“ gesetzt statt des bestimmten. Die ausgesagte Eigenschaft ist beim Kreis eine selbstverständliche Beziehung des Mittelpunktes zu zwei Tangenten. Man sieht, daß diese Eigenschaft bei den allgemeinen Kurven dem Mittelpunkt abgeht und auf die Brennpunkte sich überträgt, man kann also sagen, daß sie auch beim Kreis dem Mittelpunkt eben in seiner Eigenschaft als Brennpunkt des Kreises zukommt.

Erkl. 325. Auch eine Eigentümlichkeit der Brennpunkte, welche im Satz 34 ausgesprochen ist, tritt beim Kreis als bekannte Eigenschaft des Mittelpunktes auf (vergl. Erkl. 159 des II. Teiles dieses Lehrbuches). Und in Fig. 79 erscheint ebenfalls wie beim Kreise das Ueberspringen aus dem Wert des Winkels in den Supplementwinkel, wenn die veränderliche Tangente längs der Kurve durch die Parallellage zu einer der festen Tangenten hindurch bewegt wird. Will man also den Satz 34 im Wortlaut des Satzes 33 aussprechen, so würde man auch wieder den konstanten Winkel gleichzusetzen haben „einem der Winkel“ der Sehstrahlen nach Berührungspunkt und Tangentenschnittpunkt. Bei den allgemeinen Kurven kommt diese Eigenschaft nicht dem Mittelpunkt, wohl aber jedem der beiden Brennpunkte zu, indem die Beweisführung im ersten Teile obiger Antwort genau ebenso mit Vertauschung der Buchstaben F und F′ giltig bleibt. Dabei braucht aber keineswegs der konstante Winkel UFV an einem Brennpunkt denselben Wert zu haben, wie der konstante Winkel UF′V am andern Brennpunkt, vielmehr wird dies nur dann zutreffen, wenn etwa auch XFQ = XF′Q bezw. QFY = QF′Y wäre. Zur Herbeiführung dieser Beziehung müßten F und F′ die Scheitel gleicher Peripheriewinkel über den Sehnen QX bezw. QY sein. Man kann also umgekehrt feststellen, daß wenn man in zwei Kurvenpunkten XY, welche mit dem Brennpunkte auf einem Kreise liegen, Tangenten zieht, dann der Schnittpunkt der letzteren auf demselben Kreise liegen muß.

Erkl. 326. Dem Satz 34 kann man auch andern Ausdruck geben, indem man den konstanten Winkel XFQ = UZV = QFY sich um den Punkt F drehen läßt. Dadurch entstehen auf x und y die Schnittpunkte U und V der veränderlichen Tangente, und man erhält den

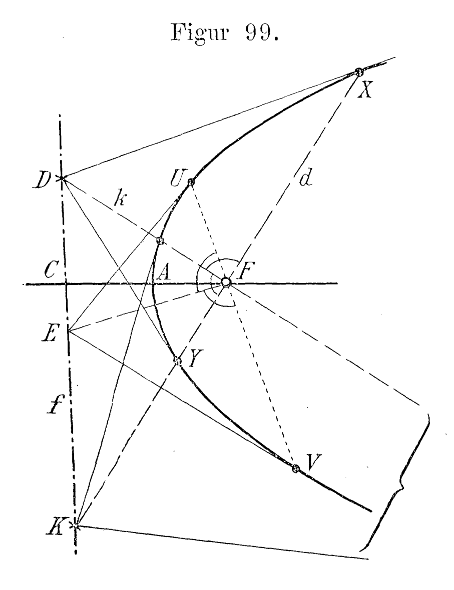
Satz 34b. Läßt man einen Winkel von unveränderlicher Größe sich um einen festen Scheitel F drehen und bringt seine Schenkel in jeder Lage zum Schnitt mit zwei festliegenden Graden x und y, so liefern die Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte U und V die Tangenten einer Kurve

zweiten Grades, welche die festen Geraden x und y als Tangenten und den festen Punkt F als Brennpunkt hat. — Dies läßt sich auch ohne Berufung auf Satz 34 beweisen, indem man bedenkt, daß die Schenkel des gedrehten Winkels zwei kongruente Strahlbüschel beschreiben, folglich auf x und y als Trägern zwei projektivische Punktreihen ausschneiden. Die Verbindungsgraden entsprechender Punkte müssen also eine Kurve zweiten Grades umhüllen. Würden Tangenten dieser Kurve durch den Winkelscheitel F gehen, so wären sie Doppelstrahlen jener Strahlenbüschel. Nun haben aber die zwei kongruenten Strahlenbüschel bloß zwei imaginäre Doppelstrahlen, welche nach den imaginären Kreispunkten der absoluten Involution auf der unendlich fernen Geraden gehen, folglich ist F Schnittpunkt der Tangenten letztgenannter Art und folglich Brennpunkt der Kurve.

Erkl. 327. Auch Satz 34a gibt der erörterten Eigenschaft der Brennpunkte einen Ausdruck, welcher für den Kreismittelpunkt bereits im Satz 20 des zweiten Teiles festgestellt wurde und hier für die Kurvenbrennpunkte wiederholt auftritt. Man kann also auch unmittelbar an die ursprüngliche Erzeugung einer Kurve durch zwei projektivische Punktreihen anknüpfen und die Tatsache aufstellen: Es gibt für zwei auf zwei Trägern gegebene projektivische Punktreihen im allgemeinen stets zwei Punkte, aus welchen diese beiden Punktreihen durch vereinigt liegende kongruente gleichlaufende Strahlenbüschel projiciert werden. Diese Punkte sind die Brennpunkte der eingehüllten Kurve. Liegt der eine Punkt im Unendlichen, was bei ähnlichen Punktreihen eintreten muß, so ist die Kurve Parabel; fallen die beiden Punkte in einen einzigen zusammen, so ist die Kurve ein Kreis um diesen einen Punkt als Mittelpunkt.

Frage 79. Welche Eigenschaften der Kurven ergeben sich aus den Beziehungen von Brennpunkt und Leitgerade?

Figur 99.



Erkl. 328. Da die Ellipse und Hyperbel zwei Brennpunkte haben, so

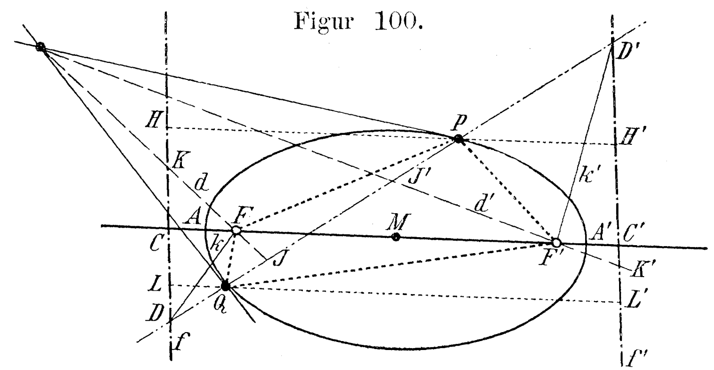
Antwort. 1) Da die Leitgerade die Polare des Brennpunktes ist, welch letzterer auf der Axe liegt, so muß sie durch den Pol dieser Axe gehen, also auf der Axe senkrecht stehen. Ferner muß die Polare jedes Punktes der Leitgraden f durch den Brennpunkt F gehen; zieht man also von einem Punkte D auf f (Fig. 99) die Tangenten an die Kurve, so muß deren Berührungssehne d Kurven-Sekante durch den Brennpunkt F sein. Bezeichnet man wie in Fig. 97 ihren Schnittpunkt mit der Leitgeraden durch K, so hat man wieder die Schlußfolge: f Polare von F, und d Polare von D, folglich Verbindungsgrade DF oder k Polare des Schnittpunktes (df) oder K. Von den beiden Graden d und k geht aber wieder jede durch den Pol der andern, folglich sind sie konjugierte Strahlen des Brennpunktes und stehen senkrecht aufeinander. Danach muß der

haben sie auch zwei Leitgeraden, und da die Brennpunkte samt den ganzen Kurven symmetrisch zur kleinen Axe liegen, so müssen auch beide Leitgeraden symmetrisch zu derselben liegen, also parallel zur kleinen Axe im gleichen Abstande beiderseits des Kurven-Mittelpunktes senkrecht auf der Hauptaxe stehen. Und zwar ist der Fußpunkt C vierter harmonischer zum Brennpunkt und der Axenscheiteln, also $MA^2 = MF \cdot MC$ oder $MC = \frac{a^2}{e}$, und entweder $MC > a > e$ bei der Ellipse oder $MC < a < e$ bei der Hyperbel. Die Parabel hat nur einen Brennpunkt, also auch nur eine Leitgerade im endlichen. Der andere Brennpunkt der Parabel ist ihr unendlich ferner Berührungspunkt, also wäre auch die unendlich ferne Tangente als dessen Polare als zweite Leitgerade der Parabel zu betrachten. — Da bei allen drei Kurven die Brennpunkte unbedingt Punkte innerhalb der Kurve sein müssen, so können die Leitgeraden auch nur außerhalb der Kurve verlaufen, müssen also bei Ellipse und Parabel außerhalb der Wölbungen der Kurve liegen, bei der Hyperbel zwischen den Kurvenscheiteln hindurchgehen, und zwar in einem Abstande vom Brennpunkte, welcher mit q bezeichnet sei. Nach dem vorigen ist also $FC = q$ und zwar für die Ellipse (Fig. 100) $q = MC - MF = \frac{a^2}{e} - e = \frac{a^2 - e^2}{e}$, bezw. für die Hyperbel (Fig. 101) $q = MF - MC = \frac{e^2 - a^2}{e}$.

Winkel $DFX = DFY$ oder $EFU = EFV$ stets 90^0 sein. Man erhält also als erste Beziehung zwischen Brennpunkt und Leitgerade:

Satz 35. Die Strecke einer beliebigen Tangente zwischen ihrem Berührungspunkt und ihrem Schnittpunkt mit einer Leitgeraden wird von dem zugehörigen Brennpunkt unter einem rechten Winkel gesehen.

Figur 100.



2) Zieht man in zwei beliebigen Kurvenpunkten, wie X und Y der Fig. 97, 98 oder P, Q der Fig. 100 und 101 die Tangenten an die Kurve und bringt die Sehnen dieser Berührungspunkte zum Schnitt mit den Leitgeraden, so werden nach der wiederholten Schlußweise dieser und der vorigen Antwort die Strahlen d und k senkrechte zugeordnete harmonische zu den Strahlen FP und FQ. Demnach werden für das Dreieck FPQ die Strahlen d und k zu Halbierungsgraden des Innen- und Außenwinkels an der Spitze F, sie teilen also nach dem Satze von Apollonius die Grundseite PQ dieses Dreiecks innen und außen im gleichen Verhältnisse, nämlich im Verhältnis der anstoßenden Dreiecksseiten. Man hat demnach in Fig. 100 und 101 sowohl für den Brennpunkt F mit d, k, D, K als auch für den Brennpunkt F' mit d', k', D', K': $FP : FQ = PJ : JQ = PD : QD$. Fällt man noch von P und Q die Senkrechten PH und QL auf die Leit-

Erkl. 329. Der Kurvenbogen der Fig. 99 kann als Bogen einer Ellipse oder Hyperbel oder Parabel angesehen werden. Jedesmal muß der Winkel DFK und sein Nebenwinkel ein rechter sein. Da diese Punkte DFK ein Polardreieck der Kurve bilden, so kann man das Ergebnis des Satzes 35 auch in der Form aussprechen: Jedes Polardreieck einer Kurve, dessen eine Ecke in einem Brennpunkt liegt, hat beide anderen Eckpunkte auf der zugehörigen Leitgeraden und hat am Brennpunkte einen rechten Winkel.

Erkl. 330. Ebenso wie Fig. 99 zur Beweisführung des Satzes 35 sowohl für den Bogen einer Ellipse als einer Hyperbel oder Parabel Geltung besitzt, geradeso ist auch in Fig. 100 die Darstellung für den einen Brennpunkt F und seine Leitgerade in der Durchführung nebenstehender Antwort völlig gleichwertig. Man kann eine Sekante PQ zweier beliebigen Kurvenpunkte einlegen in den Bogen einer Ellipse oder Parabel bezw. in den einen Ast einer Hyperbel. Nur die Beziehung zum zweiten Brennpunkt F′ geht in der figürlichen Darstellung auseinander, indem für die Ellipse stets dessen Lage wie in der Fig. 100 auftritt, für die Parabel dagegen der zweite Brennpunkt ins Unendliche zu verlegen ist, und für die Hyperbel links außerhalb CAF. Für diese Fälle wird also die Durchführung des nebenstehenden Beweises mit den gestrichenen Buchstaben in der Figur, nicht aber im Texte, etwas Aenderung zu erfahren haben. Eine weitere Abweichung erhält man in dem Falle, daß bei einer Hyperbel die Kurven-Punkte PQ der gewählten Sehne den getrennten Aesten angehören. Dieser Fall ist in Fig. 101 dargestellt. Und beide Zeichnungen können wieder in der Weise abgeändert werden, daß die Sehne PQ die Strecke der Brennpunkte innen oder außen trifft.

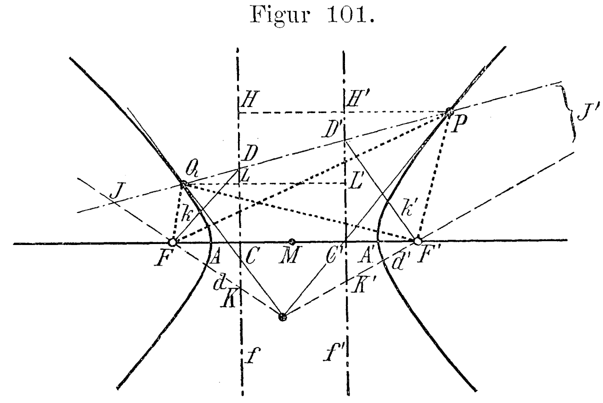
Erkl. 331. In Antwort der Figur 56 und Erkl. 134 des fünften Teiles, sowie in Antwort der Frage 46 und Erkl. 122 des sechsten Teiles der Planimetrie war der durch den Mathematiker Apol-

gerade f, so folgt weiter wegen der ähnlichen Dreiecke DPH ∼ DQL, daß DP : DQ = PH : QL. Demnach wird der vorstehende Quotient FP : FQ = PH : QL, und mit Vertauschung der Innenglieder entsteht FP : PH = FQ : QL bezw. F′P : PH′ = F′Q : QL′.

3) Nun sind aber die Punkte P und Q ganz beliebig ausgewählte Kurvenpunkte, folglich gelten die beiden Gleichheiten obiger Streckenverhältnisse für sämtliche Kurvenpunkte, die beiderlei Verhältnisse haben einen konstanten Wert für alle Kurvenpunkte. Es wird insbesondere für den Scheitel A oder A′ das erste = FA : AC = FA′ : A′C, das zweite = F′A : AC′ = F′A′ : A′C′. Demnach sind aber wegen der Symmetrie der Kurve zur Nebenaxe beide Verhältniswerte von gleicher Größe. Man bezeichnet diese Größe als die numerische Excentricität mit dem Buchstaben ε und erkennt als ihren Wert das Teilungsverhältnis, nach welchem die Strecke FC innen durch den einen, außen durch den andern Kurvenscheitel A bezw. A′ geteilt wird. Nun liegt bei der Parabel der äußere Scheitel im unendlichen, also der andere in der Mitte von FC, und es ist hier das Teilungsverhältnis gleich 1; bei der Ellipse liegt der äußere Scheitel auf der Seite von FC außerhalb F, folglich ist hier FA′ < A′C, daher auch FA < AC, also $\varepsilon < 1$; bei der Hyperbel liegt der äußere Scheitel auf der Seite von FC außerhalb C, folglich FA′ > A′C, daher auch FA > FC, also $\varepsilon > 1$. Dadurch entsteht das wichtige Ergebnis:

Satz 36. Bei jeder Kurve zweiten Grades haben die Abstandsstrecken eines beliebigen Kurvenpunktes von jedem Brennpunkt und dessen Polare, der Leitgeraden, einen konstanten Verhältniswert, welcher bei der Ellipse kleiner, bei der Parabel gleich und bei der Hyperbel größer als die Einheit ist, nämlich jedesmal gleich

Figur 101.



lonius besonders bedeutsam gewordene Satz nachgewiesen worden, daß die Halbierungsgeraden des Innen- und Außenwinkels eines Dreiecks die Gegenseite innen und außen im gleichen Verhältnis teilen, nämlich im Verhältnis der an die Abschnitte anstoßenden Dreiecksseiten. Nun wird in Fig. 100 im Dreieck PQF der Innenwinkel halbiert durch d, der Außenwinkel an F durch k, weil k ⊥ d; und ebenso im Dreieck PQF' der Innenwinkel bei F' durch d', der Außenwinkel durch k'. In Fig. 101 wird im Dreieck PFQ der Innenwinkel bei F halbiert durch k, der Außenwinkel durch d, und im Dreieck PF'Q der Innenwinkel bei F' durch k', der Außenwinkel durch d'. Daraus folgt jedesmal mit und ohne gestrichene Buchstaben die Proportion PF:FQ = PD:DQ = PJ:JQ.

Erkl. 332. Die ähnlichen Dreiecke, welche gebildet werden von der Leitgeraden, der Kurvensekante und den senkrechten Abständen PH, QL bezw. PH', QL' der Kurvenpunkte von den Leitgeraden, haben jedesmal auf der Sehne die Seiten-Strecken DP und DQ bezw. D'P und D'Q, auf den Leitgeraden die Seitenstrecken DH und DL bezw. D'H' und D' L'. In Fig. 100 haben diese Dreiecke den Winkel LDQ bezw. H'D'P gemeinsam, in Fig. 101 sind die Winkel PDH und QDL bezw. PD'H' und QD'L' als Scheitelwinkel gleichgroß.

der numerischen Excentricität der Kurve oder dem Quotienten der linearen Excentricität und der halben Hauptaxe.

4) Faßt man dieses Verhältnis für beide Brennpunkte zusammen, so wird für einen beliebigen Kurvenpunkt P einer Ellipse oder Hyperbel: $FP = \varepsilon \cdot PH$ bezw. $F'P = \varepsilon \cdot PH'$, also auch $FP \pm F'P = \varepsilon (PH \pm PH')$. Nun ist aber bei der Ellipse $PH + PH'$ gleich dem festen Abstand $HH' = CC'$ der beiden Leitgeraden, also hier $FP + F'P$ von konstanter Größe. Und bei der Hyperbel ist $PH - PH'$ gleich dem festen Abstand $HH' = CC'$ der bedeni Leitgeraden, also hier $FP - F'P$ von konstanter Größe. Setzt man dafür in Fig. 100: $FA + AF' = F'A' + AF' = AA'$ und in Fig. 101: $FA' - A'F' = FA' - FA = AA'$, so entsteht beidemale der Wert 2a, also gilt der Satz:

Satz 37. Die Abstandsstrecken eines beliebigen Kurvenpunktes von den beiden Brennpunkten haben bei der Ellipse konstante Summe, bei der Hyperbel konstante Differenz, nämlich jedesmal gleich der Hauptaxe.

Erkl. 333. Da die Kurvenpunkte P und Q ganz beliebig ausgewählte Punkte waren, so muß der Quotient FP:PH denselben Wert behalten, welche Lage man auch der Sekante PQ geben mag. Legt man z. B. die Sehne durch die Punkte

P und A, so wird also insbesondere auch FP:FA = PH:AC, folglich FP:PH = FA:AC. Und legt man die Sehne durch die Punkte P und A′, so wird für den Brennpunkt F′ entstehen F′P:F′A′ = PH′:A′C′, folglich F′P:PH′ = F′A′:A′C′. Während man also zunächst glauben könnte, daß für die Abstandsstrecken der Kurvenpunkte vom einen Brennpunkt und dessen Leitgerade einerseits ein festes Verhältnis bestände, und für die Abstandsstrecken der Kurvenpunkte vom anderen Brennpunkt und dessen Leitgrade wieder ein festes Verhältnis von anderem Werte bestände, so zeigt sich aus den zuletzt gefundenen symmetrisch gleichen Verhältnisgrößen, daß dieser Wert für beide Brennpunkte derselbe bleibt, daß also jedesmal auch FP:PH = F′P:PH′ = ε.

Erkl. 334. Um den wirklichen Wert dieser Verhältnisgröße zu bestimmen, hat man zu beachten, daß FA:AC das Teilungsverhältnis ist, in welchem die Strecke FC durch den Punkt A geteilt wird. Nun sind aber CFAA′ vier harmonische Punkte, also teilen A und A′ die Strecke CF innen und außen im gleichen Verhältnis, und die Lage des Punktes A′ zur Strecke CF gibt leicht an, ob das Teilungsverhältnis kleiner, gleich oder größer als 1 ist. Diese Beziehung erleichtert dem Gedächtnis die Verknüpfung mit jeder der drei Kurven, indem für die Ellipse (vom griechischen ἐνλείπω = weglassen) ein Wert unter eins, für die Parabel (παραβάλλω = gleichsetzen) gleich eins und für die Hyperbel (ὑπερβάλλω = übertreffen) über eins entsteht. (Dagegen kommt das Wort Ekliptik von ἐκλείπω = auslassen.) Die Bezeichnung der Größe ε als numerische Excentricität rührt daher, daß für Ellipse und Hyperbel ε in Bruchteilen der Halbaxe a den Längenwert der Strecke MF angibt, welcher als lineare Excentricität bezeichnet wird. Vergleiche die folgende Erklärung 335.

Erkl. 335. In der Ellipse Fig. 100 ist bezeichnet AA′ = 2a, FF′ = 2e, FC = F′C′ = q, MC = e + q, also FA = a — e, AC = q — (a — e). Man hat also für den Scheitel A $\varepsilon = FA:AC = \frac{a+e}{q+(a+e)}$. Und da CFAA′ vier harmonische Punkte sind, wird $MA^2 = MF.\,MC$ oder $a^2 = e\,(e+q)$, also $q = \frac{a^2 - e^2}{e}$, und durch Einsetzung in den vorigen Ausdruck $\varepsilon = \frac{(a+e)\,e}{(a^2-e^2)+(a+e)\,e} = \frac{e}{a-e+e} = \frac{e}{a}$, oder $e = \varepsilon \cdot a$. Ebenso wird für die Hyperbel Fig. 101 AA′ = 2a, FF′ = 2e, FC = F′C′ = q, FA = e — a, AC = q — (e — a), MC = MF — FC = e — q. Also werden für den Scheitel A $\varepsilon = FA:AC = \frac{e-a}{q-(e-a)}$ und $a^2 = e\,(e-q)$, $q = \frac{e^2-a^2}{e}$, $\varepsilon = \frac{(e-a)\,e}{(e^2-a^2)-e\,(e-a)} = \frac{e}{a}$, oder $e = \varepsilon \cdot a$. Für die Parabel wird CA = AF = $^1/_2$q, $\varepsilon = 1$.

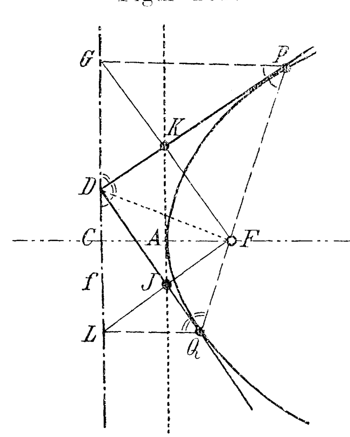
Erkl. 336. Für die Ellipse ist FP — F′P = ε(PH — PH′) zwar ebenfalls eine feststehende Beziehung; da aber beide Seiten keinen konstanten Wert aufweisen, so ist diese Beziehung nicht von besonderem Werte. Ebenso FP + F′P = ε (PH + PH′) bei der Hyperbel. Aber für die Ellipse ist PH + PH′ = CC′ = 2 (e + q) also FP + F′P = 2 ε (e + q) = 2a, und für die Hyperbel PH — PH′ = CC′ = 2 ε (e — q) = 2a jedesmal konstant, also von wesentlicher Bedeutung. Die hieraus zu entnehmenden Werte für ε, nämlich für die Ellipse $\varepsilon = \frac{a}{e+q}$, für die Hyperbel $\varepsilon = \frac{a}{e-q}$ ergeben sich auch direkt an der Figur, wenn man ε für den Scheitel der kleinen Ellipsenaxe ansetzt, deren Abstand von F gleich a, von f gleich e + q ist.

Erkl. 337. Die in den Sätzen 36 und 37 niedergelegten Eigenschaften der Kurven zweiten Grades sind jene grundlegenden Beziehungen, welche in der messenden Planimetrie zum Ausgangspunkt der Behandlung der Kegelschnitte ge-

macht werden. Man erkennt daß — sobald man sich in der projektivischen Geometrie dazu bequemen will, jene metrische Schlußfolge aufzunehmen — alsbald ebenfalls diese metrischen Beziehungen der Kurven erhalten werden können, und zwar als Ausdruck der Maßeigenschaften der orthogonalen Strahleninvolution der Brennpunkte. Bemerkt sei noch, daß Satz 37 für die Parabel nur deswegen ausfällt, weil dieselbe ebenso wie in Satz 36 eine Zwischenstufe darstellt. Wie nämlich zwischen $\varepsilon > 1$ und $\varepsilon < 1$ der Zwischenwert für die Parabel $\varepsilon = 1$ wird, so fallen die Werte von $FP + F'P$ und $FP - F'P$ für die Parabel zusammen, weil eben der eine Brennpunkt unendlich fernliegt, sodaß Addition oder Subtraktion des endlichen Wertes $F'P$ zum unendlich großen FP keine Aenderung bewirkt. Man kann also der Parabel die Eigenschaft zuschreiben, daß sowohl Summe als Differenz der Fahrstrahlen eines Kurvenpunktes von ihren beiden Brennpunkten konstanten Wert haben, nämlich einen unendlich großen.

Frage 80. Wie findet man Punkte, denen inbezug auf eine Kurve zweiten Grades eine gleichseitig hyperbolische Strahleninvolution der konjugierten Geraden zugehört?

Figur 102.



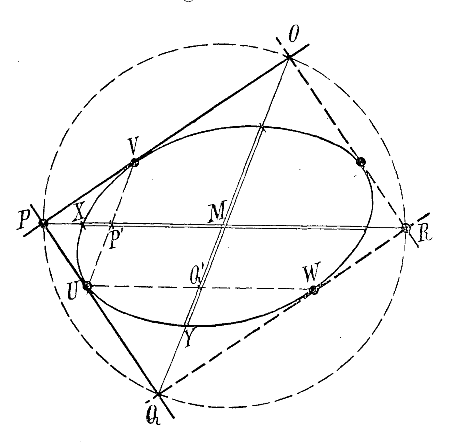
Erkl. 338. Für die Leitgerade der Parabel erhält man im nebenstehenden eine Eigenschaft, welche bei Ellipse und Hyperbel nicht einer Geraden, sondern einem Kreis zukommt. Aus diesem Grunde wird auch dieser Kreis bei den anderen Kurven als Leitkreis oder Direktorkreis oder Leitlinie im weiteren Sinne bezeichnet. Uebereinstimmung beider Anschauungen erhält man aber befriedigend dadurch, daß man die Leitgerade der Parabel als Kreis mit unendlich großem Radius betrachtet, indem man den Mittelpunkt dieses Kreises ebenso wie den Mittelpunkt und den zweiten

Antwort. 1) Punkte der Ebene, welchen in Bezug auf eine Kurve zweiten Grades eine gleichseitig hyperbolische Strahleninvolution der konjugierten Graden zugehört müssen zwei senkrechte Tangenten an die Kurve besitzen, also jedenfalls außerhalb der Kurve liegen. Solches findet sich am einfachsten bei der Parabel. Denn in Fig. 99 und 102 ist für die vom Punkte D der Leitgrade f ausgehenden Tangenten DP und DQ mit Berührungssehne PQ nach Satz 36 $FP = PG$ und $FQ = QL$, und nach Satz 33 werden die Winkel bei P und Q durch DP und DQ halbiert, folglich sind sowohl einerseits P und D Punkte auf der Mittelsenkrechten von FG, als anderseits Q und D Punkte der Mittelsenkrechten von FL. Daraus folgt aber die Gleichheit der Winkel $PDG = PDF = \frac{1}{2} FDG$ und $QDL = QDF = \frac{1}{2} FDL$, und da die ganzen Winkel einen gestreckten Winkel bilden, so bilden die Hälften einen rechten. Demnach sind für die Parabel je zwei von der Leitgeraden ausgehende Tangenten aufeinander senkrecht, die Leitgerade ist zugleich Leitlinie im weiteren Sinne.

2) Für die Ellipse sei Punkt P in Fig. 103 ein Punkt mit zwei senkrechten Tangenten PU und PV. Dann muß wegen der schiefen Symmetrie der auf dem Durch-

Brennpunkt der Parabel unendlich weit fortgerückt denkt. Die gleiche Ueberlegung gilt für den Punkt G in seiner Eigenschaft als Gegenpunkt des Brennpunktes F zur Tangente PD. Auch diese Punkte liegen für die Parabel auf der Leitgeraden, für die Ellipse und Hyperbel auf einem Kreis um den andern Brennpunkt. Und in ähnlicher Weise liegt auch der Fußpunkt K der Senkrechten FK zur Tangente PD für die Parabel auf der Scheiteltangente AK, für Ellipse und Hyperbel dagegen auf einem Kreis um den Kurven-Mittelpunkt. Vergl. Aufgabe 217 und 218 und Fig. 168 und 169.

Figur 103.



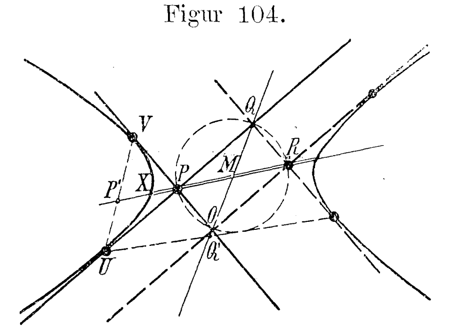
Erkl. 339. In Fig. 103 und 104 hat man durch Punkt P zwei senkrechte Tangenten an die Kurve. Denkt man sich die ganze Figur jeweils um 180° gedreht, so muß wegen der Symmetrie der Punkt P in den Punkt R und jede Tangente wieder in eine Tangente der Kurve zu liegen kommen. Von dem so entstehenden Tangentenrechteck müssen aber nach Satz 16 die Diagonalen in die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser fallen, und nach dem Satz von Brianchon müssen die Verbindungsgraden der Berührungspunkte UV bezw. UW die unendlich ferne Diagonale des umgeschriebenen Parallelogramms im gleichen Punkte treffen, wie die Diagonale QO bezw. PR. Auch kann man dieselbe Beziehung daher ableiten,

messer PM im gleichen Abstande liegende Punkt R ebenfalls zwei senkrechte Tangenten an die Kurve liefern, und man erhält das umgeschriebene Tangentenrechteck PQRO, dessen Mittelpunkt M, und dessen Diagonalen die auf konjugierten Durchmessern liegenden gleichen Strecken PR und OQ sind. Parallel zu diesen konjugierten Durchmessern laufen die Berührungssehnen UV und UW zu P und Q, und als Polaren von P und Q schneiden sie auf PM und QM die vierten harmonischen Punkte P' bezw. Q' zu P, Q und den Kurvenschnittpunkten der beiden konjugierten Durchmesser aus. Demnach ist $\overline{MX}^2 = MP \cdot MP'$ und $\overline{MY}^2 = MQ \cdot MQ'$. Berücksichtigt man, daß hierin $MQ = MP$, und daß das Dreieck PP'U ebenso wie PMQ gleichschenklig ist, also $MQ' = P'U = P'P$, so wird $\overline{MY}^2 = MP \cdot PP'$. Folglich wird $\overline{MX}^2 + \overline{MY}^2 = MP\,(MP' + P'P) = \overline{MP}^2 = \overline{MQ}^2$. Nun ist $\overline{MX}^2 + \overline{MY}^2$, die Summe der Quadrate zweier konjugierten Ellipsendurchmesser, nach Satz γ der Aufgabe 214 der Aufgabensammlung am Schluß dieses Teiles eine konstante Größe, nämlich gleich $a^2 + b^2$, also ist auch MP eine konstante Strecke, und folglich haben alle Punkte P, deren Tangenten an die Ellipse einen rechten Winkel bilden, denselben Abstand $\sqrt{a^2 + b^2}$ vom Kurvenmittelpunkte.

3) Ist für die Hyperbel (Fig. 104) wieder P ein Punkt, dessen Tangenten $PU \perp PV$, so entsteht wieder das Tangentenrechteck PQRO mit konjugierten Durchmessern MP und MQ und mit den Beziehungen $\overline{MX}^2 = MP \cdot MP'$ und $\overline{MY}^2 = MQ \cdot MQ'$, letzteres absolut genommen, also ohne Rücksicht aufs Vorzeichen, weil hier MQ und MQ' entgegengesetzte Richtung haben müssen. Hier ist wieder $MQ = MP$, und in dem eben-

daß UV als Polare von P durch den Pol des durch P gehenden Durchmessers PM gehen muß, also durch den unendlich fernen Punkt des konjugierten Durchmessers MO. Daß das Produkt MP $\cdot$MP′ gleich dem Quadrat $\overline{MX}^2$ ist, kann ebenfalls auf zweifache Weise erkannt werden. Entweder als Eigenschaft der harmonischen Punkte auf dem Durchmesser PXM, oder als metrischer Ausdruck der auf demselben Durchmesser PM entstehenden Involution der konjugierten Punkte. Denn da P und P′ polar konjugierte Punkte sind, und M Mittelpunkt, X Ordnungspunkt dieser Involution ist, so hat man auch auf Grund dieser Ueberlegung $\overline{MX}^2 = MP \cdot MP'$.

Figur 104.



Erkl. 340. Während der Inhalt der vorigen Erklärung für beiderlei Figuren 103 und 104 gleicherweise Geltung besitzt, hat man in Fig. 104 den Unterschied zu beachten, daß zwar MP und MP′ gleichgerichtet, aber MQ und MQ′ entgegengesetzt gerichtet auf ihren jeweiligen Durchmessern liegen. Würde man die senkrechten Tangenten etwa aus dem Punkte O an die getrennten Aeste gezogen haben, so wäre der symmetrische Punkt Q, und zu dem nicht schneidenden Durchmesser MQ käme als konjugierter wieder ein schneidender Durchmesser MP. Man hat also auch hier jedesmal einen Durchmesser, dessen Involution Ordnungspunkte besitzt, und als konjugierten einen Durchmesser, dessen Involution keine Ordnungspunkte besitzt. Auf letzterem sind Y und Y′ nicht Kurvenschnittpunkte, sondern die Potenzpunkte der Involution, also zwei Punkte in beiderseits gleichem Abstand von M, so wie PMQ gleichschenkligen Dreieck PP′U auch PP′=P′U=MQ′, also $\overline{MY}^2 = MP \cdot PP'$, und daher diesmal $\overline{MX}^2 - \overline{MY}^2 = MP(MP' - PP') = \overline{MP}^2 = \overline{MQ}^2$. Nun ist $\overline{MX}^2 - MY^2$ die Differenz der Quadrate zweier konjugierten Hyperbel-Durchmesser, also nach Satz δ der obengenannten Aufgabe ebenfalls eine konstante Größe, nämlich gleich $a^2 - b^2$, also ist auch MP eine konstante Strecke, und auch alle Punkte, aus welchen senkrechte Tangenten an die Hyperbel gehen, haben denselben Abstand $\sqrt{a^2 - b^2}$ vom Kurvenmittelpunkt.

4) Während bei der Ellipse die Größe $\sqrt{a^2 + b^2}$ stets reellen Wert haben muß, so besteht bei der Hyperbel die Möglichkeit, daß $\sqrt{a^2 - b^2}$ einen verschwindenden oder imaginären Wert bekommt. Es muß also die Bedingung gestellt werden, daß $a > b$ oder mindestens $a = b$ wird. Da hiernach $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqq 1$ sein muß, so kann man auch sagen, der Winkel $\frac{\alpha}{2}$ dürfe nicht über 45°, also der Innenwinkel der Asymptoten nicht über 90° sein, damit rechtwinklige Tangenten möglich sind. Man erhält somit folgendes Ergebnis:

Satz 38. Die Punkte, deren konjugierte Strahlen eine gleichseitig hyperbolische Involution mit senkrechten Kurventangenten als Ordnungsstrahlen bilden, liegen alle in konstantem Abstande vom Kurvenmittelpunkte; sie erfüllen bei der Ellipse den Kreis mit Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$, bei der Parabel die Leitgerade, bei der Hyperbel den Kreis mit Radius $\sqrt{a^2 - b^2}$, sind also nur vorhanden bei solchen Hyperbeln, bei denen der Innenwinkel der Asymptoten nicht über 90° ist.

sodaß $MY \cdot MY' = -MY \cdot MY = -MY' \cdot MY'$. Man hat daher als Potenz der Involution auf dem nicht schneidenden Durchmesser die negative Größe $-\overline{MY}^2$ oder $-\overline{MY'}^2$. Die obenstehende Gleichung $\overline{MY}^2 = MQ \cdot MQ'$ will also hier nicht den Potenzwert dieser Involution angeben, sondern nur die Gleichheit der beiden Rechtecke aus den beiden gleichen Strecken MY und aus den zwei ungleichen Strecken MQ und MQ', oder was dasselbe heißt, aus den Strecken MP und PP'.

Erkl. 341. Für einen Kreis mit Radius r ist der geometrische Ort für den Scheitel eines Tangentenwinkels von 90^0 der koncentrische Kreis mit Radius $r\sqrt{2}$, denn $a = b = r$ liefert $\sqrt{a^2 + b^2} = r\sqrt{2}$. — Ist der Asymptotenwinkel einer Hyperbel ein rechter, also $\frac{\alpha}{2} = 45^0$ und $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$, so sind diese Asymptoten die einzigen senkrechten Tangenten an die Kurve, sodaß der Direktorkreis auf den Mittelpunkt zusammenschrumpft. In der Tat ist für die gleichseitige Hyperbel $b = a$, $\sqrt{a^2 - b^2} = 0$, der Kreis mit Radius Null ist der Mittelpunkt. Ist der Innenwinkel der Asymptoten $\alpha' > 90^0$, so gibt es aus dem Innenwinkelraum nur Tangenten mit Winkel über α', aus dem Nebenwinkelraum nur Tangenten mit Winkel unter $180 - \alpha'$, aber keine Tangenten mit Winkel zwischen α' und $180 - \alpha'$, also auch keine senkrechten Tangenten.

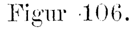
Aufgaben-Sammlung.

I. Aufgaben über Pol und Polare.

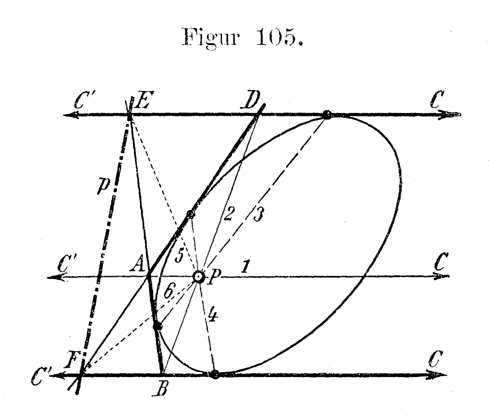
(Zu Abschnitt 1a—e.)

Aufgabe 1. Die Konstruktion des Poles P zu einer gegebenen Graden p soll für besondere Lagen der Punkte E und F auf p durchgeführt werden.

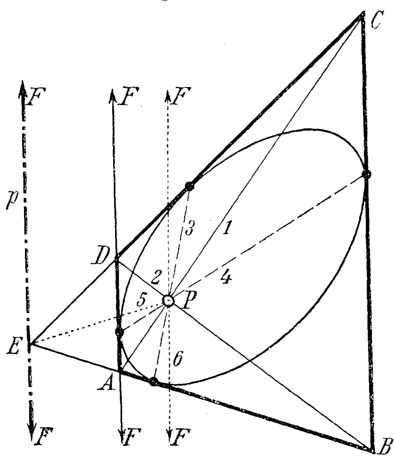
Auflösung 1) Liegt eine die Kurve nicht schneidende Grade p im endlichen, so können die beiden Punkte



Figur 105.

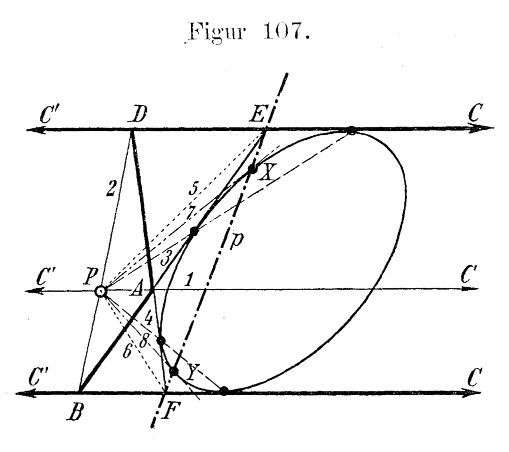


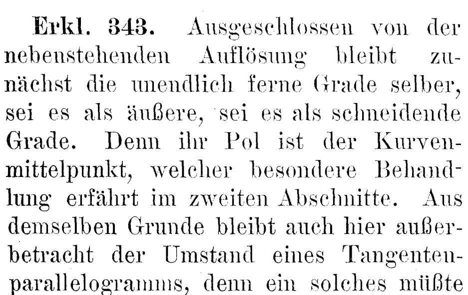
Figur 106.



Erkl. 342. Die Auffassung des im ersten Teile nebenstehender Auflösung beschriebenen Vierecks kann einzeln nachgesehen werden in Figur 9 des II. Teiles dieses Lehrbuches. Auch dort sieht man, daß das Viereck mit zwei parallelen benachbarten Seiten in der einen oder andern Richtung im unendlichen geschlossen werden kann. Dagegen hat das im zweiten Teile nebenstehender Auflösung entstehende einfache Viereck zwei parallele Gegenseiten, und deshalb keine Ecke im unendlichen; es wird zu einem einfachen Trapez, dessen Parallelseiten zur Polare p parallel sind. Man hat darin also vier parallele Gerade, AD, BC, 6 und p, welche vier harmonische sind, weil sie auf jeder Geraden durch Punkt E sowie auf den Diagonalen des Trapezes vier harmonische Punkte ausschneiden. Und entsprechend liefert Fig. 108 ein überschlagenes Trapez mit denselben vier parallelen harmonischen Geraden.

Figur 107.

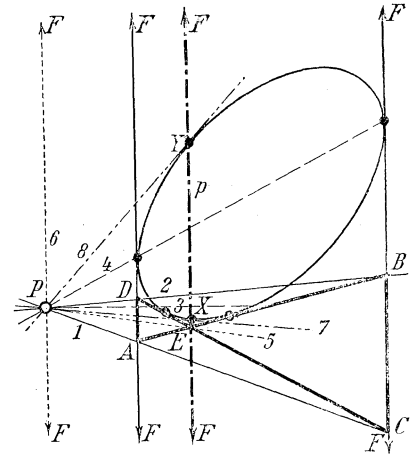



Erkl. 343. Ausgeschlossen von der nebenstehenden Auflösung bleibt zunächst die unendlich ferne Grade selber, sei es als äußere, sei es als schneidende Grade. Denn ihr Pol ist der Kurvenmittelpunkt, welcher besondere Behandlung erfährt im zweiten Abschnitte. Aus demselben Grunde bleibt auch hier außerbetracht der Umstand eines Tangentenparallelogramms, denn ein solches müßte

E und F so nahe beisammen oder so weit auseinander liegen, daß die äußere Tangente von E und die äußere von F einander auf der einen oder andern Seite von p bezw. der Kurve schneiden. Dann hat man die beiden Fälle, welche in Fig. 4b und 4a dargestellt sind. Als zwischenliegender Fall entsteht die Beziehung der Fig. 105, wobei die beiden Tangenten parallel werden. Man kann das einfache Vierseit nach links in C′ oder rechts in C im Unendlichen geschlossen denken, die Gerade 1 = AC wird jedenfalls auch parallel FB//ED, die übrigen Geraden 2 bis 5 verlaufen wie in Fig. 4a und 4b.

2) Rücken die Punkte EF noch weiter auseinander, so entsteht als zweiter Grenzfall derjenige, daß einer der Punkte E oder F selber zum unendlichfernen Punkt der

Figur 108.



Geraden p wird. (Fig. 106.) Dabei werden die Tangenten aus diesem Punkte F parallel, und ebenso die von F nach dem Punkte von Brianchon führende vierte harmonische Grade 6 = FP zu p und diesen Tangenten.

3) Liegt eine die Kurve schneidende Grade p im Endlichen, so

entweder zwei Eckpunkte auf der unendlich fernen Geraden haben oder zwei Eckpunkte auf einem Kurvendurchmesser, dessen Behandlung ebenfalls erst am genannten späteren Orte stattfindet. Daß beide Punkte E und F auf derselben Geraden unendlich fern fielen, wäre aber ebenso ausgeschlossen als das Zusammenfallen beider Punkte in einen Punkt im Endlichen. Auch die Lage der Polaren als Tangente der Kurve bleibt hier weg, da dieselbe bereits besonders erwähnt ist in Antwort auf Frage 9. — Weitere Fälle besonderer Art treten nicht auf, denn der erste und dritte sind die Zwischenfälle der Fig. 4a und b bezw. 5a und b, der zweite und vierte Grenzfall von 4b bezw. zwischen 5b und 5c; ein 4c besteht nicht, und 5c liefert nichts neues.

können die beiden Punkte E und F wiederum entweder so nahe bei der Kurve oder so fern auf deren beiden Seiten liegen, daß die äußeren Tangenten von E und F einander auf gleicher oder ungleicher Seite von p schneiden, wie die innern. Dann hat man die beiden Fälle, welche in Fig. 5a und b dargestellt sind. Als Zwischenfall entsteht die Beziehung der Fig. 107, wobei die äußeren Tangenten parallel werden. Das Viereck wird wegen paralleler Nachbarseiten zu derselben offenen Figur, welche im ersten Falle dieser Auflösung genannt und in Fig. 9 des II. Teiles dargestellt ist.

4) Der zweite Grenzfall bei der schneidenden Geraden ist der, daß einer der Punkte E oder F selbst unendlich fern liegt; dann entsteht (Fig. 108) ein überschlagenes Trapez, weil die parallelen Gegenseiten geschnitten werden von zwei Graden eines dazwischenliegenden Punktes E. In beiden letztgenanten Fällen gehen durch den Polpunkt die acht Graden 1 bis 8, wie in Fig. 5, a, b, c.

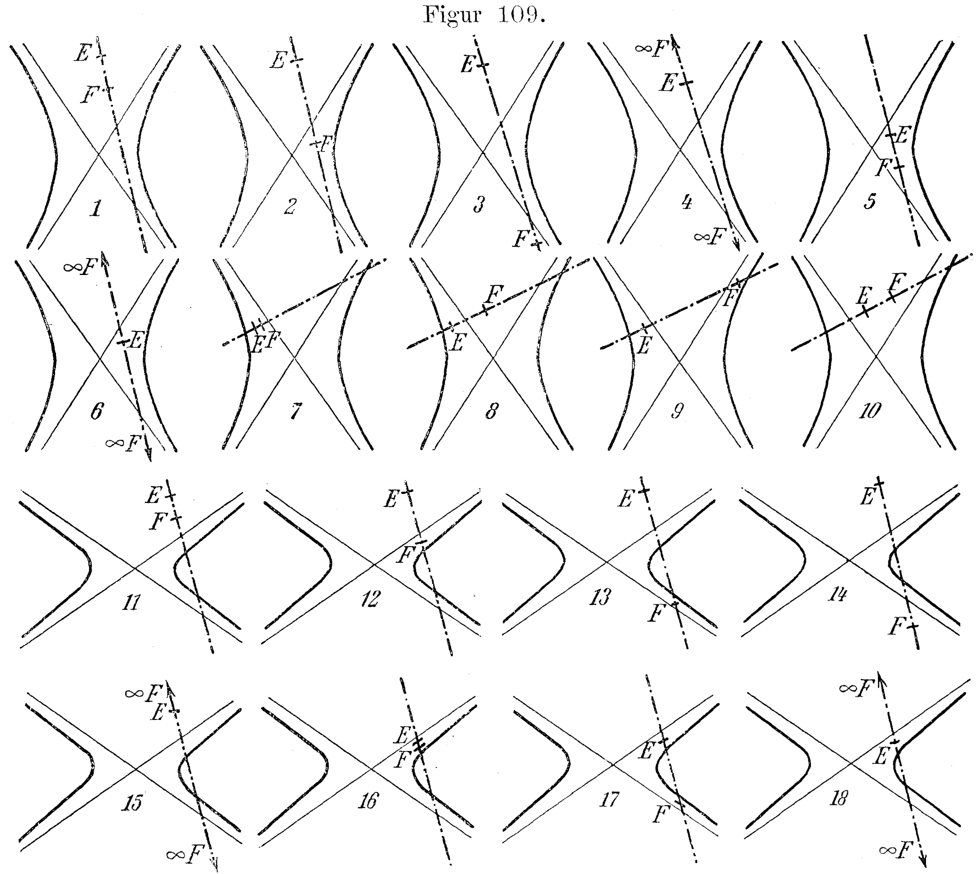
Aufgabe 2. Man soll die Bedingung aufsuchen, daß Fig. 107 bezw. Figur 5b in der Lage der Fig. 8II im zweiten Teile auftritt.

Aufgabe 3. Man untersuche dieselben Einzelfälle bei der Hyperbel.

Erkl. 344. Durch das Tangentenvierseit ist der Diagonalenschnittpunkt und folglich auch der Pol der Nebenseite festgelegt. Daher liefern alle Kurven, welche dieselben vier Tangenten haben, auch denselben Pol zu der gewählten Seite, es mag der Kurve zu den vier Tangenten eine Lage gegeben sein, wie immer man will. Man kann aber

Auflösung. Die Teilung der Hyperbel in zwei Aeste macht die Verschiedenheit der Konstruktion an dieser Kurve zu einer sehr reichhaltigen. Man hat nämlich zwei Tangenten an den gleichen Ast aus allen Punkten im Flächenraum des Innenwinkels der Asymptoten, je eine Tangente an den einen und an den andern Ast aus den Punkten im Nebenwinkel der Asymptoten. Hiernach hat man

Figur 109.



als fünftes Element zu den vier Tangenten eine neue Tangente wählen oder einen Berührungspunkt auf einer der Tangenten. Und daraus geht hervor, daß die Figuren 4ab, 5abc, 105 bis 108 keineswegs bloß für die Ellipsen Geltung besitzen, welche dazu eingezeichnet sind, sondern jede derselben kann auch bei der Hyperbel auftreten, sobald zu den vier gegebenen Tangenten ein entsprechender Berührungspunkt hinzugenommen wird. Freilich liegt dann die Hyperbel nicht etwa innerhalb des Vierseits, wie in Fig. 4a bezw. 5b, oder innerhalb des Parallelstreifens, wie in Fig. 105—108, sondern sie berührt die Tangenten außerhalb des Vierseits bezw. von beiden Seiten außerhalb des Parallelstreifens.

Erkl. 345. Daß die Figuren 4b, 5a, 5c ebensowohl am Kurvenbogen einer

noch ganz ohne Berücksichtigung des Umstandes, daß eine Tangente aus E parallel werden kann einer Tangente aus F, schon die 18 Fälle der Fig. 109 zu unterscheiden, nämlich I) sechs für die nicht schneidende und II) vier für eine die beiden Aeste schneidende Grade und III) acht für eine nur den einen Ast schneidende Grade:

I 1) E und F im gleichen Außenwinkelraume der Asymptoten;

I 2) E im Außenwinkel, F im Innenwinkel der Asymptoten;

I 3) E und F in getrennten Außenwinkeln der Asymptoten;

I 4) E in einem Außenwinkelraume, F im Unendlichen;

I 5) E und F im Innenwinkelraume der Asymptoten;

Parabel oder Hyperbel auftreten könnten als am gezeichnet vorliegenden Ellipsenbogen, ist aus der Anschauung selber ohne weiteres klar. Auf Grund der vorstehenden Erklärung 344 kann aber auch Fig. 4a, 5b als Figur für Parabel und Hyperbel aufgefaßt werden, sobald man die unendlich ferne Tangente oder sonst beliebigen Berührungspunkt hinzunimmt. Die Figuren 105—108 dagegen, bei welchen parallele Tangenten auftreten, können nur für die Ellipse und Hyperbel zur Anwendung gelangen, weil die Parabel keinen Parallelstreifen zweier Tangenten zuläßt.

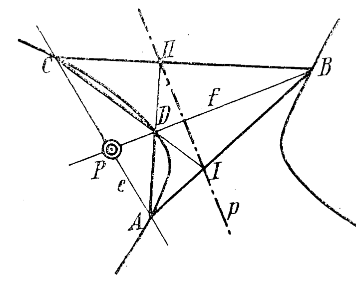
Erkl. 346. Die nebenstehenden 18 Fälle ließen sich noch vermehren durch die Aufzählung derjenigen, bei welchen E und F auf parallele Tangenten der Kurve zu liegen kämen, und dies könnte vorkommen bei den Fällen 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, sodaß also noch 9 weitere Fälle hinzukommen könnten. Jedoch entstehen dabei nicht jedesmal wieder neue Anordnungen des Vierseits zur Kurve, sondern viele dieser Fälle führen jeweils auf dieselbe Figurenart zurück. Es muß dem Studierenden überlassen bleiben, die einzelnen Figuren darauf zu untersuchen, welche von ihnen besondere Fälle liefern. Ebenso wird man sich auch davon zu überzeugen haben, daß die vorstehenden 18 Fälle ihr Gebiet erschöpfen, und daß nicht etwa zwischen 5 und 6 ein Teil fehlt. Denn der dazwischen fehlende würde zum gleichen Ergebnis führen wie 2.

I 6) E im Innenwinkelraume, F im Unendlichen;
II 7) E und F im gleichen Innenwinkelraume der Asymptoten;
II 8) E im Innenwinkelraume, F im Außenwinkelraume der Asymptoten;
II 9) E und F in getrennten Innenwinkelräumen der Asymptoten;
II 10) E und F im Außenwinkelraum der Asymptoten;
III 11) E und F im gleichen Außenwinkelraum der Asymptoten;
III 12) E im Außenwinkel, F im Innenwinkel auf gleicher Seite der Kurve;
III 13) E im Außenwinkel, F im Innenwinkel auf ungleicher Seite der Kurve;
III 14) E und F in getrennten Außenwinkelräumen der Asymptoten;
III 15) E im Außenwinkel, F im Unendlichen;
III 16) E und F im Innenwinkelraum auf gleicher Seite der Kurve;
III 17) E und F im Innenwinkelraum auf ungleicher Seite der Kurve;
III 18) E im Innenwinkelraum, F im Unendlichen.

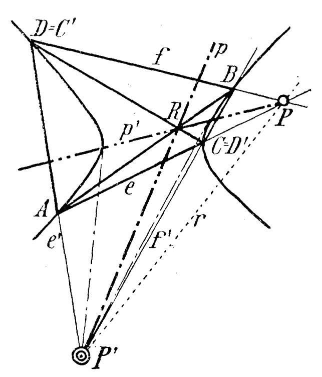
Aufgabe 4. Man soll für einige der 18 Fälle der Auflösung der Aufgabe 3 die Figuren vollständig ausführen.

Aufgabe 5. Man soll einige der in Erklärung 346 hinzugefügten Sonderfälle feststellen.

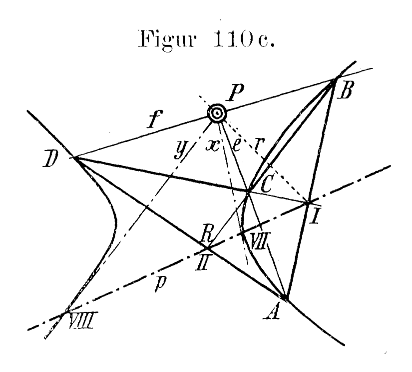
Figur 110a.



Figur 110 b d.



Figur 110 c.



Aufgabe 6. Es sollen die verschiedenen Lagen festgestellt werden, welche die zur Konstruktion der Polare p zu gegebenem Polpunkt P verwandten Strahlen e und f bei der Hyperbel annehmen können.

Erkl. 347. Die Figur des vollständigen Vierecks ABCD von vier Punkten einer Kurve liefert nicht nur für einen, sondern für drei Punkte die Polare. Denn nach Antwort der Fragen 4 bezw. 10 liefert jeder Schnittpunkt zweier Nebenseiten des vollständigen Vierseits den Pol für die dritte Nebenseite, bezw. jede Verbindungsgrade zweier Nebenecken des vollständigen Vierecks die Polare für die dritte Nebenecke. So ist in Figur 110a nicht nur P Pol zur Graden I II, sondern PI Polare zu Punkt II und PII Polare zu Punkt I. Und die zur Konstruktion verwandten Sekanten durch P, als auch jene durch I, nämlich AB und CD, oder durch II, nämlich AD und BC, haben jedesmal dieselbe Eigenschaft, daß eine von ihnen zweimal denselben Ast trifft, die andere je einmal die beiden Aeste. Und gleicherweise hat man bei Figur 110c nicht nur P als Pol von p, sondern auch wieder PI oder r als Polare von R und PII als Polare von Punkt I. Und wieder sind die Sekanten durch P, nämlich AC und BD, und jene durch R, nämlich AD und BC, und jene durch I, nämlich AB und CD, von der Art, daß eine davon zweimal denselben Ast schneidet, die andere jeden Ast nur je einmal.

Auflösung. I) Ist der Punkt P ein Punkt innerhalb der Hyperbel, so können die Graden e und f

1) beide denselben Hyperbelast zweimal treffen, und dann entsteht dieselbe Figur, wie in Fig. 7. Oder

2) von den Graden e und f trifft die eine zweimal denjenigen Ast, in dessen Innenraum der Punkt P liegt, die andere dagegen beide Aeste. Dann entsteht ein Viereck mit einspringendem Winkel, Figur 110a. Die Polare läuft außerhalb der Hyperbel, und auf ihr liegen außer den Schnittpunkten der Gegenseiten AB, CD und BC, AD auch die Schnittpunkte der Tangenten in B, D und in A, C, sowie die vierten harmonischen Punkte zu PAC und PBD. Endlich

3) können beide Graden e und f je beide Aeste der Hyperbel treffen. Dann entsteht das überschlagene Viereck ABCD zu Punkt P und Polare p in Figur 110b, und auf p liegen dieselben Punkte wie oben.

II) Ist der Punkt P ein Punkt außerhalb der Hyperbel, so können wieder die Graden e und f

1) beide Sekanten desselben Hyperbelastes sein, und dann entsteht dieselbe Figur wie Fig. 8. Oder

2) von den Graden e und f trifft die eine zweimal den einen Ast, die andere dagegen beide Aeste. Dann entsteht ein Viereck mit einspringendem Winkel, Figur 110c.

Erkl. 348. Ebensolche Erscheinungen finden sich vereinigt in Figur 110b, d. Dort ist p die Polare von P, p′ Polare von P′ und r Polare von R. Die zur Konstruktion verwandten Sekanten durch P, nämlich AC und BD, sowie jene durch R, nämlich AB und CD, haben die Eigentümlichkeit, daß jede von ihnen beide Aeste trifft, also jeden einmal. Dagegen sind jene durch P′, nämlich AD und BC, Sekanten der Art, daß jede von ihnen denselben Ast zweimal trifft, die eine den einen, die andere den andern. Man erhält also für R das konvexe Viereck ACBD, ähnlich Figur 7, aber mit ganz anderer Lage der Kurve, indem nämlich nur Segmente des Vierecks innerhalb, die übrige Fläche im Außenraum der Kurve liegt.

Die Polare schneidet die Hyperbel zweimal, und auf derselben liegen außer den vorgenannten sechs Punkten auch noch die Berührungspunkte der Tangenten aus P. Endlich

3) können beide Geraden e′ und f′ des Punktes P′ je beide Aeste der Hyperbel treffen. Dann entsteht wieder ein überschlagenes Viereck ABC′D′ der Figur 110d nur mit vertauschten Eckpunkten CD und C′D′ der Figur 110b.

Aufgabe 7. Aus der vorigen Aufgabe sollen die Angaben über die Lage von Pol und Polare zu den Kurvenästen der Hyperbel entnommen werden.

Erkl. 349. Die genaueren Angaben über die gegenseitige Lage von Pol und Polare bei der Hyperbel können gemacht werden auf Grund des Satzes 7 und der Symmetrie-Eigenschaften der Hyperbel inbezug auf Haupt- und Nebenaxe, welche teils in den metrischen Untersuchungen im zweiten Teile dieses Lehrbuches, teils im Abschnitt 2d dieses Teils bewiesen werden. Jede Grade der Ebene muß nämlich die Hauptaxe der Hyperbel in irgend einem Punkte P treffen. Legt man durch diesen Punkt P die Parallele b zur Nebenaxe und u und v zu den Asymptoten, sowie die etwaigen Tangenten x und y durch P an die Hyperbel, so findet man sehr leicht auf der Polare p jenes Punktes (Fig. 111) die Polpunkte der Graden a, b, u, v, x, y und hat nun ohne weiteres die Feststellung, daß für Grade durch P in den Winkeln (au), (ux), (xb), (by), (yv), (va) die Polpunkte liegen müssen auf p in den Strecken AU, UX, XB, BY, YV, VA.

Auflösung. I) 1) Eine Sekante der Hyperbel, welche denselben Ast zweimal trifft, hat ihren Pol in dem Innenwinkelraum der Asymptoten, welcher an den geschnittenen Ast angrenzt.

2) Eine Sekante der Hyperbel, welche beide Aeste trifft, hat ihren Pol in demjenigen Außenwinkelraum der Asymptoten, durch welchen die Sekante nicht selbst hindurchgeht.

3) Eine Gerade, welche die Hyperbel nicht trifft, hat ihren Pol innerhalb desjenigen Hyperbelastes, welcher mit der Geraden im gleichen Innenwinkelraum verläuft.

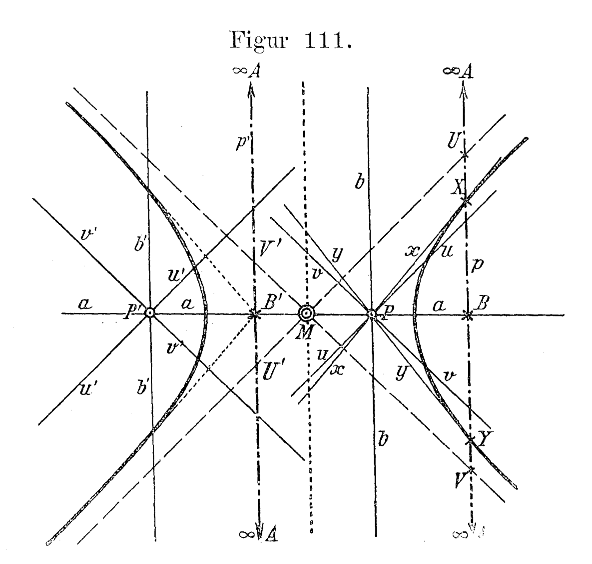
II) 1) Ein Punkt im Innenwinkelraum der Asymptoten hat als Polare eine Sekante des angrenzenden Hyperbelastes.

2) Ein Punkt in einem Außenwinkelraum der Asymptoten hat als Polare eine Sekante beider Aeste, welche durch den andern Außenwinkelraum hindurchgeht.

3) Ein Punkt innerhalb eines Hyperbelastes hat als Polare eine Grade, welche zwischen den beiden Hyperbelästen durch den angrenzenden Innenwinkelraum hindurchgeht ohne zu schneiden.

Erkl. 350. Umgekehrt liegt jeder beliebige Punkt der Ebene auf irgend einer Senkrechten p zur Hauptaxe der Hyperbel, und zwar auf irgend einer der

Figur 111.



Strecken AU, UX, XB, BY, YV, VA. Die Polare geht dann jedenfalls durch den Polpunkt P von p, und liegt im entsprechenden Winkel der Strahlen (au), (ux), (xb), (by), (yv), (va). Man kann also außer der allgemeinen Beweisführung obenstehender Antwort noch die besonderen Einzelheiten entnehmen, daß der Polpunkt und der Schnittpunkt der Polaren mit der Hauptaxe jeweils auf derselben Seite der Nebenaxe liegen müssen, daß die Polare eines Punktes im einen Außenwinkelraum der Asymptoten stets durch den andern Außenwinkelraum hindurchgeht, und umgekehrt, oder daß für eine nicht schneidende Grade der Pol in der Nähe derjenigen Stelle liegt, wo die Grade dem Hyperbelaste am nächsten kommt u. s. w.

Aufgabe 8. Man soll die Grenzfälle der Aufgabe 7 feststellen.

Aufgabe 8a. Man soll beweisen, daß ein Punkt einer Asymptote als Polare stets eine Parallele zu dieser Asymptote hat und umgekehrt.

Aufgabe 9. Man soll untersuchen, wie viele Elemente unter den Bestimmungsstücken der Kurve ersetzt werden können durch einen Punkt P und seine Polare p.

Auflösung. 1) Sind gegeben P und p und drei Kurvenpunkte, so verbindet man P mit jedem der drei gegebenen Kurvenpunkte und konstruiert zu jedem der letzteren Punkte den harmonisch zugeordneten Punkt mit P und dem Schnittpunkt von p mit der Verbindungsgraden. Da dieser vierte harmonische Punkt ebenfalls ein Kurvenpunkt sein muß, so hat man nun sechs

Auflösung. 1) Sind gegeben P und p und drei Tangenten, so bringt man p zum Schnitt mit jeder der drei gegebenen Tangenten und konstruiert zu jeder der letzteren Graden den harmonisch zugeordneten Strahl mit p und der Verbindungsgraden von P mit dem Schnittpunkt. Da diese vierte harmonische Grade ebenfalls eine Kurventangente sein muß, so

Kurvenpunkte und kann nach Paskal weiter konstruieren.

2) Sind gegeben P und p und zwei Kurvenpunkte nebst Tangente in einem derselben, so erhält man auf dieselbe Weise zu den zwei Kurvenpunkten zwei neue, bekommt also vier Kurvenpunkte nebst Tangente in einem. — Außerdem kann man auch nach der nebenstehenden ersten Auflösung zur gegebenen Tangente eine neue beschaffen, sodaß wieder sechs Kurvenelemente bekannt sind.

3) Man erhält also die beiderseits giltige Aussage:

hat man sechs Kurventangenten und kann nach Brianchon weiter konstruieren.

2) Sind gegeben P und p und zwei Tangenten nebst Berührungspunkt auf einer derselben, so erhält man auf dieselbe Weise zu den zwei Kurventangenten zwei neue, bekommt also vier Kurventangenten nebst Berührungspunkt auf einer. — Außerdem kann man auch nach der nebenstehenden ersten Auflösung zum gegebenen Kurvenpunkt einen neuen beschaffen, sodaß wieder sechs Kurvenpunkte bekannt sind.

Satz. Ein gegebener Punkt nebst Polare bezw. eine gegebene Grade nebst Pol verdoppelt jeweils die Zahl der sonst gegebenen Kurven-Elemente, ersetzt also unter den fünf Bestimmungsstücken einer Kurve ein Elementenpaar.

Erkl. 351. Daß der Ersatz auch noch eines weiteren Elementenpaares stattfindet durch ein zweites gegebenes Paar von Pol und Polare infolge mehrmaliger Verdoppelung des einzigen übrigen gegebenen Elementes, läßt sich nachweisen durch Benutzung des Satzes 7. Kennt man nämlich P und p, Q und q, so entstehen eine Reihe weiterer Polaritätsbeziehungen, weil auch PQ Polare zu (pq) wird. Bezeichnet war nämlich PQ als w, (pq) als W, PW als v, (pw) als V, QW als u, (qw) als U, so bilden außer Pp, Qq, auch Uu, Vv, Ww je ein Paar von Pol und Polare. Man kann also zu einem weiteren Kurvenpunkte K auf den fünf Verbindungsgraden KP, KQ, KU, KV, KW den vierten harmonischen Punkt konstruieren, und kennt dann wieder sechs Kurvenpunkte, — bezw. man kann zu einer weiteren Tangente k in den fünf Schnittpunkten kp, kq, ku, kv, kw den vierten harmonischen Strahl konstruieren, und kennt dann wieder sechs Kurventangenten.

Zu einem besonderen Falle wird aber die letztere Bestimmung, wenn etwa Q auf p läge, also q durch P ginge. Dann entsteht nicht fünffache Polaritätsbeziehung wie oben, sondern ein Polardreieck PQR, und das ersetzt nicht mehr vier, sondern nur drei Kurvenlemente. Vergl. Aufgabe 41 und folgende sowie Erklärungen 386 und 390.

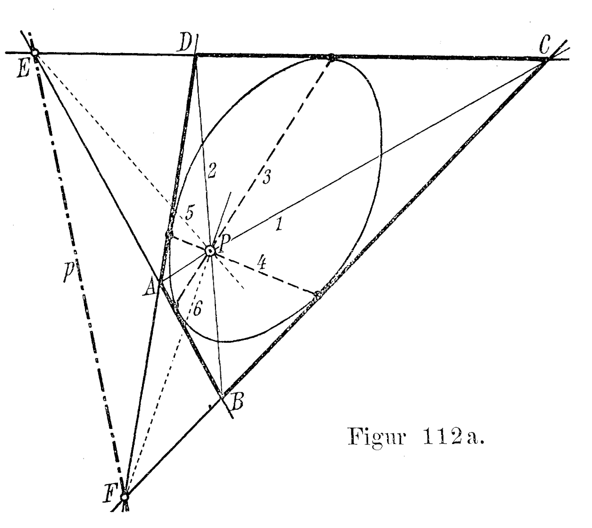
Aufgabe 9a. Man bilde Aufgaben für Konstruktionen nach dem Muster der vorhergehenden Aufgabe 9 mit einem bezw. zwei gegebenen Paaren von Pol und Polare.

Aufgabe 10. Durch möglichst wenige Grade soll man den Pol einer gegebenen Graden konstruieren.

Auflösung. I) Wenn die Grade p die Kurve nicht trifft (Figur 112a), wird man die Tangenten aus



Erkl. 352. Die nebenstehende Auflösung bietet die verlangte Konstruktion durch diejenigen Strahlenpaare, welche nach Erklärung 10 und 16 von der geringsten Anzahl von Figurenelementen abhängig sind. Die Konstruktion I verwendet die Geraden 3 und 5, welche nur vom Punkt E, bezw. 4 und 6, welche nur vom Punkt F abhängig sind. Alle anderen Paare, welche aus den sechs Geraden 1—6 der Figur 112a gebildet werden können, enthalten solche Strahlen, welche gleichzeitig durch E und F bedingt sind.



Figur 112a.

Figur 112b.

Die Konstruktion III verwendet zuerst die Gerade 7 und 8, oder die Geradenpaare 3 und 5 bezw. 4 und 6, oder eines der Paare 7 und 3 bezw. 7 und 4 bezw. 8 und 3 bezw. 8 und 4, oder die Geraden 7 und 5 bezw. 7 und 6 bezw. 8 und 5 bezw. 8 und 6. Dabei sind also verwendet die beiden Punkte X und Y, oder nur E bezw. F, oder X mit E bezw. X mit F, Y mit E, Y mit F.

Für genaue Ausführung der Zeichnung mit Lineal wird in jedem Falle genau zu untersuchen sein, was für Gerade aus den gegebenen Elementen der Kurve

einem beliebigen Punkte E der Geraden ziehen und deren Berührungssehne 3 zum Schnitt bringen mit der vierten harmonischen Geraden 5 zu p und den Tangenten.

II) Wenn die Gerade p die Kurve berührt, so ist der Berührungspunkt selber der Pol.

III) Wenn die Gerade p die Kurve schneidet, so findet man den Pol am einfachsten

1) durch die Tangenten x und y in den beiden Schnittpunkten X und Y der Kurve mit der Geraden (Fig. 112b).

Man kann aber auch ziehen, wie unter I:

2) die Tangenten aus einem beliebigen Punkte E der Geraden, und deren Berührungssehne zum Schnitt bringen mit der vierten harmonischen Geraden 5 zu p und den Tangenten, oder

3) die Tangenten aus einem beliebigen Punkt E der Geraden, und deren Berührungssehne 3 zum Schnitt bringen mit der Tangente 7 in einem Kurvenschnittpunkt von p, oder

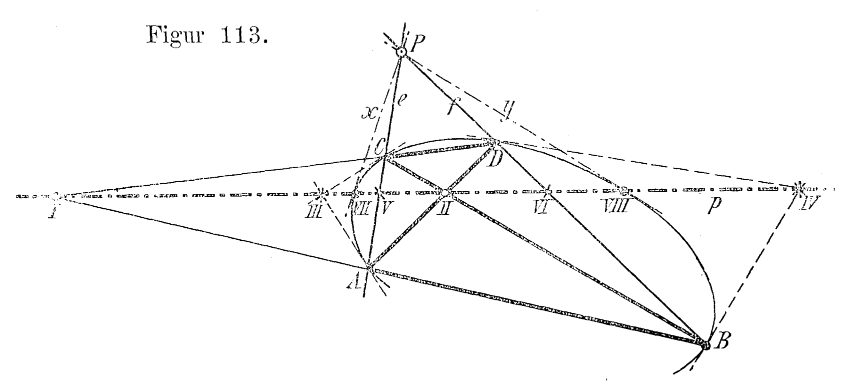
4) die Tangenten aus einem beliebigen Punkte E der Geraden, und die vierte harmonische Gerade 5 zu

konstruiert werden können, bezw. welche Elemente etwa an der grade vorliegenden Figur schon gezeichnet vorhanden sind.

p und diesen Tangenten zum Schnitt bringen mit der Tangente 7 in einem Kurvenschnittpunkt von p.

Aufgabe 11. Durch möglichst wenige Gerade soll die Polare eines gegebenen Punktes konstruiert werden.

Figur 113.



Erkl. 353. Ebenso wie in Erkl. 351 für Auflösung der Aufgabe 10 nach Erklärung 10 und 16 die Zusammenstellung derjenigen Strahlenpaare gegeben wird, welche die einfachste Konstruktion ermöglichen, so hat man auch in nebenstehender Auflösung nach Erklärung 26 und 32 den Nachweis zu erbringen, daß die Konstruktion mit den einfachsten Mitteln geschieht. Und zwar sind die Ziffern der Zahlenpaare genau dieselben, wie in Erklärung 351 durchgeführt worden. Auch die Bemerkung der Erklärung 352 gilt in vollem Umfange für die nebenstehende Auflösung.

Erkl. 354. Da es für die Praxis der Zeichnung an vorliegender Kurve ein bedeutend einfacheres Verfahren bildet, die Kurvenschnittpunkte einer Sekante festzustellen, als die Tangenten aus gegebenem Punkte, so wird man für nebenstehende Konstruktion der Polare auch eher beide Sekanten e und f verwenden, als etwa zur Konstruktion des Poles beide Tangentenpaare aus E und F. Sowohl durch einen äußeren als durch einen inneren Punkt kann man nämlich leicht zwei Sekanten legen, auf jeder der-

Auflösung. I) Wenn der Punkt innerhalb der Kurve liegt, so wird man eine beliebige Sekante e durch ihn legen, und den Schnittpunkt III der beiden Tangenten in ihren Kurvenschnittpunkten verbinden mit dem vierten harmonischen Punkte V zu P und den Kurvenschnittpunkten von e.

II) Wenn der Punkt P auf der Kurve liegt, so ist die Tangente in P selber die Polare.

III) Wenn der Punkt P außerhalb der Kurve liegt, so findet man die Polare am einfachsten

1) als Berührungssehne der Kurventangenten, welche von P an die Kurve gelegt werden (Fig. 113).

Man kann aber auch ziehen, wie unter I

2) eine beliebige Sekante e durch P, die Tangenten in deren Kurvenschnittpunkten, und den Schnittpunkt III der letzteren verbinden mit dem vierten harmonischen Punkte V zu P und den Kurvenpunkten auf e; oder

selben den vierten harmonischen Punkt konstruieren zu P und ihren Kurvenschnittpunkten, und hat dann als Verbindungsgerade dieser beiden vierten harmonischen Punkte die Polare des Punktes P. Und gleiches gilt von der Konstruktion aus drei Sekanten durch P mittels der Diagonalenschnittpunkte zweier eingeschriebenen Vierecke.

3) eine beliebige Sekante e durch P, die Tangenten in deren Kurvenschnittpunkten, und den Schnittpunkt III der letzteren verbinden mit dem Berührungspunkt VII der einen Kurventangente aus P; oder

4) eine beliebige Sekante e durch P, und den vierten harmonischen Punkt V zu P und den Kurvenschnittpunkten von e verbinden mit dem Berührungspunkt VII der einen Kurventangente aus P.

Aufgabe 12. Es soll besonders gezeigt werden, warum in den Sätzen 5 und 6 nur je drei Fälle $\alpha\ \beta\ \gamma$ aufgeführt sind, während in Satz 2 vier Fälle $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ festgestellt waren.

Erkl. 355. Man kann die Mehrfachheit der durch verschiedene Wahl von E, F, bezw. e, f bedingten Figurenelemente, welche in den Satzteilen $\alpha\beta\gamma$ behandelt werden, auch folgendermaßen durchschauen: Wenn man den Punkt E festhält und F wechseln läßt, so erzeugen die durch Punkt E allein bestimmten Elemente 3 und 5 bezw. 7 denselben Pol, als die durch E mit F_1 oder die durch E mit F_2 oder durch E mit F_3 u. s. w. erzeugten Figurenteile der Tangenten-Vierseite. Mann könnte sich also auch den Punkt E allein ganz wegdenken und denselben Polpunkt erzeugen lassen durch die Figurenteile der Tangenten-Vierseite, welche von den Punkten F_1 und F_2 allein, oder von F_2 und F_3 allein oder von F_1 und F_3 allein u. s. w. bestimmt sind. — Und ebenso kann man in der Polarenkonstruktion die Sekante e festhalten und f wechseln lassen: die durch e allein bestimmten Elemente III und V bezw. VII erzeugen dieselbe Polare als die durch e mit f_1, oder durch e mit f_2, oder durch e mit f_3 u. s. w. erzeugten Figurenteile der Sehnenvierecke. Man könnte sich also auch die Sekante e

Auflösung. Auf einer Polare p liegen vielerlei Punkte E und F, durch einen Pol gehen vielerlei Strahlen e und f; und jeder der Punkte E, F bezw. der Strahlen e, f liefert ein anderes Figurenelement nach dem Teil α oder β oder γ der Sätze 5 und 6. Wenn also die durch verschiedene Punkte E, F, bezw. verschiedene Strahlen e, f erzeugten Elemente stets vereinigte Lage besitzen, d. h. als Gerade mit gemeinsamem Schnittpunkt bezw. als Punkte auf gemeinsamer Geraden erscheinen, so ist dies in besonderem Satze auszusprechen. Solche Elemente sind aufgezählt in den Satzteilen $\alpha\ \beta\ \gamma$ der Sätze 5 und 6.

Dagegen bezieht sich der Satzteil δ des Satzes 2 nicht auf ein Figurenelement, welches bei verschiedener Wahl von E, F bezw. e, f in verschiedener Weise auftritt, sondern auf zwei Elemente ganz vereinzelter Natur, welche in ihrer Zweizahl auftreten für schneidende Gerade p oder äußeren Punkt P, aber mit der Wahl des Punktes E, F oder der Geraden e, f garnichts zu tun haben. Diese Elemente des Satzteiles δ treten daher nicht in einer Mehrzahl auf, über die irgend welche Angaben zu machen sind,

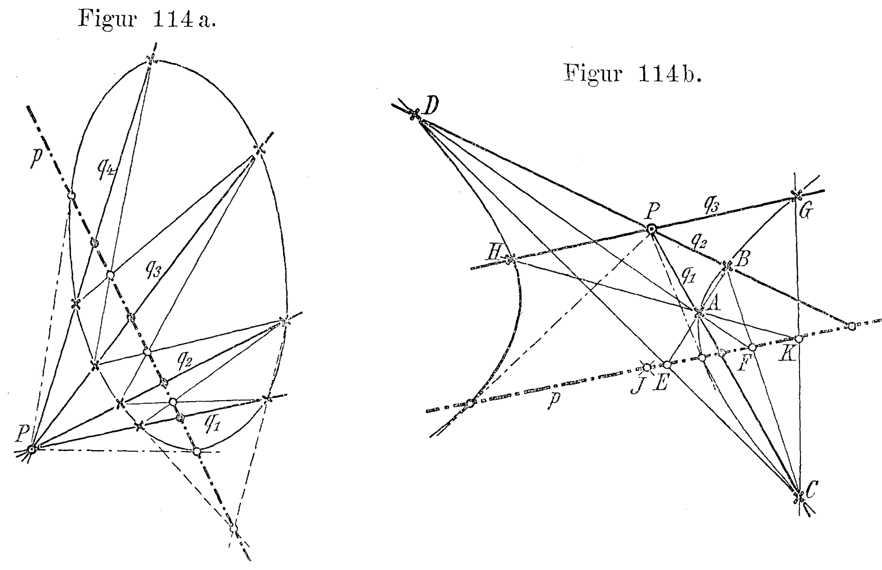
allein ganz fortgelassen denken und würde dieselbe Polare p erhalten durch die Figurenteile des eingeschriebenen Vierecks, welche von den Sekanten f_1 und f_2 allein oder von f_2 und f_3 allein, oder von f_1 und f_3 allein u. s. w. bestimmt sind.

sondern die Tangenten x, y bezw. Berührungspunkte X, Y sind einmal vorhanden, und es sind keinerlei Aussagen aufzustellen über das verschiedenartige Auftreten dieser Elemente x, X.

Aufgabe 13. An eine gezeichnet vorliegende Kurve sollen aus gegebenem Punkte die Tangenten konstruiert werden.

Figur 114a.

Figur 114b.



Erkl. 356. Schon zwei Sekanten würden zu nebenstehender Konstruktion ausreichen, wenn man das vollständige Viereck ihrer Kurvenschnittpunkte ziehen wollte. Da aber von den Verbindungsgeraden sehr häufig nur zwei ihren Schnittpunkt in bequem zugänglicher Lage (zwischen den beiden Sekanten) zu erhalten pflegen, so nimmt man lieber den von einem weiteren Sekantenpaare gelieferten inneren Schnittpunkt hinzu, als daß man den vielleicht weit seitwärts liegenden Schnittpunkt der anderen Verbindungsgeraden vom ersten Paare verwendet. Ist aber das zweite Sekantenpaar hinzugenommen, so könnte man dann nicht nur zwei, sondern drei innere Schnittpunkte erhalten, indem nicht nur q_1 und q_2 oder q_2 und q_3 einen solchen

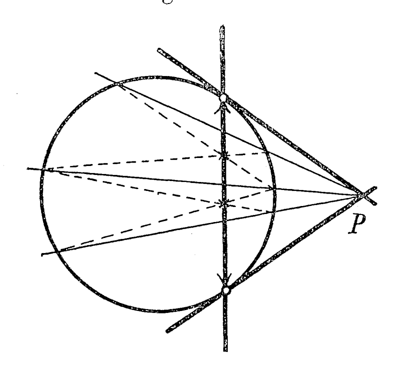
Auflösung. Da die Berührungspunkte der Tangenten mit der Kurve die Schnittpunkte der Polare mit der Kurve sind, so kennt man die Richtung der Tangenten wenn man die Polare kennt. Wenn aber die Kurve vollständig ausgezeichnet vorliegt, so sind auf jeder beliebigen Sekante sofort die beiden Kurvenschnittpunkte als bekannt anzunehmen. Man gelangt also zu Punkten der Polare unter dieser besonderen Voraussetzung am einfachsten dadurch, daß man drei Sekanten durch P legt, und die Kurvenschnittpunkte je zweier davon kreuzweise verbindet. Die Kreuzungspunkte liegen

liefern, sondern ebenso auch $q_1\ q_3$. Wollte man in Figur 114a, wo vier Sekanten q eingelegt sind, alle verfügbaren Schnittpunkte der Verbindungsgeraden aufzählen, so käme man auf zusammen 12 Punkte. Denn jedes Paar q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34} liefert zwei solche Punkte auf der Polaren p. Und in Figur 114b, wo drei Sekanten q vorliegen, sind es noch immer sechs solcher Punkte.

Erkl. 357. Es könnte als Widerspruch erscheinen, daß in der vorhergehenden Auflösung 11 die Tangenten aus P zur Konstruktion der Polaren zu P und in der nebenstehenden Auflösung 13 umgekehrt die Polare zu P zur Konstruktion der Tangenten aus P verwendet wird. Der Unterschied liegt aber nur in der Auffassungsweise bezw. in der Art der an der Zeichnung vorhandenen Figurenteile oder der zur Bestimmung der Kurve dienenden Elemente. Für eine nur durch einzelne Bestimmungsstücke festgelegte Kurve ist die nebenstehende Lösung durchaus ungeeignet, vielmehr gilt dieselbe ausgesprochener Maßen nur dann, wenn die Kurve kontinuierlich gezeichnet vorliegt, also gewissermaßen unendlich viele Elemente derselben vorliegen. — Der Fall einer kontinuierlich gegebenen Kurve liegt besonders einfach bei einem mit Zirkel ausgezogenen Kreise in der Planimetrie. Dennoch aber ist die Planimetrie nicht imstande, das einfache Mittel dieser linearen Konstruktion zu bieten (Figur 115), ohne ihrerseits die Anleihe zu machen bei der projektivischen Geometrie, daß nämlich die Lehre von Pol und Polare für die Kreislinie selbständig aufgestellt und als Anwendung dann die vorliegende Konstruktion ermöglicht wird.

auf der Polaren, und die Polare liefert als Kurvenschnittpunkte die Berührungspunkte der gesuchten Tangenten. Figur 114a zeigt dies für Sekanten durch eine Ellipse oder Parabel oder durch je einen und denselben Ast einer Hyperbel, indem alle drei Sekanten denselben Ast treffen oder auch eine zweimal den einen Ast, die zwei andern je zweimal den andern Ast. Figur 114b dagegen zeigt die Tangentenkonstruktion bei der Hyperbel, wenn eine oder zwei der Sekanten beiderlei Aeste der Kurve treffen.

Figur 115.



Aufgabe 14—16. Eine Kurve sei bestimmt (14) durch fünf Tangenten oder (15) durch vier Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben oder (16) durch zwei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben.

Man soll den Pol einer beliebig gegebenen Geraden p konstruieren.

Erkl. 358. Wenn eine Kurve bestimmt ist durch fünf Elemente, unter welchen

Auflösung. Bezeichnet man durch E und F die Schnittpunkte der Geraden p mit irgend zweien der gegebenen Tangenten, so kann man nach Brianchon durch E und F die jeweilige zweite Tangente an die Kurve konstruieren. Dadurch erhält man ein Tangentenvierseit der Kurve, dessen eine Nebenseite p ist, und der Schnittpunkt P der beiden anderen Nebenseiten ist der Pol zu p. —

die Ueberzahl Tangenten sind, so kann man nach dem Satz von Brianchon sowohl die zweite Tangente konstruieren durch einen auf einer gegebenen Tangente liegenden Punkt, als auch den Berührungspunkt auf einer gegebenen Tangente. Vgl. den Abschnitt 5 im II. Teil dieses Lehrbuches. Die nebenstehende Auflösung erfordert also zwei solcher linearen Konstruktionen, und im übrigen nur Schneidung vorhandener Geraden bezw. Verbindung vorhandener Punkte.

Auch könnte man in jedem der Punkte E und F die vierte harmonische Gerade zu p und den beiden Tangenten konstruieren, und erhält P als den Schnittpunkt derselben.

Aufgabe 17. Man soll die vorstehenden Aufgaben 15, 16 unter Benutzung der Berührungspunkte lösen.

Aufgabe 18—20. Eine Kurve sei bestimmt (18) durch fünf Punkte oder (19) durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben oder (20) durch drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben.

Man soll die Polare eines beliebig gegebenen Punktes P konstruieren.

Erkl. 359. Wenn eine Kurve bestimmt ist durch fünf Elemente, unter welchen die Überzahl Kurvenpunkte sind, so kann man nach dem Satze von Paskal sowohl den zweiten Kurvenpunkt konstruieren auf einer durch einen gegebenen Kurvenpunkt gehenden Sekante, als auch die Tangente in gegebenem Kurvenpunkte. Vgl. den Abschnitt 5 im II. Teil dieses Lehrbuches. Die nebenstehende Auflösung erfordert also zwei solcher linearen Konstruktionen, und im übrigen nur Verbindung vorhandener Punkte bezw. Schneidung vorhandener Geraden.

Auflösung. Bezeichnet man durch e und f die Verbindungsgeraden des Punktes P mit irgend zweien der gegebenen Kurvenpunkte, so kann man nach Paskal auf e und f den jeweiligen zweiten Schnittpunkt mit der Kurve konstruieren. Dadurch erhält man ein eingeschriebenes Viereck der Kurve, dessen eine Nebenecke P ist; und die Verbindungsgerade p der beiden anderen Nebenecken ist die Polare zu P. — Auch könnte man auf jeder der Sekanten e und f den vierten harmonischen Punkt konstruieren zu P und den beiden Kurvenschnittpunkten und erhält p als die Verbindungsgerade derselben.

Aufgabe 21. Man soll die vorstehenden Aufgaben 19, 20 unter Benutzung der Tangenten lösen.

Aufgabe 22. Man soll bei einer durch die Stücke der Aufgaben 14 bis 16 bestimmten Kurve die Polare eines beliebig gegebenen Punktes P konstruieren.

Erkl. 360. Wenn man in der nebenstehenden ersten Auflösung dieser Auf-

Auflösung. 1) Man wählt durch P zwei beliebige Gerade q und r, konstruiert zu denselben nach Aufgabe 14—16 die Pole Q und R und erhält die gesuchte Polare p als Verbindungsgerade QR. Denn da P

gabe durch P eine ganz beliebige Gerade q legt, so hat man zweimal eine neue Tangente zu legen. Dies Verfahren kann vereinfacht werden, indem man q (und ebenso nachher r) so legt, daß die Gerade schon durch einen der Schnittpunkte der gegebenen Tangenten hindurchgeht. Dann braucht jedesmal nur noch eine neue Tangente konstruiert zu werden, und die ganze Aufgabe wird ebenfalls nur zwei lineare Konstruktionen erfordern wie Aufgabe 14—16. Denn sowohl auf q als auf r liegen dann alsbald je zwei Schnittpunkte zweier Tangenten für ein Tangentenvierseit. Alle übrigen Elemente werden erhalten als Schnittpunkte vorhandener Geraden bezw. Verbindungsgeraden vorhandener Punkte. Die Auflösung der Aufgabe 22 ist also nicht wesentlich umständlicher als jene der Aufgaben 14—16.

der Schnittpunkt von q und r ist, muß die Polare von P durch Q und R gehen.

2) Man konstruiert nach Brianchon zu den gegebenen Bestimmungstangenten der Kurve die Berührungspunkte der Kurve bis zur Anzahl von dreien; dann kann man wie in Aufgabe 19 nach Paskal die Polare des Punktes P konstruieren.

Erkl. 361. Die zweite Auflösung der Aufgabe 22 ist desto einfacher, je mehr Berührungspunkte schon unter den gegebenen Bestimmungsstücken vorhanden sind, im günstigsten Falle der Aufgabe 16 also schon zwei. Dann hat man noch eine Konstruktion nach Brianchon zur Auffindung des dritten Berührungspunktes, dagegen für Aufgabe 15 zwei und für Aufgabe 14 noch alle drei. Liegen jetzt genügend Elemente vor, um nach Paskal weiter zu konstruieren, so findet man die Polare zu P durch zwei Konstruktionen nach Paskal, wie in Aufgabe 20. Man sieht also, daß diese zweite Konstruktion wesentlich umständlicher ist als die erste, denn auch im günstigsten Falle bei Aufgabe 16 bedarf sie dreier Konstruktionen, für Aufgabe 15 vier, für 14 sogar fünf, während die erste Lösung sich stets durch zwei Konstruktionen erledigen läßt.

Aufgabe 23. Man soll bei einer durch die Stücke der Aufgaben 18 bis 20 bestimmten Kurve zu einer beliebig gegebenen Geraden p den Pol konstruieren.

Erkl. 362. Auch hier wird man die erste Auflösung der Aufgabe dadurch vereinfachen, daß man die Punkte Q und R nicht ganz beliebig auf p wählt, sondern als Schnittpunkt von p mit einer Sekante durch zwei der gegebenen Kurvenpunkte. Dann braucht jeweils nur auf einer neuen Sekante noch der zweite Kurvenpunkt konstruiert zu werden, und die Aufgabe erfordert nur zwei lineare Konstruktionen. — Die zweite Auflösung der Aufgabe dagegen erfordert analog, wie in Erkl. 361 für die dualistische Beziehung nachgewiesen wurde, auch im besten Falle eine Konstruktion mehr, als der scheinbare Umweg über die doppelte Konstruktion einer Polaren.

Auflösung. 1) Man wählt auf p zwei beliebige Punkte Q und R, konstruiert zu denselben die Polaren q und r nach Aufgabe 18—20 und erhält den gesuchten Pol P als Schnittpunkt von q und r. Denn da Q und R auf p liegen, so muss P auf q und auf r liegen.

2) Man konstruiert nach Paskal zu den gegebenen Kurvenpunkten die Tangenten bis zur Anzahl von dreien; dann kann man wie in Aufgabe 16 nach Brianchon den Pol der Geraden p bestimmen.

---

2. Aufgaben über polare Figuren.

(Zu Abschnitt 1 d, e.)

Aufgabe 24. Zu beliebig gegebenem n-Eck soll inbezug auf eine gegebene Kern-Kurve die polare Figur konstruiert werden.

Erkl. 363. Die nebenstehende Auflösung gilt selbstverständlich ebenso für die Aufgabe: zu beliebig gegebenem n-Seit das inbezug auf eine gegebene Fundamentalkurve polare n-Eck zu konstruieren. Man konstruiert zu den n-Seiten die Polpunkte oder zu k Seiten die Pole und zu n—k (davon unabhängigen) Eckpunkten die Polaren. Die so erhaltenen polaren Elemente bilden dann das polar zugeordnete n-Eck. Als besondere Vereinfachung kann dabei der Umstand eintreten, daß eines der gegebenen Elemente schon Kurvenpunkt bezw. Kurventangente der Kernkurve ist. Dann ist das polare Element sofort gefunden als Tangente des Kurvenpunktes bezw. als Berührungspunkt der Kurventangente.

Auflösung. Man konstruiert zu jedem Eckpunkt des gegebenen n-Ecks die Polare und erhält als polare Figur zum gegebenen n-Eck das aus den n-Polargeraden gebildete n-Seit. — Man kann aber auch allgemein zu n unabhängigen Elementen des n-Ecks die polaren Elemente konstruieren, um das polar zugeordnete n-Seit zu erhalten, also zu k Eckpunkten die Polare und zu (n—k) davon unabhängigen Geraden die Polpunkte, und gelangt zum gleichen Ziel.

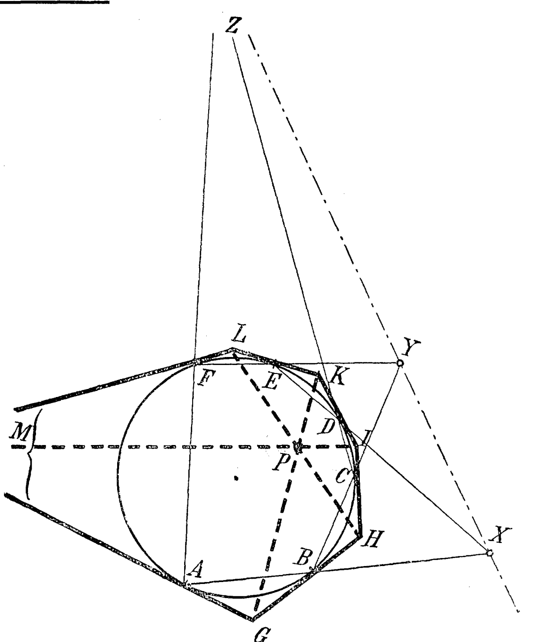
Aufgabe 25. Zu einem einer gegebenen Hyperbel eingeschriebenen n-Eck das polare n-Seit zu konstruieren.

Aufgabe 26. Zu einem Tangentenviereck einer gegebenen Parabel die polare Figur zu konstruieren.

Aufgabe 27. Einem Kreise sei ein Sechseck eingeschrieben; man soll die polare Figur zeichnen.

Erkl. 364. In Figur 117 ist ABCDEF das eingeschriebene Sechseck, XYZ drei seiner Nebenecken, GHIKLM das Tangentensechsseit, GK, HL, IM dessen entsprechende Nebenseiten. Den Punkten auf der Geraden XY entsprechen die Geraden durch den Schnittpunkt von GK und HL; und da unter den Punkten auf XY sich auch der Punkt Z befindet, so muß auch unter den Geraden durch P sich die Gerade IM befinden. Weil also die drei Punkte XYZ auf einer Geraden liegen, so müssen auch die drei Geraden GK, HL, IM durch einen Punkt gehen, — und umgekehrt.

Auflösung. Da hier der Kreis als Kernkurve gegeben ist, und das



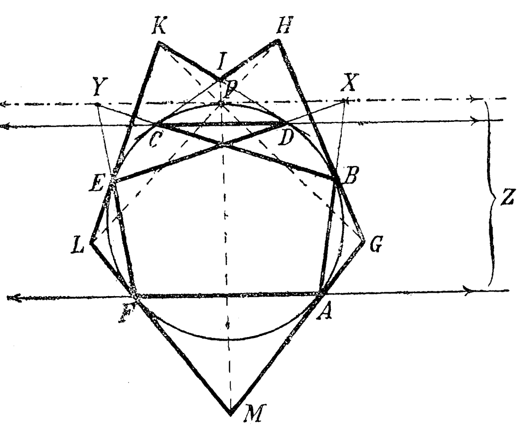
Figur 116.

polare Element eines Kurvenpunktes seine Tangente ist, so ist die verlangte polare Figur das Sechsseit derjenigen Tangenten, welche den Kreis in den Eckpunkten des eingeschriebenen Sechsecks berühren. Dabei werden nicht nur die Ecken und Seiten beider Figuren polar zugeordnet, sondern auch die Diagonalen bezw. Nebenseiten des Sechsseits zu den Nebenecken des Sechsecks, also der Schnittpunkt etwelcher Nebenseiten des Sechsseits zu der Verbindungsgeraden der entsprechenden Nebenecken des Sechsecks. Man erhält so aus dem Satze von Paskal (1640) den Satz von Brianchon in derselben Weise, wie der letztere s. Z. ursprünglich von Brianchon (1806) aufgestellt wurde.

Aufgabe 28. Dieselbe Aufgabe für die Sätze vom Fünfeck und Fünfseit durchzuführen.

Aufgabe 29. Man soll den besonderen Fall konstruieren, daß der Punkt von Brianchon und die Gerade von Paskal vereinigte Lage erhalten.

Erkl. 365. Da die Sätze von Paskal ursprünglich am Kreise aufgefunden wurden, und erst durch Projektion des Kreises auch als Eigenschaften der Kegelschnitte festgestellt wurden, so entspricht es der geschichtlichen Entwicklung, daß auch die vorliegende Figur am Kreise durchgeführt wurde. In Figur 117 ist die verlangte Besonderheit durch Symmetriebeziehungen hergestellt; es ist nämlich von den in nebenstehender Auflösung genannten drei Punkten der Tangente der eine im unendlichen, die andern beiderseits gleichweit vom Berührungspunkt gewählt. Daher werden auch die Seiten im Sechseck sowie jene des Sechsseits in symmetrischer Anordnung erscheinen müssen. (Die zum unendlich fernen Punkte Z polare Diagonale MI des Sechsseits wird zu einem Kurvendurchmesser.) — Die nebenstehende Auflösung und ebenso deren dualistische Übertragung durch Auswahl dreier beliebigen Geraden durch den Berührungspunkt P gelten aber selbstverständlich nicht nur für den Kreis, sondern auch für jede andere Kurve, sie sei Ellipse, Hyperbel oder Parabel.



Figur 117.

Auflösung. Man muß dafür sorgen, daß die Nebenecken des eingeschriebenen Sechsecks auf einer Kurventangente liegen, bezw. daß die Nebenseiten des umgeschriebenen Sechsseits durch einen Kurvenpunkt gehen. Ist das eine erreicht, so folgt das andere von selber. Zum ersteren Zwecke wählt man auf einer beliebigen Kurventangente drei beliebige Punkte, legt durch den ersten die erste Kurvensekante als erste Sechseckseite, durch den zweiten die zweite, den dritten die dritte, dann wieder durch den ersten Punkt die vierte, durch den zweiten die fünfte Sechseckseite. Dann fragt es sich, ob der erste Eckpunkt der ersten

und der letzte Eckpunkt der fünften Sechseckseite als Verbindungsgerade eine sechste Seite liefern, welche durch den dritten Punkt jener Tangente geht. Nun bilden aber die schon vorhandenen sechs Kurvenpunkte ein eingeschriebenes Sechseck, folglich muß die sechste Seite die dritte in einem Punkte derjenigen Geraden schneiden, welche den Schnittpunkt der ersten und vierten mit dem Schnittpunkt der zweiten und fünften verbindet. Demnach muß auch die Figur sich von selbst in der gewünschten Weise schließen. Und beim polaren Sechsseit gehen dann die polar zugeordneten Nebenseiten durch den Polpunkt der Tangente, also durch deren Kurvenpunkt.

Aufgabe 30. Man soll in anderer Weise als in Antwort 23, 4 bezw. Erkl. 79 beweisen, daß die polare Figur eines Kegelschnitts wieder ein Kegelschnitt werden muß.

Erkl. 366. In der nebenstehenden Weise wird die Beweisführung geleistet von Steiner, und das Ergebnis wird von ihm ausgesprochen in dem allgemeinen Satz:

Satz. Wenn in einer Ebene sich irgend zwei Kegelschnitte befinden, so liegen die den Tangenten des zweiten inbezug auf den ersten zugeordneten Polpunkte in einem bestimmten dritten Kegelschnitt, und es berühren die den Punkten des zweiten zugeordneten Polargeraden einen und denselben dritten Kegelschnitt, und zwar dergestalt, daß jeder Tangente und ihrem Berührungspunkte des zweiten Kegelschnitts ein bestimmter Punkt und dessen zugehörige Tangente im dritten Kegelschnitt entspricht.

Erkl. 367. Unter den weitgehenden Anwendungen, welche von der vorliegenden allgemeinen Beziehung gemacht werden können, möge hier ein Satz erwähnt werden, welcher von Brianchon zuerst ausgesprochen wurde und welcher, abgesehen von seinem mit dem vorhergehenden Satze geradezu identischen Inhalt (da die Berührungssehnen und Tangentenschnittpunkte polar zugeordnet sind), auch die Merkwürdigkeit aufweist, daß auf vierfache, je paarweise dualistische Ausdrucksweise stets nur derselbe Inhalt des Satzes in einer veränderten Auffassungsweise erscheint:

Auflösung. 1) Es ist eine durch die Sätze von Paskal und Brianchon festgelegte Eigenschaft der Kegelschnitte, daß in jedem eingeschriebenen Sechseck die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen, bezw. daß in jedem umgeschriebenen Sechsseit die Diagonalen durch einen Punkt gehen. Hat man nun eine Punktreihe, für deren Punkte die erste Eigenschaft jedesmal erfüllt ist, so muß durch die Polarität ein Strahlenbüschel entstehen, für dessen Strahlen die zweite Beziehung jedesmal erfüllt ist, — und umgekehrt. Folglich kann eine Kurve zweiter Ordnung stets nur wieder einer Kurve zweiter Klasse entsprechen — und umgekehrt. Da aber Kurven zweiter Ordnung und Klasse identisch sind, so muß auch die Polarfigur eines Kegelschnitts wieder ein Kegelschnitt sein.

2) Unter Berücksichtigung der eben genannten Identität zwischen Kurven zweiter Ordnung und Klasse folgt die verlangte Beziehung außerdem auch als ganz besonderer Spezialfall aus dem in der folgenden Aufgabe 32 abgeleiteten allgemeinen Satze über Kurven n-ter Klasse bezw. m-ter Ordnung.

Satz α_1.	**Satz α_2.**	**Satz β_1.**	**Satz β_2.**
Bewegen sich zwei veränderliche Tangenten eines Kegelschnitts so,		Bewegen sich zwei veränderliche Kurvenpunkte eines Kegelschnitts so,	
daß die Berührungssehne ihres Schnittpunktes stets irgend einen zweiten Kegelschnitt berührt, so durchläuft ihr Schnittpunkt einen bestimmten dritten Kegelschnitt.	daß ihr Schnittpunkt irgend einen zweiten Kegelschnitt durchläuft, so berührt ihre Berührungs-Sehne stets einen bestimmten dritten Kegelschnitt.	daß ihre Verbindungs-Gerade stets Tangente irgend eines zweiten Kegelschnitts ist, so schneiden die Tangenten in jenen Kurvenpunkten einander stets auf einem bestimmten dritten Kegelschnitt.	daß die Kurventangenten in diesen Punkten einander stets auf irgend einem zweiten Kegelschnitt durchschneiden, so berührt die Verbindungsgerade jener beiden Kurvenpunkte stets einen bestimmten dritten Kegelschnitt.

Erkl. 368. Wird die polare Übertragung einer Kurve erweitert zur Betrachtung der Polarfigur zur Gesamtfigur zweier Kurven, so findet man, daß dieser Gesamtfigur wieder die Gesamtfigur zweier Kegelschnitte entsprechen muß, und zwar dergestalt, daß den gemeinsamen Tangenten der beiden ersten die gemeinsamen Kurvenpunkte der letzteren, und umgekehrt den gemeinsamen Schnittpunkten der ersteren die gemeinsamen Tangenten der letzteren entsprechen. Sind von den Elementen der einen Art etwa wegen der besonderen Lage der Kurven keine vorhanden, so können auch von den entsprechenden gemeinsamen Elementen keine vorhanden sein. Jedenfalls erkennt man, daß die Behandlung der gemeinsamen Tangenten zweier Kurven auf dieselbe Art von Untersuchung führt, wie die Behandlung der gemeinsamen Schnittpunkte zweier anderen Kegelschnitte, daß also jedenfalls auch die Anzahl gemeinsamer Tangenten und die Anzahl gemeinsamer Schnittpunkte zweier Kegelschnitte sich in genau gleichen Grenzen bewegen muß, nämlich zwischen 0 und 4.

Aufgabe 31. Man soll das Ergebnis der Erkl. 368 an zwei Kreisen nachprüfen.

Aufgabe 32. Man soll die polare Übertragung allgemeiner Kurven n-ter Klasse bezw. m-ter Ordnung in ihren Grundzügen aufstellen.

Erkl. 369. Eine Kurve kann man sich stets vorstellen als Punktreihe ihrer Kurvenpunkte oder als Strahlenbüschel ihrer Tangenten. Dabei braucht aber im allgemeinen durchaus nicht die Ordnungszahl dieser Punktreihe die gleiche zu sein wie die Klassenzahl dieses Strahlenbüschels. Nur bei den Kegelschnitten, und bei keinen Kurven höheren Grades, gilt diese einfache Beziehung, daß Ordnungszahl und Klassenzahl gleichzeitig gleich zwei sein müssen. Somit kann man also haben eine Kurve von n-ter Klasse und

Auflösung. Unter Klassenzahl eines Strahlenbüschels allgemeinster Art versteht man die Höchstzahl der Strahlen dieses Büschels, welche durch einen Punkt gehen können; unter Ordnungszahl einer Punktreihe allgemeinster Art versteht man die Höchstzahl von Punkten dieser Punktreihe, welche auf einer Geraden liegen können. Wird also die eine oder andere dieser beiden Figuren polar übertragen inbezug auf einen beliebig gewählten Kegelschnitt als Fundamentalkurve, so werden Punktreihen zu Strahlenbüscheln und umgekehrt, die durch einen Punkt gehenden Tangenten zu Punkten,

m-ter Ordnung und erhält durch deren polare Übertragung eine Kurve von n-ter Ordnung und m-ter Klasse.

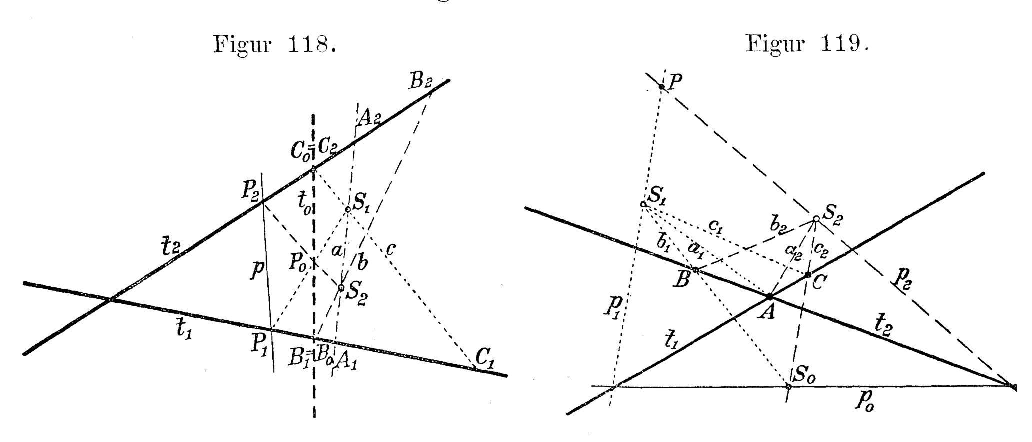
Erkl. 370. Für diesen vorhergehenden einfachsten Fall der Kurven des zweiten Grades liefert aber der nebenstehende Beweis noch eine weitere Grundlage für die Behauptung des in Erkl. 366 ausgesprochenen Satzes. Denn wenn der die Kurve umhüllende Strahlenbüschel nur höchstens zwei Strahlen gemeinsam haben kann mit einem Strahlenbüschel erster Klasse, so gehen eben an die Kurve höchstens zwei Tangenten aus einem Punkte, sie ist von zweiter Klasse. Und wenn bei polarer Abbildung die von den Kurvenpunkten der polaren Kurve gebildete Punktreihe mit einer Punktreihe erster Ordnung höchstens zwei Punkte gemeinsam haben kann, so wird die Kurve von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten, sie ist von zweiter Ordnung.

welche auf einer Geraden liegen, und die auf einer Geraden liegenden Punkte werden zu Geraden, welche durch einen Punkt gehen. Man erhält also die allgemeine Aussage:

Satz. Die polare Figur zu einer Kurve n-ter Klasse ist eine Kurve n-ter Ordnung; die polare Figur zu einer Kurve m-ter Ordnung ist eine Kurve m-ter Klasse.

Aufgabe 33. Man soll zwei beliebige dualistisch erzeugte Figuren aus den früheren Untersuchungen auf die Art ihrer Dualität durchprüfen.

Figur 118. Figur 119.



Erkl. 371. Es liegt durchaus keine Wahrscheinlichkeit vor, daß zwei so willkürlich, wenn auch dualistisch gegenüberstehende Figuren, wie 118 und 119, projektivische Verwandtschaft besitzen sollen. Denn wenn auch die Punkte $A_1 B_1 C_1$ auf t_1 die Strahlen $a_1 b_1 c_1$ durch S_1 projektivisch bezogen werden können, und selbstverständlich dann auch die Strahlen $a_2 b_2 c_2$ auf die Punkte $A_2 B_2 C_2$, so ist doch der Punkt P_1 ganz willkürlich hinzugewählt zu $A_1 B_1 C_1$ und p_1 zu $a_1 b_1 c_1$. Nur wenn also p_1 in der

Auflösung. Als Beispiel seien gewählt die Figuren 118 und 119, welche im zweiten Teile dieses Lehrbuches als Grundlage dienten für die Erzeugung der Kurven aus zwei projektivisch verwandten Punktreihen $t_1 t_2$ in Fig. 118 bezw. Strahlenbüscheln $S_1 S_2$ in Figur 119. Es entspricht also der Geraden t_1 in Fig. 118 der Punkt S_1 in Fig. 119, ebenso t_2 und S_2, die Punkte $A_{1,2}$ $B_{1,2}$ $C_{1,2}$ $P_{1,2}$ auf $t_{1,2}$ den Strahlen

Weise zu $a_1 b_1 c_1$ hinzugenommen würde, daß er der projektivisch entsprechende Strahl würde zur Punktgruppe $A_1 B_1 C_1 P_1$, dann wäre auch $a_2 b_2 c_2 p_2 \barwedge A_2 B_2 C_2 P_2$ u. s. w. Dann wäre aber immer noch die Wahl der $S_1 S_2$ in Figur 118 und $t_1 t_2$ in Figur 119 zu vielen Willkürlichkeiten unterworfen, als daß bei willkürlicher Auswahl projektivische Verwandtschaft der beiden Figuren zu erwarten wäre.

Erkl. 372. Immerhin zeigen die Figuren 118 und 119 eine so weitgehende Übereinstimmung in der Lage ihrer Elemente, daß man dieselben auch wohl als Musterbeispiele für projektivisch verwandte Figuren ansehen könnte. Denn nicht nur die Punktgruppen BACP auf t_1 und t_2 liegen mit den Strahlengruppen b a c p durch S_1 und S_2 in gleicher Reihenfolge, sondern auch für andere Elementengruppen beider Figuren stimmt das sogenannte Kriterium der Reihenfolge ganz befriedigend überein. So hat man als Strahlen durch Punkt P_0 in Figur 118 die Verbindungsgeraden nach dem Trägerschnittpunkt E_2, nach P_2, C_2, A_2, S_1, B_2, nach dem Schnittpunkt (bc), und in genau gleicher Reihenfolge in Figur 119 die Schnittpunkte des Strahles p_0 mit der Verbindungsgeraden der Scheitel e_2, mit p_2, c_2, a_2, t_1, b_2, mit der Verbindungsgeraden BC. Gleiche Übereinstimmung ergeben auch Strahlen durch P_1 bezw. P_2 der Figur 118 mit den entsprechenden Punkten auf p_1 bezw. p_2 in Figur 119.

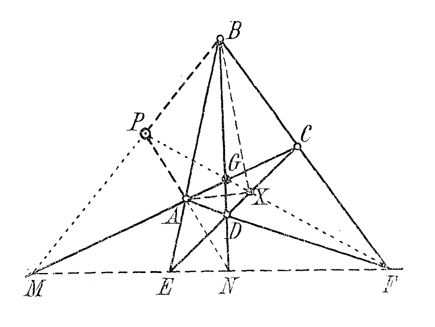
$a_{1,2}$ $b_{1,2}$ $c_{1,2}$ $p_{1,2}$ durch $S_{1,2}$, und alle weiteren Figurenteile sind die Erzeugnisse dieser Elemente, also die Klassenkurve der Figur 118 und die Ordnungskurve der Figur 119 stehen einander in allen Teilen dualistisch gegenüber. Aber es ist nicht durchgeführt, daß etwa die Strahlengruppe p_1 b_1 a_1 c_1 durch Scheitel S_1 der Fig. 119 projektivisch verwandt wäre zur Punktgruppe $P_1 B_1 A_1 C_1$ auf Träger t_1 der Fig. 118, oder daß etwa die Punktgruppe A_1 S_2 S_1 A_2 der Figur 118 projektivisch wäre zur Strahlengruppe a_1 t_1 t_2 a_2 der Figur 119. Man hat also in diesen Figuren zwar dualistisch entsprechende, aber nicht einmal projektivisch verwandte Gebilde, geschweige denn polar zugeordnete Figuren.

Aufgabe 34. Man soll zwei dualistisch entsprechende Figuren so herstellen, daß dieselben auch projektivische Verwandtschaft besitzen.

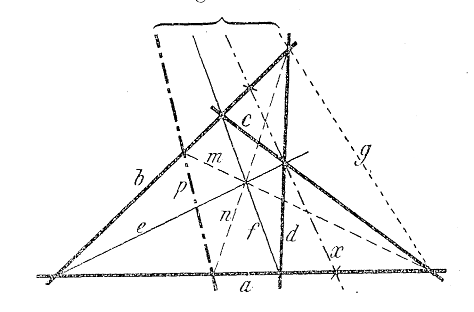
Erkl. 373. Die fünf Punkte ABCDP in Figur 120 bilden ein Fünfeck, die fünf

Auflösung. Vier Punkte ABCD eines Vierecks (Figur 120) kann man beliebig zuordnen zu vier Geraden abcd eines Vierseits (Figur 121). Um dann zu einem weiteren Punkte P (Figur 120) die projektivisch entsprechende Gerade (Figur 121) zu

Figur 120.



Figur 121.



Geraden abcdp in Figur 121 ein Fünfseit. Und die dualistische Gegenüberstellung beider Figuren liefert dieselben Ergebnisse wie die Betrachtung des Fünfecks und Fünfseits etwa in Figur 42 und 43 oder Figur 44 und 45 des ersten Teiles dieses Lehrbuches. Während aber dort die fünf Elemente jedesmal vollkommen willkürlich gewählt waren, sind jetzt nur vier Elemente beiderseits willkürlich, das fünfte nur noch in der einen von beiden Figuren. — In der Sprache der analytischen Geometrie, wo jeder Punkt zwei unabhängige Koordinaten hat und ebenso jede Gerade zwei willkürliche Konstanten (vgl. Erkl. 85), hätte man von Figur 120 zu Figur 121 eine Transformation mit acht willkürlichen Konstanten. Und diese Anzahl bleibt dieselbe bei Erweiterung der beiden Figuren zum Fünfeck, Sechseck u.s.w. bezw. zum Fünfseit, Sechsseit u. s. w., während diese Konstantenzahl bei der allgemeinen Auswahl der beiderseitigen Elemente sich unbegrenzt steigern müßte.

erhalten, verbindet man in Fig. 120 P mit zwei von den vier vorhandenen Punkten, etwa mit A und B, und beachtet die Strahlengruppen AB, AC, AD, AP und BA, BC, BD, BP. Konstruiert man dann auf den Geraden a und b der Figur 121 einen vierten Punkt so, daß die Punktgruppe (ab) (ac) (ad) (ap) projektivisch wird zur Strahlengruppe AB, AC, AD, AP, und die Punktgruppe (ba) (bc) (bd) (bp) projektivisch zur Strahlengruppe BA, BC, BD, BP, — so wird auch die Verbindungsgerade p der Figur 121 projektivisch verwandt zum Punkte P der Figur 120. — Und in gleicher Weise müßte jeder weitere Punkt oder jede weitere Gerade beider Figuren an die vorhandenen Elemente angeschlossen werden.

Aufgabe 35. Man soll dieselbe Aufgabe für die Figuren 118 und 119 durchführen.

Aufgabe 36. Es sollen zwei dualistische Figuren in der Beziehung hergestellt werden, daß sie als polare Figuren zu einer Kurve erscheinen müssen.

Erkl. 374. Während man in Aufgabe 34 bezw. 35 stets vier Elementen der einen Figur vier willkürliche Elemente der anderen Figur zuordnen durfte, kann hier die Anzahl der willkürlichen Elemente nicht größer sein, als die Anzahl der Bestimmungsstücke einer Kurve. Denn durch Festlegung der Kurve ist ja auch die eindeutige Beziehung unter allen Punkten und Geraden der Ebene festgelegt. In der Ausdrucksweise der analytischen Geometrie erscheint diese Reduktion der willkürlichen Elemente a's Überführung der Transformation mit 8 willkürlichen Konstanten in eine solche mit bloß 5 willkürlichen Konstanten, nämlich ebenso vielen,

Auflösung. I) Ist die Kurve als vollständig gegeben anzunehmen, so hat man dieselbe Aufgabe wie in Aufgabe 24 zu lösen durch Konstruktion des polaren Elements zu jedem einzelnen Figurenteil.

II) Ist die Kurve nicht kontinuierlich gegeben, sondern nur durch fünf Elemente bestimmt von der Art TTTTT, TTT(TP), T(TP)(TP), (TP)(TP)P, (TP)PPP, PPPPP, so wird dieselbe Auflösung ermöglicht durch die Aufgaben 14 bis 16 bezw. 18 bis 20 in einfacher Anwendung oder durch zweimalige Anwendung derselben Konstruktion nach Aufgabe 22 bezw. 23.

III) Liegt eine gegebene oder bestimmte Kurve überhaupt nicht vor, so ist die allgemeinste Lösung der

als zur Bestimmung einer Kurve zweiten Grades notwendig sind. Man kann also nicht mehr zu vier Elementen vier andere willkürlich zuordnen, auch nicht zu dreien drei willkürliche. Sondern man dürfte nur zu zwei beliebigen Punkten zwei beliebige Geraden zuordnen, und schon die einem dritten beliebigen Punkte zuzuordnende Gerade müßte durch besondere Konstruktion festgestellt werden. Diese allgemeinste Art der Lösung kann aber erst mit den Mitteln des dritten Abschnitts dieses Buches über involutorische Beziehungen gelöst werden.

Erkl. 375. Begnügt man sich aber mit der Auflösung im besonderen Fall, so hat man in den nebenstehenden Fällen a) und b) gerade den ersten und letzten Fall der zweiten Auflösung wiederzuerkennen. Auch die vier Zwischenfälle können natürlich in Anwendung gebracht werden, indem man c) zu vier Punkten ABCD der einen Figur zuordnet eine durch A gehende willkürlich gewählte Gerade a und zu BCD diejenigen drei Geraden, welche die durch (Aa) BCD bestimmte Kurve in den Punkten B, C, D berühren, indem man dieselben nach Paskal konstruiert. Oder man wählt d) zu drei Punkten ABC der einen Figur zwei willkürliche Geraden durch A B als a und b und konstruiert c nach Paskal als Tangente in C an die durch (Aa)(Bb)C bestimmte Kurve. Oder man wählt e) zu drei Geraden abc erst zwei beliebige auf den Geraden a und b liegende Punkte als AB und konstruiert C nach Brianchon als Berührungspunkt auf c an der durch (Aa)(Bb)c bestimmten Kurve. Oder endlich f) man wählt zu vier Geraden abcd einen willkürlich auf a liegenden Punkt A und konstruiert als entsprechende Punkte zu bcd die nach Brianchon zu konstruierenden Berührungspunkte der durch (Aa)bcd bestimmten Kurve. Auch hier folgt die Fortsetzung durch Zeichnung weiterer zugeordneter Elemente nach Aufgabe 34 oder Lösung II.

Aufgabe nicht ohne Verwendung der involutorischen Eigenschaften der polaren Figuren möglich. Man kann aber die Aufgabe zurückführen auf die vorhergehende Lösung II dieser Aufgabe, indem man nicht von beliebig gegebenen Elementen beider Figuren ausgeht, sondern von bestimmt ausgewählten. Da nämlich Kurvenpunkt und Tangente stets polar zugeordnet sind, so kann man entweder a) fünf Punkte ABCDE der einen Figur willkürlich auswählen und als deren zugeordnete Geraden der zweiten Figur die fünf Geraden nehmen, welche die durch die Punkte ABCDE bestimmte Kurve in diesen selben fünf Punkten berühren, denn diese können nach Paskal konstruiert werden. Oder man wählt b) fünf Gerade abcde der einen Figur willkürlich und bestimmt als deren zugeordnete Punkte der zweiten Figur die fünf Punkte, in welchen die durch die Tangenten abcde bestimmte Kurve diese Tangenten berührt, indem letztere nach Brianchon konstruiert werden. Von den so vorhandenen fünf Figurenelementen wird dann in gleicher Weise weiter konstruiert, wie in Aufgabe 34 oder wie in der vorhergehenden Lösung II dieser Aufgabe.

---

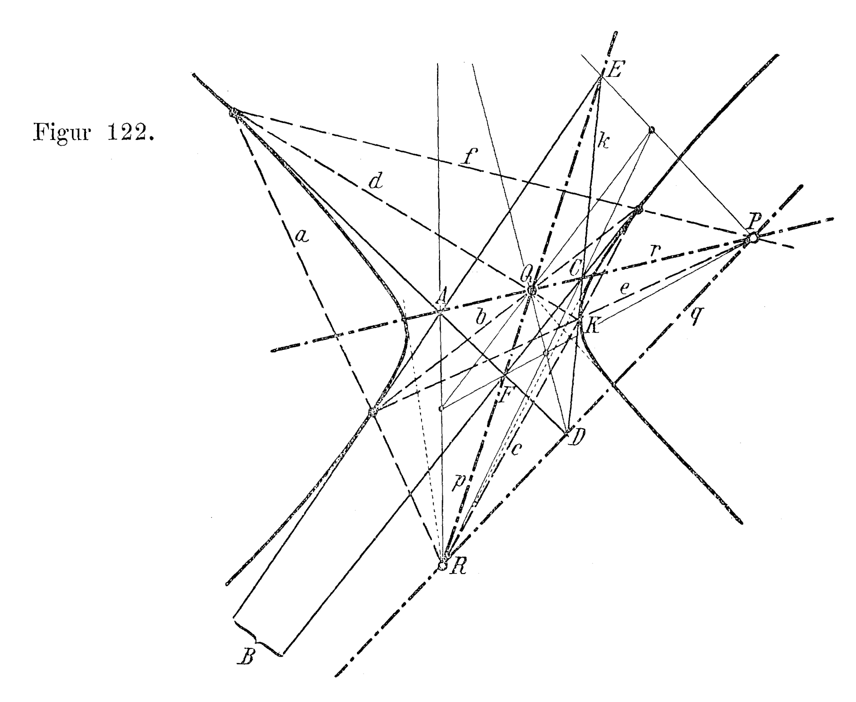
3. Aufgaben über das Polardreieck.

(Zu Abschnitt 1f.)

Aufgabe 37. Man soll die Lage eines Polardreiecks an der Hyperbel aufsuchen.



Figur 122.



Erkl. 376. Auch an Figur 122 ergeben sich dieselben Beziehungen, welche in Erkl. 96 für Figur 19 durchgeführt wurden: Sechs Gerade durch den inneren Punkt P, je acht Gerade durch Q und R. Von letzteren fehlt in Figur 122 nur die Gerade v du ch Q, welche je nach Lage von q den einen oder andern Ast der Hyperbel zu treffen hat. Denkt man sich den zweiten Kurvenschnittpunkt von q rechts oben, so geht auch v von Q nach rechts oben, denkt man sich den Punkt links unten, so läuft auch v nach links unten — beidemale zwischen b und QB. Auf der nicht schneidenden Geraden p liegen sechs Schnittpunkte, auf den schneidenden Geraden q, r liegen je acht besondere Punkte. Zudem hat man auch wieder die Tatsache, daß die vierten harmonischen Geraden durch die Ecken des Polardreiecks, die dünn ausgezogenen Linien PE, PF, QB, QD, RA, RC zu je dreien durch einen Punkt gehen, und daß deren Pole, die vierten harmonischen Punkte auf den Seiten des Polardreiecks, die Schnittpunkte (pe), (pf), (qb), (qd), (ra), (rc) zu je dreien auf einer Graden liegen.

Auflösung. Da nach Antwort der Frage 37 von den drei Eckpunkten des Polardreiecks stets nur ein einziger innerhalb der Kurve liegen muß, so hat man an der Hyperbel nur die Lage der durch diesen inneren Punkt P gehenden Sekanten e, f zu unterscheiden. Wie aus Figur 110 hervorgeht, können dieselben entweder den den Punkt P umschließenden Ast zweimal schneiden, und dann bleibt der andere Kurvenast ganz außer Verwendung, sodaß die entstehende Figur von Figur 19 sich nicht wesentlich unterscheidet. Dagegen treten beide Aeste in die Behandlung ein, wenn von den Sekanten e und f die eine oder andere oder beide die beiden Kurvenäste schneidet. Das ist schon in Figur 110a der Fall, wo das Polardreieck P I II entsteht. Letzterer Umstand ist auch in Figur 110b und Figur 122 durchgeführt in derselben Ausführung, wie Figur 19. Man kann auch von einer Seite des Polar-

Erkl. 377. In gleicher Weise, wie in voriger Erklärung die Erörterungen der Erkl. 36 auf die Figur 122 übertragen sind, lassen sich auch alle Ausführungen der Antworten 29, 30, 31, sowie der Erklärungen 96 bis 112 auf die Figur 122 übertragen. Es bleibt dem Studierenden überlassen, die Einzelheiten an Figur 122 alle durchzuführen. Dahin gehört auch die Vereinfachung der Figur 122 nach dem Vorgang, welcher aus Figur 19 zu Figur 20 geführt hatte und eine besondere Art der Polardreiecke in zweifacher Weise lieferte.

Erkl. 378. Daß auch unendlich ferne Punkte der Ebene als Eckpunkte eines Polardreiecks auftreten können, bezw. auch die unendlichferne Gerade als Seite eines Polardreiecks erscheinen kann, wird besonderer Erörterung unterzogen in dem von Durchmesser und Mittelpunkt der Kurve handelnden Abschnitte dieses Buches.

dreiecks ausgehend nach Figur 109 je zwei der dort bezeichneten Punkte EF als Ausgangspunkte der Tangenten des umgeschriebenen Vierseits auswählen. Jedoch erzeugen die vielerlei Vierecksarten, welche nach jener Figur entstehen können, auch keine verschiedenen Arten von Polardreiecken, als die ebengenannte einfache Unterscheidung: Von den drei Seiten des Polardreiecks kann die eine die Kurve gar nicht treffen, die anderen müssen die Kurve schneiden, und zwar entweder den einen Ast allein oder beide Aeste.

Das Polardreieck PQR bezw. pqr ist das Dreieck der Nebenecken des vollständigen Sehnenvierecks mit Seiten abcdef oder das Dreiseit der Nebenseiten des vollständigen Tangentenvierseits mit Ecken ABCDEF.

Aufgabe 38. Man soll Fig. 122 in Uebereinstimmung mit Fig. 20 behandeln.

Aufgabe 39. Es soll aus den Figuren 12 bis 15 abgeleitet werden, welche Lagen das Polardreieck bei Festhaltung einer Ecke annehmen kann.

Erkl. 379. In Fig. 12 S. 32 sind nicht mehr Polardreiecke vorhanden, als die drei nebenstehend aufgezählten BPQ, RPA, DPR, in Fig. 13 S. 33 sind im ganzen vier Polardreiecke vorhanden, nämlich außer den zur Strecke zusammengeschrumpften Tangenten PX und PY die vier Polardreiecke DPK, CPL, APR, BPQ. In Fig. 14 S. 37 sind außer den unendlich schmalen PX und PY nur die zwei Polardreiecke B_2PV_2, A_2PU_2 wirklich ausgezeichnet; nur angedeutet finden sich noch die zwei weiteren K_2PZ_2 und C_2PW_2; zu den Strahlen PVB und PUA dieser Figur sind die Pole nicht besonders festgelegt. In Fig. 15 S. 39

Auflösung. In den Figuren 12 bis 15 (S. S. 31, 52, 60) ist jeweils P der Pol der Geraden p, und die durch P laufenden Geraden a, b, c u. s. w. die Polaren der mit A_2 B_2 C_2 u. s. w. bezeichneten Punkte auf p. Demnach muß auch wieder die Verbindungsgerade PA_2, PB_2, PC_2 u. s. w. die Polare des Schnittpunktes (pa), (pb), (pc) sein, und folglich ist jedes der Dreiecke mit Seiten p, a und Ecken P, A_2, Seiten p, b, Ecken P, B_2 u. s. w. in Fig. 12 bis 15 ein Polardreieck.

In Figur 13 (und 14), wo der Eckpunkt P außerhalb der Kurve liegt, sieht man, daß die beiden Seiten der Ecke P bei Veränderung einer einzelnen sich in entgegengesetzten Umlaufs-Richtungen bewegen, nämlich beide auseinander

sind ausgezeichnet die zwei Polardreiecke V_2PB_2 A_2PU_2, angedeutet noch W_2PC_2, während die Ecke K_2 des Dreiecks Z_2PK_2 weit links außerhalb der Zeichnung zu liegen hätte.

Erkl. 380. Wenn in Fig. 12 die Ecke B oder K unendlich weit wegrückt, so entspricht als dritter Eckpunkt ein zwischen D und Q liegender Punkt, dessen Sekante nach [illegible] in ihren Kurvenschnittpunkten zwei mit p parallellaufende Tangenten liefert. Wenn in Figur 13 der Punkt D nach links oder A nach rechts unendlich weit fortrückt, so entspricht als dritter Eckpunkt ein Punkt zwischen K und R. Und wie der zweite Abschnitt dieses Lehrbuches zeigt, ist dieser Punkt der **Mittelpunkt** von XY, sein Strahl nach P ebenso wie die zuletzt gefundene Sekante der Fig. 12 ein **Durchmesser** der Kurve. Wenn aber ein Polardreieck zum Parallelstreifen ausartet, so ist seine dritte Seite stets ein Kurvendurchmesser. Und der Winkelwert des Dreiecks bei Spitze P geht bei Figur 12 vom Maximum nie unter einen gewissen Grenzwert herunter, während derselbe bei Figur 13 vom Maximum bis zum Wert 0 heruntergehen kann.

oder beide zu einander hin gegen die Tangenten x bezw. y von P an die Kurve. Es wäre also die Tangentenstrecke PX oder PY als ein unendlich schmal zusammengeschrumpftes Polardreieck anzusehen. Und andere Dreiecke sind dann in Figur 13 PCL, PDK, PBQ, PAR. Je weiter hinaus die Ecke A bezw. D rückt, desto weiter nach innen kommt der entsprechende dritte Eckpunkt.

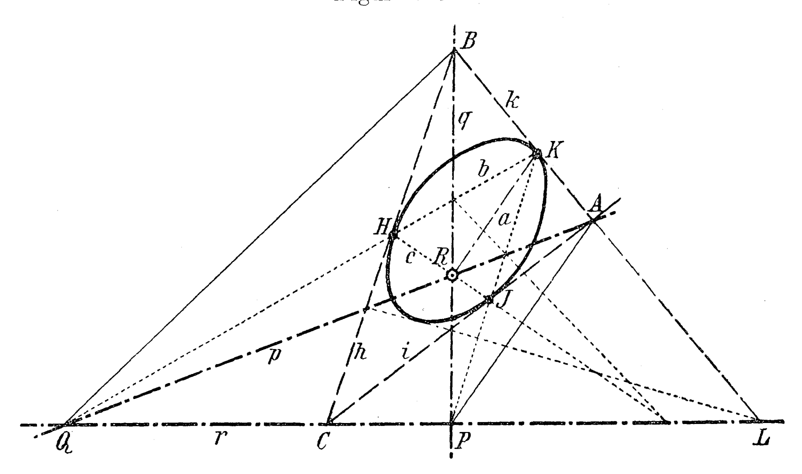
In Fig. 12 (und 15), wo der Eckpunkt P innerhalb der Kurve liegt, bewegen sich die Seiten der Ecke P bei Veränderung einer einzelnen in **gleicher Umlaufsrichtung**, also beide mit oder beide gegen den Uhrzeiger. Die Dreiecke in Fig. 12 wären nämlich BPQ, RPA, DPK u. s. w.

Aufgabe 40. Man soll beliebige mit einem **Polardreieck kollineare** Sehnen- bezw. Tangenten-Dreiecke untersuchen.

Erkl. 381. In Figur 123 ist mit I sowohl der Berührungspunkt der Tangente AC als der zweite Kurvenschnittpunkt der Sekante KP bezeichnet, und ebenso mit H sowohl der Berührungspunkt der Tangente BC, als auch der zweite Kurvenschnittpunkt der Sekante KQ. Daß beiderlei Punkte wirklich zusammenfallen **müssen**, kann durch folgende einfache Ueberlegung erkannt werden. Punkt A liegt auf k und p, folglich geht seine Polare durch K und P. Die Kurvenschnittpunkte dieser Polare sind aber die Berührungspunkte der von A an die Kurve gelegten Tangenten, folglich trifft die Gerade KP die Kurve im Berührungspunkt der von A an die Kurve gelegten Tangenten. — Und in umgekehrter Durchführung erhält man

Auflösung. I) Wählt man eine beliebige **Tangente** k einer Kurve und bringt sie zum **Schnitt** mit den **drei Seiten** pqr eines Polardreiecks, so hat man sowohl im ersten Schnittpunkte A als auch im zweiten Schnittpunkte B noch eine zweite Tangente an die Kurve. Und da P der Pol der Geraden p = AR ist, so muß nach Satz 2β die Gerade AP die vierte harmonische Gerade sein zu diesen zwei Tangenten und p, oder die zweite Tangente AI muß auf r den vierten harmonischen Punkt ausschneiden zu den Schnittpunkten von AR, AP und AK, oder zu Q, P und L. Ebenso wird im Punkte B die Gerade BQ nach dem Pol von q die vierte harmonische Gerade zu q und den beiden Tangenten aus B an die Kurve, oder die zweite Tangente aus B muß auf r den vierten har-

Figur 123.



am anderen Beispiel: Gerade b geht durch K und Q, folglich liegt ihr Pol im Schnittpunkt von k und q. Die Tangenten dieses Poles haben aber als Berührungssehne die Polare, also muß die von B an die Kurve gezogene Tangente im Kurvenschnittpunkt von b berühren.

Erkl. 382. Statt vom Punkte K bezw. Tangente k auszugehen und das Zusammentreffen von C mit r bezw. von c mit R zu beweisen, hätte man auch von Punkt H bezw. Tangente h oder von Punkt I bezw. Tangente i ausgehen können. Wie in nebenstehender Untersuchung C als vierter harmonischer Punkt zu PQL entsteht, so erhält man im zweiten Falle A als vierten harmonischen Punkt auf p zu Q, R und (hp), im dritten Falle B als vierten harmonischen Punkt auf q zu P, R und (iq). Oder wie in nebenstehender Untersuchung c als vierter harmonischer Strahl zu p, q und RK entsteht, so erhält man im zweiten Falle a als vierten harmonischen Strahl durch P zu q, r und PH, im dritten Falle b als vierten harmonischen Strahl durch Q zu q, r und QI. — Der Punkt K oder I oder H ist einzeln genommen jeweils völlig beliebig, sodaß keineswegs RK durch C oder HI durch L geht. Nur in dem in Figur 20 behandelten Einzelfalle würde solche Besonderheit hinzukommen.

Erkl. 383. Als Folgerung aus dem ersten und zweiten Teil der nebenstehenden

monischen Punkt ausschneiden zu den Schnittpunkten von BR, BQ und BK, also wieder zu P, Q und L. Demnach muß die Tangente BH und die Tangente AI durch denselben Punkt C auf r hindurchgehen, d. h. die drei Ecken des Tangentendreiecks ABC liegen auf den drei Seiten des Polardreiecks.

II) Wählt man einen beliebigen Kurvenpunkt K einer Kurve und verbindet ihn mit den drei Eckpunkten eines Polardreiecks, so hat man sowohl auf der ersten Verbindungsgeraden KP = a als auch auf der zweiten KQ = b noch einen zweiten Schnittpunkt mit der Kurve. Und da p die Polare von P ist, so muß nach Satz $2a\beta$ der Punkt (ap) der vierte harmonische Punkt sein zu den zwei Kurvenschnittpunkten K, I und P, oder der zweite Kurvenschnittpunkt auf a muß aus R projiciert werden durch den vierten harmonischen Strahl zu RP, RA und RK, also zu q, p und RK. Ebenso wird auf der Verbindungsgeraden b der Punkt (bq) der vierte harmonische Punkt zu den zwei Kurvenschnittpunkten K, H und Q, oder der zweite Kurvenschnittpunkt auf b wird aus R projiciert durch den vierten harmonischen Strahl zu RQ, RB und RK, also wieder zu p, q und RK.

Untersuchung würde man zunächst die beiden Einzelsätze aussprechen: Liegen zwei Eckpunkte eines Tangentendreiecks auf zwei Seiten eines Polardreiecks, so muß die dritte Ecke jenes auf der dritten Seite dieses liegen. — Gehen zwei Seiten eines Sehnendreiecks durch zwei Eckpunkte eines Polardreiecks, so muß die dritte Seite jenes durch die dritte Ecke dieses gehen.

Nach Satz 10 ist nun das Polardreieck PQR kollinear sowohl mit dem Tangentendreieck ABC als mit dem Sehnendreieck abc. Es müssen also auf einer Geraden liegen sowohl die Schnittpunkte (hp) (iq) (kr) als auch die Schnittpunkte (ap) (bq) (cr), und es müssen durch einen Punkt gehen sowohl die Verbindungsgeraden AP, BQ, CR als auch die Verbindungsgeraden HP, IQ, KR. Der erstere Schnittpunkt als Pol der erstgenannten Geraden, welche die Kurve schneidet (siehe Figur 123), liegt außerhalb der Kurve, der letztere Schnittpunkt liegt innerhalb der Kurve als Pol der letztgenannten Geraden (und zwar diese beiden nahe der Peripherie der Kurve). Denn laut Satz 10 muß das Polardreieck kollinear sein sowohl mit jedem der Kurve umgeschriebenen und dem Polardreieck eingeschriebenen Dreieck als auch mit jedem der Kurve eingeschriebenen und dem Polardreieck umgeschriebenen Dreieck.

Erkl. 384. Die im vierten Teile nebenstehender Untersuchung bewiesenen Sätze bringen die merkwürdige Beziehung, daß nicht nur einfach unendlich viele, sondern doppelt unendlich viele Elemente mit Seiten bezw. Ecken des Polardreiecks vereinigt liegen, liefern also eine höchste Stufe der Merkwürdigkeiten von Pol und Polare. Denn im Satz a gibt es erstens zu den konjugierten Geraden p und q je unendlich viele Tangenten wie h oder l oder k, und zweitens zu einer einzelnen dieser Tangenten unendlich viele Paare konjugierter Geraden wie p q durch R. Und im Satz b gibt es erstens zu den konjugierten Punkten P und Q je unendlich

Demnach müssen die Verbindungsgeraden RH und RI auf derselben Geraden c durch R liegen, d. h. die drei Seiten des Sehnendreiecks abc gehen durch die drei Eckpunkte des Polardreiecks.

III) Man erhält also den Doppelsatz:

Satz. Man kann einer Kurve beliebig viele Dreiecke umschreiben, deren Ecken auf den Seiten eines Polardreiecks liegen, und beliebig viele Dreiecke einschreiben, deren Seiten durch die Ecken eines Polardreiecks gehen. Jede Tangente der Kurve kann als eine Seite für ein Dreieck der ersteren, jeder Kurvenpunkt als ein Eckpunkt für ein Dreieck der letzteren Art auftreten.

IV) Nun kann aber Punkt R als Eckpunkt beliebig vieler Polardreiecke und ebenso r als Seite beliebig vieler Polardreiecke erscheinen, wenn nur P und Q zwei konjugierte Punkte auf r, bezw. p und q zwei konjugierte Geraden durch R sind. Daher gilt jener Satz nicht nur für die Schnittpunkte der beliebigen Tangente k mit p und q, sondern mit allen Paaren konjugierter Geraden durch R, denn jedes Paar derselben bildet mit R ein Polardreieck. Und ebenso gilt der Satz nicht nur für die Verbindungsgeraden des beliebigen Kurvenpunktes K mit P und Q, sondern mit allen Paaren konjugierter Punkte auf r, denn jedes Paar derselben bildet mit R ein Polardreieck. Daher erhält man folgende zwei Erweiterungen des obigen Satzes:

Satz a. Bringt man beliebige Tangenten einer Kurve zum Schnitt mit beliebigen Paaren konjugierter Geraden eines festen Punktes R, so liefern die zweiten Kurventangenten aus jenen beiden Schnittpunkten als dritten Schnittpunkt stets einen Punkt auf der Polare r des festen Punktes R.

Satz b. Verbindet man beliebige Kurvenpunkte mit beliebigen Paaren

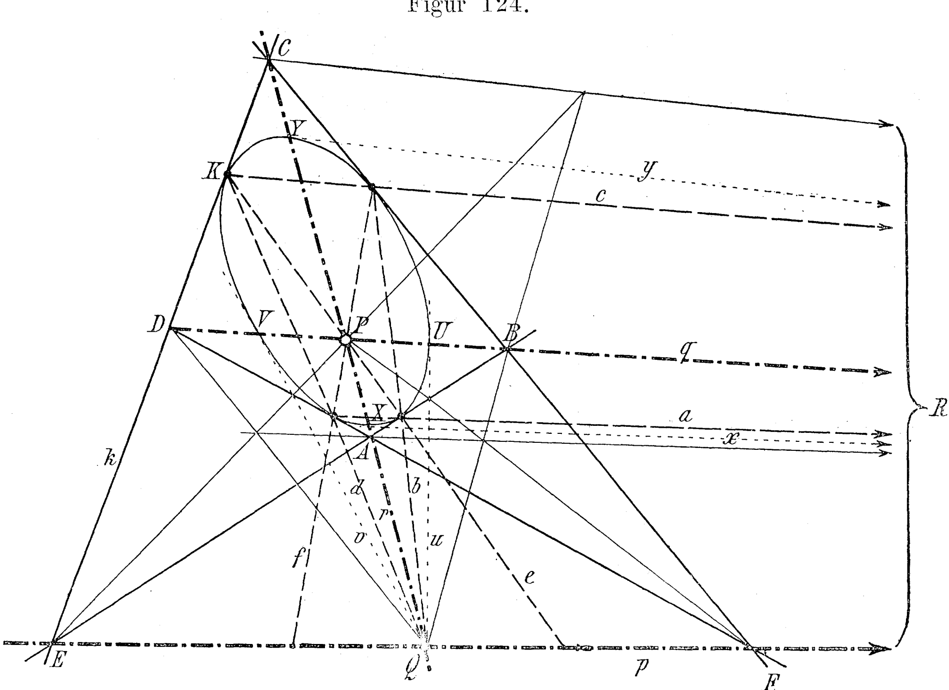
viele Punkte wie H, I, K und zweitens zu einem einzelnen dieser Punkte unendlich viele Paare konjugierter Punkte PQ auf r. Würde man allerdings diese auf doppelt unendlich vielfache Weise entstehenden Elemente einzeln feststellen wollen, so würde sich doch nur eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit herausstellen, da ja auf r nur einfach unendlich viele Punkte C, durch R nur einfach unendlich viele Geraden c möglich sind. Es tritt eben jeder Punkt C und jede Gerade c selbst unendlichfach als Ergebnis auf.

konjugierter Punkte einer festen Geraden r, so liefern die zweiten Kurvenschnittpunkte auf jenen beiden Verbindungsgeraden als dritte Verbindungsgerade stets eine Gerade durch den Pol R der festen Geraden r.

Aufgabe 41, 42. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben ist ein Polardreieck PQR und außerdem (41) zwei Kurvenpunkte K und L, (42) ein Kurvenpunkt K samt seiner Tangente k.

Auflösung. Angenommen PQR in Figur 122 oder 124 sei das gegebene Polardreieck und K sei einer der gegebenen Kurvenpunkte, zu welchem entweder (41) ein beliebiger

Figur 124.



Erkl. 385. Sind die Seiten c, d, e des Sehnenvierecks in Figur 122 oder 124 bekannt, so braucht man nicht alle die fehlenden Seiten a, b, f einzeln zu konstruieren, um das Viereck zu vervollständigen. Vielmehr liefert f schon a und b, oder a schon b und f, oder b schon f und a.

anderer Punkt L oder (42) die Tangente k hinzukommt. Dann muß PQR das Dreieck der Nebenecken sein für das der Kurve eingeschriebene Viereck, von welchem K der eine Eckpunkt ist. Man kennt also von Figur 124 die drei durch K und

Es bedarf also nur einmaliger Konstruktion der vierten harmonischen Geraden. Ferner kann bei Aufgabe 41 mit dem gegebenen Kurvenpunkte L ebenso verfahren werden wie mit K, sodaß man ohne Hinzunehmen Paskalscher Konstruktionen schon acht Kurvenpunkte erhält, nämlich drei neue zum Viereck mit K und drei neue zum Viereck mit L. Und alle acht liegen auf der gesuchten Kurve. Aufgabe 42 ist auch mit anderer Lösungsweise wiederholt in Aufgabe 51.

Erkl. 386. Da aus nebenstehender Auflösung hervorgeht, daß ein Polardreieck drei Kurvenelemente ersetzen kann, insbesondere zu einem Kurvenpunkte K drei andere hinzufinden läßt, so kann dieser Umstand auch Verwendung finden, wenn etwa von einer Kurve gegeben sind vier Tangenten und ein außerhalb liegender Kurvenpunkt K. Denn die vier Tangenten liefern nach Figur 122 oder 124 das Polardreieck PQR, und dieses liefert zu dem gegebenen Kurvenpunkte K noch drei neue hinzu. Dadurch kennt man von der gesuchten Kurve vier Tangenten und vier Kurvenpunkte. Die genauere Behandlung dieser Aufgabe erfolgt im späteren Kapitel über Involution.

P, K und Q, K und R gehenden Seiten e, d, c des Sehnenvierecks und findet dazu durch P noch f als vierte harmonische Gerade zu q, r und e, durch Q noch b als vierte harmonische Gerade zu p, r und d, durch R noch a als vierte harmonische Gerade zu p, q und c. Damit sind alle sechs Seiten, also auch alle vier Eckpunkte des Vierecks gefunden, und man kennt somit (41) die Kurvenpunkte (da), (ab), (bc), K = (cd), sowie als fünften Kurvenpunkt den gegebenen Punkt L oder im zweiten Falle (42) die vier Kurvenpunkte (da) (ab) (bc) (cd) sowie die Tangente k im letztgenannten Punkte. Aus diesen Stücken können aber weitere Elemente der Kurve konstruiert werden auf Grund des Satzes von Paskal mit gegebenen Stücken PPPPP oder PPP(PT). Und zwar wird besonders leicht die Vervollständigung im letzteren Falle durch (PT), weil die gegebene Tangente k (Fig. 124) auf den Seiten des Polardreiecks die drei Punkte EDC ausschneidet, deren Verbindungsgeraden mit den Kurvenpunkten (ab), (ad) und (bc) die Kurventangenten in diesen Punkten darstellen.

Aufgabe 43 bis 45. Eine Hyperbel zu konstruieren, von welcher gegeben sind ein Polardreieck und

(43) ein Kurvenpunkt und eine Asymptotenrichtung,
(44) die zwei Asymptotenrichtungen,
(45) eine Asymptote.

Auflösung. Die Aufgaben 43 und 44 gehen auf Aufgabe 41 zurück, da eine Asymptotenrichtung einen unendlich fern liegenden Kurvenpunkt bedeutet. — Aufgabe 45 geht auf Aufgabe 42 zurück, da eine Asymptote eine Kurventangente samt Berührungspunkt bedeutet.

Aufgabe 46. Eine Parabel zu konstruieren, von welcher gegeben ist ein Polardreieck und die Axenrichtung.

Erkl. 387. Axenrichtung der Parabel ist die den metrischen Eigenschaften

Auflösung. Die Aufgabe 46 geht auf Aufgabe 42 zurück, denn mit dem Namen der Parabel ist die unendlich ferne Gerade als Tangente gegeben. Und der unendlich ferne

der Parabel entnommene Bezeichnung für den unendlich fernen Punkt der Parabel. Vergl. auch Aufg. 54.

Punkt derselben ist der Berührungspunkt der Parabel mit der unendlich fernen Tangente.

Aufgabe 46a. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben ist ein Polardreieck, sowie ein Kurvenpunkt auf einer seiner Seiten und eine Tangente durch einen seiner Eckpunkte.

Aufgabe 47. Es seien gegeben von einer Parabel drei Tangenten und ein Kurvenpunkt, man soll drei weitere Kurvenpunkte derselben konstruieren.

Erkl. 388. Die nebenstehende Auflösung geschieht auf Grund der Erklärung 386. Diese und die verwandten Aufgaben sind mit dem Vorbehalt zu lösen, daß überhaupt Kurven der verlangten Art möglich sind.

Auflösung. Die drei Tangenten liefern mit der unendlich fernen Tangente ein umgeschriebenes Vierseit, also ein Polardreieck der Kurve; und dieses mit dem gegebenen Kurvenpunkte liefert ein eingeschriebenes Viereck, also drei neue Kurvenpunkte.

Aufgabe 48, 49. Von einer Hyperbel seien gegeben

(48) vier Tangenten und ein Kurvenpunkt,

(49) vier Tangenten und eine Asymptotenrichtung.

Man soll drei weitere Kurvenpunkte derselben konstruieren.

Auflösung. Die vier Tangenten liefern ein Tangentenvierseit, dessen Nebenseiten bilden ein Polardreieck, und dieses liefert zum gegebenen Kurvenpunkte drei neue.

Aufgabe 50, 51. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben ist ein Polardreieck PQR und außerdem

(50) zwei Tangenten k und l

(51) eine Tangente k samt ihrem Berührungspunkt K.

Erkl. 389. Sind die Eckpunkte CDE des Tangentenvierseits in Fig. 122 und 124 bekannt, so braucht man nicht alle drei fehlenden Ecken ABF einzeln zu konstruieren, um das Vierseit zu vervollständigen. Vielmehr liefert F schon A und B, oder A schon B und F oder B schon F und A. Es bedarf also nur einmaliger Konstruktion des vierten harmonischen Punktes. Ferner kann in Aufgabe 50 mit der gegebenen Kurventangente l ebenso verfahren werden wie mit k, so daß man ohne Hinzunehmen der

Auflösung. Angenommen PQR in Figur 122 oder 124 sei das gegebene Polardreieck und k sei die gegebene Tangente, zu welcher entweder (50) eine beliebige andere Tangente l oder (51) der Berührungspunkt K hinzukommt. Dann muß pqr das Dreiseit der Nebenseiten sein für das der Kurve umgeschriebene Vierseit, von welchem k die eine Seite ist. Man kennt also an Fig. 122 oder 124 die drei durch k und p, k und q, k und r gebildeten Eckpunkte E, D, C des Tangentenvierseits und findet dazu auf p noch F als vierten harmonischen Punkt zu Q, R, E, auf q noch B als vierten harmonischen Punkt zu P, R und D,

Konstruktion nach Brianchon acht Kurventangenten erhält, nämlich drei neue zum Vierseit mit k und drei neue zum Vierseit mit l. Und alle acht berühren die gesuchte Kurve. Aufgabe 51 ist auch bereits mit der anderen Lösungsweise vorausgegangen in Aufgabe 42.

Erkl. 390. Aus nebenstehender Auflösung geht hervor, daß ein Polardreiseit stets drei Kurvenelemente ersetzen kann, nämlich insbesondere zu einer Kurventangente k drei weitere hinzufinden läßt. Daher kann dieser Umstand auch Verwendung finden, wenn von einer Kurve gegeben sind vier Kurvenpunkte und eine außerhalb laufende Tangente k. Denn die vier Kurvenpunkte liefern nach Fig. 122 oder 124 das Polardreiseit pqr, und dieses liefert zu der gegebenen Tangente k noch drei neue hinzu. Dadurch kennt man von der gesuchten Kurve vier Kurvenpunkte und vier Tangenten, womit allerdings endgiltige Konstruktion nach Paskal oder Brianchon noch nicht ermöglicht ist.

auf r noch A als vierten harmonischen Punkt zu P, Q, C. Damit sind alle sechs Eckpunkte, also auch alle vier Seiten des Vierseits gefunden, und man kennt somit (50) die Kurventangenten DA, AB, BC, k = DC, sowie als fünfte Tangente die gegebene Gerade l, oder im zweiten Falle (51) die vier Kurventangenten DA, AB, BC, CD, sowie den Berührungspunkt K auf der letztgenannten Tangente. Aus diesen Stücken können aber weitere Elemente der Kurve konstruiert werden auf Grund des Satzes von Brianchon mit gegebenen Stücken TTTTT oder TTT (TP). Und zwar wird besonders leicht die Vervollständigung im letzteren Falle durch (TP), weil der gegebene Kurvenpunkt K in Fig. 124 durch seine Verbindungsgerade mit den Eckpunkten des Polardreiecks die drei Schnittpunkte mit den Kurventangenten DA, AB, BC liefert, in welchen diese Tangenten die Kurve berühren.

Aufgabe 52. Eine Hyperbel zu konstruieren, von welcher gegeben sind ein Polardreieck und eine Asymptote.

Erkl. 391. Dieselbe Aufgabe ist als Aufgabe 45 nach der andern Methode gelöst. Man erhält also ebenso leicht vier Tangenten nebst unendlich fernem Berührungspunkt auf einer derselben oder vier Kurvenpunkte nebst Tangente durch einen unendlich fern liegenden derselben, sodaß aus den acht Elementen PPPTTT(P_∞T) die weitere Konstruktion je nach Bedarf nach Paskal oder Brianchon vollzogen werden kann.

Auflösung. Die Aufgabe geht zurück auf Aufgabe 51, da die Asymptote eine Tangente samt unendlich fernem Berührungspunkt P_∞ bedeutet. Diese Tangente liefert mit dem Polardreieck im ganzen vier Tangenten, und auf einer derselben kommt nun außerdem der unendlich fern liegende Berührungspunkt P_∞. Dabei hat dieses Tangentenvierseit keinerlei Besonderheit aufzuweisen, wie das Sehnenviereck in Aufgabe 45.

Aufgabe 53, 54. Eine Parabel zu konstruieren, von welcher gegeben sind ein Polardreieck und

(53) eine Tangente

(54) die Axenrichtung.

Auflösung. Die Aufgabe 53 geht zurück auf Aufgabe 50. Dabei ist aber zu unterscheiden, ob man die im Endlichen gegebene Tangente zur Konstruktion des Tangentenvierecks verwenden will oder die

Erkl. 392. Die Aufgabe 54 ist eine Wiederholung der Aufgabe 46 nach der anderen Lösungsart. Man erhält also hier entweder nach 46 drei im Endlichen und einen unendlich fern liegenden Kurvenpunkt nebst unendlich ferner Tangente im letzteren, oder nach 54 drei im Endlichen und eine unendlich fern verlaufende Kurventangente nebst Berührungspunkt auf letzterer, sodaß mit den acht Elementen $PPPTTT(T_\infty P_\infty)$ die weitere Konstruktion je nach Bedarf nach Paskal oder Brianchon vollzogen werden kann. — Für die besondere Art des Tangentenvierseits für nebenstehende zweite Lösung von 53 bezw. für Aufgabe 54 kann man die Figur 37 III des I. Teiles als Vorbild genommen denken, wenn man als oberen Abschluß zwischen die beiden unendlich fernen Punkte die unendlich ferne Gerade einsetzt.

unendlich ferne Tangente. Im ersten Falle erscheint keine besondere Eigenschaft des Tangentenvierseits, indem die besondere unendlich ferne Gerade erst als fünfte dazukommt. Im zweiten Falle aber, welcher für Aufgabe 54 unbedingt genommen werden muß, dient die unendlich ferne Gerade als Tangente k. Dadurch nimmt das Vierseit die besondere Gestalt an, als ob etwa in Figur 124 die Strecke CD ins Unendliche verschoben und das Viereck DABC dort offen bliebe, wobei auch noch die Seite AB zur Strecke p parallel wird. Besondere Vereinfachung erfährt letztere Lösung dadurch, daß die den unendlich fernen Punkten ECD harmonisch zugeordneten Punkte FAB die Mittelpunkte der Seiten des Polardreiecks werden.

Aufgabe 55, 56. Von einer Kurve kennt man

(55) vier Tangenten und einen beliebigen Kurvenpunkt,

(56) vier Kurvenpunkte und eine beliebige Tangente.

Welche weiteren Elemente sind auffindbar?

Andeutung. Man vergleiche die Erklärungen 386 und 390.

Aufgabe 57. Es seien gegeben vier Kurvenpunkte einer Parabel. Man soll drei Tangenten derselben konstruieren.

Erkl. 393. Ueber das entstehende Tangentenviereck vergl. Auflösung der Aufgabe 54 und Erkl. 392. Die Aufgabe ist nicht unbedingt lösbar.

Auflösung. Die vier Kurvenpunkte liefern ein Sehnenviereck, also ein Polardreiseit, und dieses mit der bekannten unendlich fernen Tangente liefert ein Tangentenviereck, also drei weitere Tangenten.

Aufgabe 58 bis 60. Von einer Hyperbel sind gegeben eine Tangente und dazu

(58) vier beliebige Kurvenpunkte,

Auflösung. In jeder dieser drei Aufgaben sind vier Kurvenpunkte gegeben, da die Richtung einer Asymptote deren unendlich

(59) drei beliebige Kurvenpunkte und eine Asymptotenrichtung,

(60) zwei beliebige Kurvenpunkte und beide Asymptotenrichtungen.

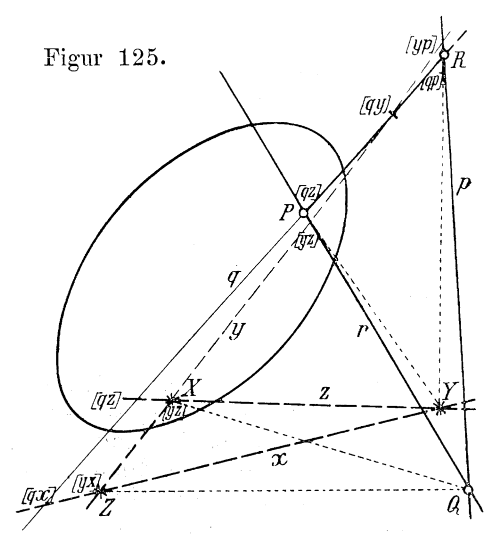
Man soll drei weitere Tangenten derselben konstruieren.

fernen Punkt bedeutet. Diese vier Kurvenpunkte liefern ein Sehnenviereck, also ein Polardreiseit, und dieses zusammen mit der gegebenen Tangente ein Tangentenvierseit, also drei weitere Tangenten. Das Sehnenviereck hat im ersten Falle kein Element im Unendlichen, im zweiten Fall eine Ecke, nach welcher parallele Seiten führen, im dritten Falle eine Seite samt deren zwei Ecken.

Erkl. 394. Für alle Aufgaben der Art 47 bis 49 und 55 bis 60 gilt der Vorbehalt, daß überhaupt aus den gegebenen Stücken die Kurve konstruierbar ist. Denn es kann vorkommen, daß zwei, eine oder keine Lösung entsteht. Entscheidung hierüber erfolgt erst im Abschnitt über Involutionen an den Kurven. Bei denselben Aufgaben ist hier keine vollständige Konstruktion möglich, weil trotz der aufzufindenden acht Elemente keine zwei sich in vereinigter Lage (PT) befinden.

Aufgabe 61. Die Beziehungen zwischen zwei Polardreiecken derselben Kurve sollen festgestellt werden.

Figur 125.



Auflösung. 1) Sind PQR und XYZ in Figur 125 zwei Polardreiecke zur gleichen Kurve, so entstehen auf einer Seite q des einen Dreiecks die fünf Schnittpunkte mit den übrigen Seiten (qp)=R, (qr)=P, (qx), (qy), (qz). Zu jedem dieser auf der Geraden q liegenden Punkte enthält die Figur auch die Polare, nämlich die fünf durch den Pol von q gehenden Geraden QP=r, QR=p, QX, QY, QZ. Und nach dem Satze 8a muß die Gruppe der letztgenannten Geraden projektivisch verwandt sein mit der Gruppe des erstgenannten Punkte.

2) Verbindet man nun einerseits jene fünf Punkte auf q der Reihe nach mit irgend einem Eckpunkt des zweiten Polardreiecks, z. B. mit Y, so entsteht in Y eine Gruppe von Projektionsstrahlen, welche wegen perspektivischer Lage ebenfalls projektivisch verwandt ist mit jener Punktgruppe auf q, nämlich YR, YP, Y (qx) oder YZ, Y (qy), Y (qz) oder YX. Unter Auslassung von (qy)

Erkl. 395. Statt auf der Seite q die Schnittpunkte mit den fünf übrigen Seiten bezw. im Punkte Q die Verbindungsstrahlen nach den fünf übrigen Eckpunkten zum Beweise zu verwenden, könnte man auch auf jeder anderen Seite p, r, x, y, z die Seitenschnittpunkte und in jeder anderen Ecke P, R, X, Y, Z die Eckenverbindungsgeraden verwenden.

Jedesmal wird derselbe Gang der Beweisführung entstehen. Auch braucht für den zweiten und dritten Teil der nebenstehenden Auflösung nicht notwendigerweise der dualistische Buchstabe verwendet werden. Vielmehr kann auch der eine Teil nachweisen, daß die Punkte Q, R, X, Y aus P und Z durch projektivische Büschel als Kurvenpunkte erzeugt werden, und der andere Teil etwa, daß p q y z auf r und x projektivische Punktreihen ausschneiden und folglich Kurventangenten sind.

Erkl. 396. Die dualistische Durchführung nebenstehender Auflösung läßt aber außer der Vereinfachung des Verfahrens auch die andere Tatsache erkennen, daß, wenn der eine Teil geleistet ist, dann der andere gar nicht mehr vollständig bewiesen zu werden braucht, vielmehr aus dem ersten auf Grund der Dualität entnommen werden kann. Denn aus der allgemeinen Polaritätsbeziehung folgt, daß wenn PQRXYZ die Punkte einer Kurve bilden, dann die polar zugeordneten Geraden pqrxyz die Tangenten der zur vorigen Kurve polar zugeordneten Kurve bilden müssen. Man könnte also dem nebenstehenden Satze bereits seinen vollen Ausdruck geben, wenn auch nur die eine der beiden nebenstehenden Durchführungen vollständig geleistet wurde. Und die beiden Kurven, deren eine durch die sechs Eckpunkte geht, während die andere die sechs Seiten berührt, unterliegen all den Einzelbeziehungen der dualistisch zugeordneten Kurven.

Erkl. 397. Will man in Figur 125 sich eine Vorstellung von den beiden Kurven machen, so ist dies besonders leicht für die von den sechs Seiten pqrxyz umhüllte Klassen-Kurve, denn diese sechs Seiten bilden deutlich ein konvexes Sechsseit, innerhalb dessen die Kurve als Ellipse liegen muß. Die Ordnungskurve durch die Punkte PQRXYZ dagegen ist offenbar eine Hyperbel mit zwei sehr schlanken Aesten durch PXZ und RYQ. Wo diese Hyperbel unterhalb X und ober-

kann man also ansetzen a) q (p, r, x, z) $\barwedge$ Q (P, R. X, Z) und b) q (p, r, x, z) $\barwedge$ Y (R, P, Z, X). Hieraus folgt aber c) Q (P, R, X, Z) $\barwedge$ Y (R, P, Z, X). Bringt man hier noch den Satz 6b der Erklärung 315 im I. Teile zur Anwendung, daß eine projektivische Verwandtschaft zweier Gruppen von je vier Elementen bestehen bleibt, wenn in der einen Gruppe zwei Elementepaare vertauscht werden, so erhält man d) Q (P, R, X, Z) $\barwedge$ Y (P, R, X, Z). Hiernach werden aber die Punkte P, R, X, Z erzeugt als Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektivisch verwandten Büschel mit Scheiteln Q und Y, d. h. P, R, X, Z liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung, welche zugleich die Büschelscheitel Q und Y als Kurvenpunkte enthält.

3) Bringt man dagegen anderseits jene fünf Strahlen durch Q der Reihe nach zum Schnitt mit irgend einer Seite des zweiten Polardreiecks z. B. mit y, so entsteht auf y eine Gruppe von Schnittpunkten, welche wegen perspektivischer Lage ebenfalls projektivisch verwandt ist mit jener Strahlengruppe durch Q, nämlich (yr), (yp), y (QX) oder (yz), y (QV), y (QZ) oder (yx). Unter Auslassung von QY kann man also wieder ansetzen a) Q (P, R, X, Z) $\barwedge$ q (p, r, x, z) und b) Q (P, R, X, Z) $\barwedge$ y (r, p, z, x). Hieraus folgt zunächst c) q (p, r, x, z) $\barwedge$ y (r, p, z, x), und unter Anwendung desselben Vertauschungs-Satzes wie oben, d) q (p, r, x, z) $\barwedge$ y (p, r, x, z). Hiernach werden die Geraden p, r, x, z gebildet als Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektivisch verwandten Punktreihen auf den Trägern q und y, d. h. p, r, x, z umhüllen eine Kurve zweiter Klasse, welche zugleich die Träger q und y als Tangenten besitzt.

halb P die gezeichnete Ellipse durchsetzt, hat dieser Kurvenpunkt der Kernkurve als Polare die eigene Tangente der Kernkurve zugleich als Tangente der dem Dreiseit pqr ein- und dem Dreiseit xyz angeschriebenen Klassenkurve nahe bei Y bezw. bei R. Diese Klassenkurve kommt in der Gegend von Punkt P an die Kernkurve heran, und wo sie die letztere überschreitet einwärts bezw. auswärts, dort sind umgekehrt die Berührungspunkte gemeinsamer Tangenten der Hyperbel und der Kernkurve.

4) Man erhält also die merkwürdige Eigenschaft:

Satz. Von zwei Dreiecken, welche derselben Kurve als Polardreiecke zugehören, liegen die Eckpunkte als Kurvenpunkte auf einer zweiten Kurve zweiter Ordnung, und umhüllen die Seiten als Tangenten eine dritte Kurve zweiter Klasse, wobei die zweite und dritte Kurve einander inbezug auf die erste polar zugeordnet sind.

Erkl. 398. Will man nebenstehenden Satz anwenden auf die Polardreiecke PQR und PEF der Figur 21 S. 58, so erhält man wegen der zwei zusammenfallenden Eckpunkte P bezw. Seiten p auch keine gewöhnliche, sondern eine ausgeartete Kurve, indem eben P und p als Träger aller Punkte der Punktkurve II. Ordnung und aller Strahlen des Strahlenbüschels II. Klasse erscheinen.

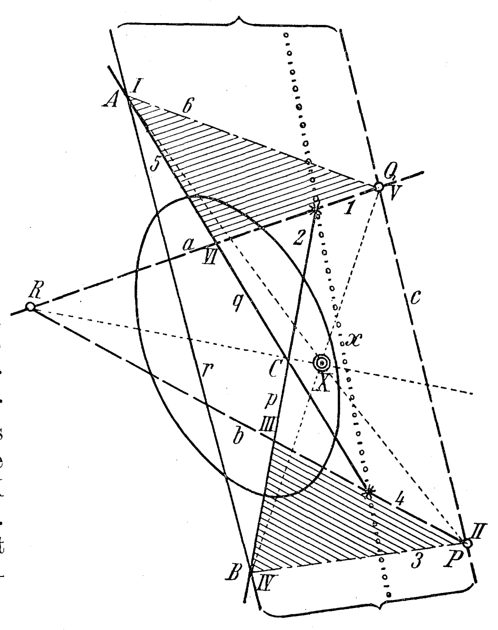
Aufgabe 62. Aus der Lage der Elemente eines Polardreiecks sollen Schlüsse gezogen werden auf die Lage der Kurven des vorigen Satzes.

Aufgabe 63. Man soll mittels des vorigen Ergebnisses eine Beziehung zwischen zwei polar zugeordneten Dreiecken aufstellen.

Erkl. 399. Die nebenstehende Untersuchung ist doppelt geführt, indem sowohl Punkt X als auch Gerade x gleichzeitig zum Gegenstand der Erörterung gemacht wird. Ebenso wie in der vorigen Auflösung der Aufgabe 61 wäre dies nicht notwendig, vielmehr genügt der Beweis für den einen der beiden Teile. Sowie die erste Hälfte (für Punkt X) erwiesen ist, folgt die zweite aus der Dualität, und umgekehrt folgt aus der zweiten (für x) dualistisch die erste. Ebenso ist aus der Dualität zu erkennen, daß Punkt X der Pol von x und x Polare von X ist. Dies ergibt auch die Figur, indem ja x die Punkte (ap) und (bq) verbindet, während durch X die Geraden AP und BQ hindurchgehen. Über die Beziehungen der Kollinearität vergl. man noch Erklärung 383 und Erklärung 106.

Auflösung. Angenommen es seien in Figur 126 p q r die Polaren zu

Figur 126.



Erkl. 400. Zur Beweisführung sind in Figur 126 verwendet die Polardreiecke A (aq) Q und B (bp) P. Man hätte ebenso gut auch A (ar) R mit demselben B (bp) P oder mit einem andern Polardreieck zusammennehmen können, und hat nur bei der Anordnung der Sechsecke nach Paskal bezw. Brianchon darauf zu achten, daß deren Gegenelemente mit zugehörigen Elementen der beiden polaren Dreiecke zusammengelegt werden. Daß in Figur 126 die Geraden mit einander und folglich auch mit x fast parallel erscheinen, ist eine zufällige Eigenschaft der Figur und hängt damit zusammen, daß die Gerade RC, welche die Polare des Punktes (rc) ist, zufällig fast mitten durch die Kurve hindurchgeht. Man vergleiche darüber den folgenden Abschnitt über Kurvendurchmesser.

Erkl. 401. Besondere Beachtung erfordert die Zuordnung der Elemente beider polar zugeordneten Dreiecke. Nur AP, BQ, CR gehören zusammen und ap, bq, cr. Keine anderen Eckenpaare liefern Verbindungsgeraden durch einen Punkt, keine anderen Seiten Schnittpunkte auf einer Geraden. Denn zu P ist Polare p, also zugeordnet der Punkt des Polardreiecks, welcher von den beiden anderen Polaren qr gebildet sind, nämlich A. Man hat also einen der Fälle vor sich, wo richtige Buchstabierung die Arbeit der Beweisführung schon wesentlich zu erleichtern imstande ist.

den Punkten PQR, also nach Satz 7 auch die Seiten PQ = c, QR = a, RP = b die Polaren der Schnittpunkte (pq) = C, (qr) = A, (rp) = B, so daß die Dreiecke ABC und PQR polar zugeordnet sind. Dann muß nach demselben Satze 7 auch die Verbindungsgerade AQ die Polare des Schnittpunktes (aq) und die Verbindungsgerade BP die Polare des Schnittpunktes (bp) sein, und folglich sind die beiden Dreiecke A(aq)Q und B(bp)P zwei Polardreiecke der vorliegenden Kurve. Nach dem Satze in der Auflösung der vorigen Aufgabe 61 sind daher ihre sechs Eckpunkte A, P, (bp), B, Q, (aq) Punkte auf einer Kurve zweiter Ordnung, und ihre sechs Seiten a, p, BP, b, q, AQ Tangenten an eine Kurve zweiter Klasse, und man kann daher jene sechs Punkte in der angegebenen Reihenfolge als Eckpunkte I bis VI eines Paskalschen Sehnensechsecks, und diese sechs Geraden in der angegebenen Reihenfolge als Seiten 1 bis 6 eines Brianchonschen Tangentensechsseits zusammennehmen. Dann müssen im ersteren Sechseck die Schnittpunkte der Gegenseiten I II und IV V, II III und V VI, III IV und VI I auf einer Geraden liegen, im letzteren Sechsseit die Verbindungsgeraden der Gegenecken 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 durch einen Punkt gehen. Durch Vergleichung dieser Beziehung mit den Elementen der beiden polaren Dreiecke an Figur 126 erkennt man aber, daß die Paskalsche Gerade, auf welcher die Verbindungsgeraden I II = AP und III IV = BQ ihren Schnittpunkt haben, eben die Gerade CR ist, bezw. daß der Punkt des Brianchon, durch welchen die Verbindungsgerade der Schnittpunkte 12 = (ap) und 45 = (bq) hindurchgeht, eben der Schnittpunkt (cr) ist. Daher gehen die Verbindungsgeraden der Eckpunkte beider polaren Dreiecke AP, BQ, CR durch einen Punkt X, und die Schnittpunkte der Seiten beider polaren Dreiecke ap, bq, cr liegen auf einer Geraden x. Man erhält also den Satz:

Satz. Ein Dreieck und das ihm polare Dreiseit liegen immer kollinear oder perspektivisch, d. h. die Verbindungsgeraden der zugehörigen Eckpunkte gehen durch einen Punkt, die Schnittpunkte der zugehörigen Seiten liegen auf einer Geraden, wobei auch diese Kollineationsaxe jenem Kollineationscentrum polar zugeordnet ist.

Aufgabe 64. Man soll die Ausdehnung des vorigen Satzes auf zwei polar zugeordnete Vierecke prüfen.

---

4. Aufgaben über die konjugierten Elemente.

(Zu Abschnitt 1g.)

Aufgabe 65. Es sollen aus den früheren Untersuchungen Beispiele für das Auftreten konjugierter Elemente aufgestellt werden.

Erkl. 402. Unter Berücksichtigung der Beziehungen zwischen dem Punkt P und den Punkten von p oder zwischen dem Punkt Q und den innerhalb der Kurve liegenden Punkten von q kann man dem in Erkl. 118 ausgesprochenen Satz auch die folgende Gestalt geben:

Satz. Ein Punkt innerhalb der Kurve ist von jedem ihm konjugierten äußeren Punkte, und ein Punkt außerhalb der Kurve ist von jedem ihm konjugierten inneren Punkt harmonisch getrennt durch die auf ihrer Verbindungsgeraden liegenden beiden Kurvenschnittpunkte. Und ebenso erhält der Satz in Erkl. 119 die veränderte Gestalt:

Satz. Eine die Kurve nicht schneidende Gerade ist von jeder ihr konjugierten Sekante, und eine Sekante der Kurve ist von jeder ihr konjugierten nicht schneidenden Geraden harmonisch getrennt durch die beiden von ihrem Schnittpunkt ausgehenden Kurventangenten.

Auflösung. Da nach der Definition der Polarität bezw. der konjugierten Elemente die der Kurve umgeschriebenen bezw. eingeschriebenen Vierecke zur Erzeugung polarer Gebilde führen, so kann man an Figur 124 feststellen, daß je zwei Nebenseiten eines Tangentenvierseits konjugierte Geraden sind, und daß die sämtlichen Punkte einer Nebenseite konjugiert sind zum Schnittpunkt der beiden andern, bezw. anderseits daß je zwei Nebenecken eines Sehnenvierecks konjugierte Punkte sind, und daß die sämtlichen Strahlen durch eine Nebenecke konjugiert sind zur Verbindungsgeraden der beiden anderen Nebenecken. Nun bilden aber die Nebenseiten des Tangentenvierseits ein Polardreiseit bezw. die Nebenecken des Sehnenvierecks ein Polardreieck, folglich kann man auch feststellen: Je zwei Eckpunkte bezw. je zwei Seiten eines Polardreiecks sind zwei konjugierte Elemente. Und ein Eckpunkt eines Polardreiecks ist konjugiert zu jedem Punkt auf der Gegenseite, eine Seite eines Polardreiseits ist konjugiert zu jedem Strahl durch die Gegenecke.

Aufgabe 66. Man soll eine Beziehung der konjugierten Geraden zu einem Tangentendreiseit herleiten.

Erkl. 403. Wählt man auf der Polaren a des durch die Tangenten EA und AD

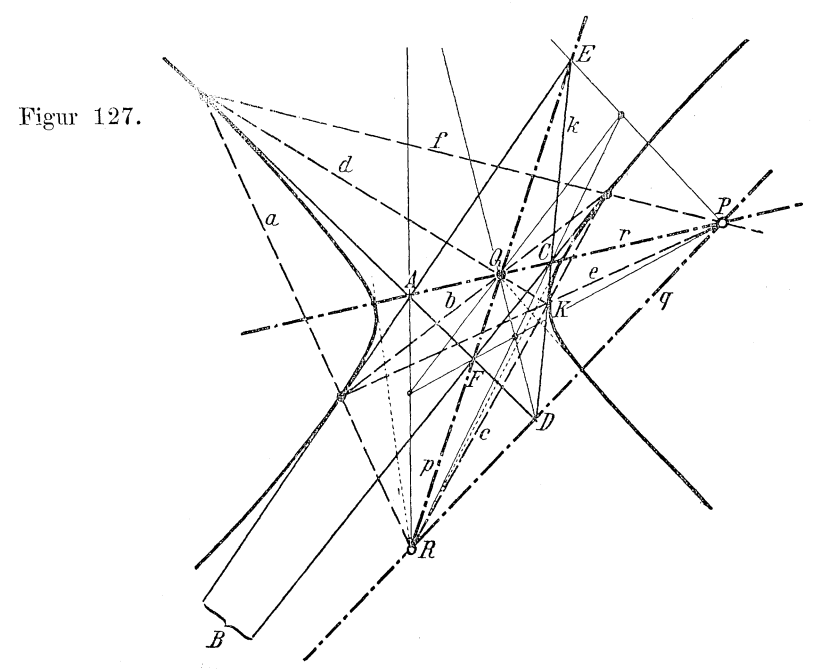
Auflösung. Ein Tangentendreiseit erhält man aus dem Vierseit durch Weglassung einer Tangente. Wird also in Figur 124 oder 127 das Dreiseit ADE der Tangenten DE,

festgelegten Punktes A willkürlich den Punkt R, so ist auch festgelegt dessen Polare r durch A, und sodann gibt es durch R beliebig viele Paare konjugierter Geraden. Eine erste derselben, etwa RD, liefert auf r die Ecke P des Polardreiecks und die Ecken D und B des Tangentenvierseits. Dann ist aber festgelegt durch R und P die dritte Ecke Q des Polardreiecks, und auch die zweite konjugierte Gerade durch R ist nicht mehr willkürlich, sondern sie muß durch Q hindurchgehen und muß die Eckpunkte F und E des Tangentenvierseits ausschneiden. Man kann also letztere entweder dadurch festlegen, daß man zu q die konjugierte Gerade p konstruiert oder dadurch, daß man aus den Schnittpunkten D und B auf q die Tangenten DC und BC zeichnet und mittels dieser die Figur vervollständigt.

Erkl. 404. Der willkürlich gewählte Punkt auf der Polare des verwendeten Schnittpunktes der zwei Tangenten in Erkl. 403 ist an der Figur 124 und 127 jedesmal ein außerhalb der Kurve liegender Punkt R. Es kann aber ebensowohl auch ein Punkt der Polare innerhalb der

EA, AD festgehalten, so bleibt von den übrigen Elementen der Figur ebenfalls unverändert das Sehnendreieck ade der Polaren jener Eckpunkte, wovon a durch R, d durch Q, e durch P hindurchgeht. Die Vervollständigung der Figur zum Tangentenvierseit kann nun geschehen, indem man entweder nach gewöhnlicher Weise auf einer der Tangenten k = DE (bezw. auf EA oder AD) den Punkt C (bezw. B oder F) willkürlich auswählt und die vierte Tangente hindurchlegt, oder aber auch, indem man auf der Berührungssehne a (bezw. d oder e) den Punkt R (bezw. Q oder P) willkürlich auswählt und hieraus das Polardreieck bezw. das Tangentenvierseit ergänzt. Im ersteren Falle liefert jede neugewählte Tangente verschiedene Punkte PQR, aber jedesmal so, daß pqr drei Paare konjugierter Geraden werden, im letzeren Falle entstehen umgekehrt zuerst die drei Paare konjugierter Geraden pqr und zwar jedesmal in

Figur 127.



Kurve gewählt werden. Geht man nämlich in Figur 124 und 127 nicht von A und a aus, sondern von E und e, so hat man die Figur für den inneren Punkt P. Seine Verbindungsgeraden mit den zwei anderen Eckpunkten des Tangentendreiecks r = PA und q = PD schneiden die Seiten ED und und EA in den Schnittpunkten der Tangente CFB und sind zwei konjugierte Geraden. Oder legt man durch P als Punkt der Polaren e von E die zwei konjugierten Geraden PQ und PR, so sind deren Schnittpunkte mit EA und ED von selbst solche vier Punkte, daß die Verbindungsgeraden AD und CB Kurventangenten werden müssen.

der Lage, daß sie auf den drei vorhandenen Tangenten DE, EA, AD die Schnittpunkte C, B, F einer und derselben vierten Tangente CBF ausschneiden. Man erhält also aus der letztgenannten Tatsache den Satz:

Satz a. Verbindet man in einem Tangentendreiseit einen beliebigen Punkt der Polaren eines Eckpunktes mit den beiden anderen Eckpunkten, so erhält man stets zwei konjugierte Geraden.

Und als Umkehrung dieser letzteren Beziehung entsteht der merkwürdige

Satz b. Werden zwei beliebige Kurventangenten geschnitten mit irgend zwei konjugierten Geraden, welche durch einen Punkt ihrer Berührungssehne gehen, so sind die Verbindungsgeraden der entstehenden Schnittpunkte stets zwei neue Kurventangenten.

Erkl. 405. Der erste der beiden nebenstehenden Sätze ist der gestellten Aufgabe entsprechend aufs Tangentendreiseit bezogen, man sieht aber sofort, daß der zweite, welcher vom Tangentendreiseit unabhängig erscheint, die wichtigere Tatsache verzeichnet. Denn der erste ergänzt die Figur aus Dreieck zu Viereck, der zweite dagegen lehrt zu zwei Tangenten gleich eine dritte und vierte hinzuzufinden. Die Durchführung der nebenstehenden Untersuchung hat in genau gleicher Weise zu geschehen an Figur 124 mit der Ellipse als Kernkurve oder an Figur 127 mit der Hyperbel als Kernkurve oder etwa mit einer Parabel als Kernkurve. Für den vorliegenden Fall ist gerade die Figur 127 angebracht, weil an deren Lagebeziehungen leicht die folgenden Anwendungen der gefundenen Sätze sich anknüpfen lassen.

Aufgabe 67. Man soll das Ergebnis voriger Auflösung auf ein solches Tangentenvierseit der Hyperbel anwenden, das zwei Asymptoten enthält.

Erkl. 406. Denkt man sich in Fig. 127 den Punkt A als Asymptotenschnittpunkt, so fällt die Sehne a mit der unendlich fernen Geraden zusammen, folglich liegt jeder Punkt von a, also auch R unendlich fern, und die Geraden p und q werden parallel. Das Polardreieck PQR wird zum Parallelstreifen mit Grundseite PQ, also werden auch die Tangenten in den Schnittpunkten von PQ parallel und mit ihnen auch die Geraden c, RA, RC. — Man hat also hier eine teilweise Vorausnahme der Durchmesser-Eigenschaften

Auflösung. Da die Asymptoten im unendlichen berühren, so ist die Berührungssehne der Asymptoten die unendlich ferne Gerade, folglich sind dann die konjugierten Geraden durch jeden Punkt von a in Fig. 127 parallel. Und man erhält als ersten Satz: Jedes Paar paralleler Geraden durch die Schnittpunkte der Asymptoten mit einer beliebigen Tangente ist ein Paar konjugierter Geraden und schneidet die Asymptoten in den Schnittpunkten einer neuen Tangente. Und werden die konjugierten Parallelgeraden selbständig erzeugt, so entsteht als zweiter Satz: Irgend zwei konjugierte Parallel-

der Hyperbel und anderseits eine neue geometrische Ableitung der Maßeigenschaften der Hyperbel, welche im Abschnitt 4b des II. Teiles und in der zugehörigen Aufgabe behandelt wurden.

geraden schneiden auf den Asymptoten stets die Schnittpunkte zweier Hyperbeltangenten aus.

Parallele konjugierte Geraden entstehen sehr einfach durch eine beliebige Sekante und eine Parallele zu ihr durch ihren Pol.

Aufgabe 68. Man soll beliebig viele Hyperbeltangenten konstruieren, wenn die Asymptoten und eine Tangente gegeben sind.

Andeutung. Man verfährt nach dem ersten der beiden vorigen Sätze.

Aufgabe 69. Man soll das Ergebnis der Auflösung 66 auf die Parabel anwenden.

Erkl. 407. Zur Veranschaulichung nebenstehender Beweisführung wird man statt auf Figur 127 eher auf Figur 124 zurückgehen und etwa die Tangente CBF ins unendliche gerückt denken. Der nebenstehende Satz a gibt dann das vereinigte Ergebnis der beiden Sätze der Aufgabe 66, bezogen auf den im endlichen liegenden Eckpunkt des Tangentendreiseits. Dazu vergleiche man die Figur 130 im II. Teile dieses Lehrbuches. Der Satz b gibt sodann dasselbe Ergebnis, bezogen auf einen der unendlich fernen Eckpunkte des Tangentendreiseits. Da von diesem nur die eine endliche und die unendlich ferne Tangente ausgehen, so spricht auch der Satz nur von dieser einen endlichen Tangente. Durch die Schnittpunkte der konjugierten Geraden mit den beiden vorhandenen Tangenten sollen die zwei neuen Tangenten gehen. Die eine der vorhandenen Tangenten ist aber die unendlich ferne, wird also je im unendlich fernen Punkt der beiden konjugierten Geraden getroffen, und folglich müssen die beiden neuen Tangenten zu den beiden konjugierten Geraden parallel laufen durch deren Schnittpunkte mit der einen vorhandenen Tangente. Auch diese beiden Sätze können zu Konstruktionen der Parabel Verwendung finden.

Auflösung. Die Parabel hat die unendlich ferne Gerade zur Tangente; benutzt man also diese als eine Seite des Tangentendreiecks, so hat man einen Eckpunkt des Dreiecks im endlichen und die zwei andern im unendlichen. Die Polare des ersteren Eckpunktes ist die Berührungssehne zwischen den beiden im endlichen liegenden Berührungspunkten der beiden Tangenten, die Polare eines der andern geht von einem dieser Berührungspunkte nach dem unendlich fernen Berührungspunkte: sie ist also ein Durchmesser der Parabel. Man erhält hieraus folgende Eigenschaften der Parabel:

Satz a. Legt man durch einen beliebigen (inneren oder äußeren) Punkt einer Parabelsekante die Parallelen zu den beiden Tangenten ihrer Kurvenschnittpunkte, so sind dies zwei konjugierte Geraden und treffen die beiden Tangenten in den Schnittpunkten einer neuen Tangente.

Satz b. Wird eine beliebige Parabeltangente geschnitten mit irgend zwei konjugierten Geraden, welche durch einen Punkt des durch ihren Berührungspunkt laufenden Durchmessers gehen, so

sind die Parallelen zu den beiden konjugierten Geraden durch die entstehenden Schnittpunkte zwei neue Parabeltangenten.

Aufgabe 70. Beliebig viele Tangenten einer Parabel zu konstruieren, von welcher zwei Tangenten nebst Berührungspunkten gegeben sind.

Andeutung. Man verfährt nach Satz a der vorigen Auflösung 69.

Aufgabe 71. Beliebig viele Parabeltangenten zu zeichnen, wenn eine Tangente nebst Berührungspunkt und zugehörigem Durchmesser und eine zweite Tangente gegeben ist.

Andeutung. Man verfährt nach Satz a und b der vorigen Auflösung 69.

Aufgabe 72. Die Beziehungen der konjugierten Punkte zu einem Sehnendreieck zu untersuchen.

Erkl. 408. Die auf die Figur 124 und 127 in den Aufgaben 66 und 72 zur Anwendung gebrachte Untersuchungsmethode hat ihr Gegenstück besonders in gewissen Methoden der rechnenden Physik: Wenn zwischen irgend welchen Größen, z. B. Fallraum, Fallzeit und Erdschwere, oder Pendellänge, Schwingungszeit und Erdschwere eine gesetzmäßige Beziehung durch eine Formel

$$\left(\text{dort } s = \frac{g}{2} \cdot t^2, \text{ hier } t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$$

hergestellt bezw. aufgefunden ist, so kann nicht nur der eine Wert aus den beiden andern, sondern auch stets einer der andern aus den übrigen Größen abgeleitet werden. So dient hier zur Herstellung der Beziehungen an der Figur 124 bezw. 127 entweder das ursprüngliche Tangentenvierseit bezw. Sehnenviereck, oder es wird umgekehrt aus den übrigen Elementen dieser Figur das Tangentenvierseit bezw. Sehnenviereck hergestellt.

Erkl. 409. Wählt man durch den Pol A der Sehne a willkürlich die Gerade r, so ist auch festgelegt der Pol R auf a, und sodann gibt es auf r beliebig viele Paare konjugierter Punkte. Ein erster derselben, etwa (rd), liefert durch

Auflösung. Ein Sehnendreieck erhält man aus dem Sehnenviereck durch Weglassung einer Ecke. Wird also in Figur 124 oder 127 das Dreieck ade der Sehnen a, d, e festgehalten, so bleibt von den übrigen Elementen der Figur ebenfalls unverändert das Tangentendreiseit ADE der Pole jener Sehnen, wovon A auf r, D auf q, E auf p liegt. Die Vervollständigung der Figur zum Sehnenviereck kann nun geschehen, indem man entweder nach gewöhnlicher Weise durch eine der Ecken K = (de) bezw. durch (ea) oder (ad) die Sehne c bezw. b oder f willkürlich auswählt und den vierten Eckpunkt darauf nimmt, oder aber auch, indem man durch den Pol A bezw. D oder E die Gerade r bezw. q oder p willkürlich auswählt und hieraus das Polardreiseit bezw. das Sehnenviereck ergänzt. Im ersten Fall liefert jeder neugewählte Kurvenpunkt verschiedene Geraden pqr, aber jedesmal so, daß PQR drei Paare konjugierter Punkte werden, im letzteren Falle entstehen umgekehrt zuerst die drei Paare konjugierter Punkte PQR und zwar jedesmal in der Lage, daß ihre Verbindungsgeraden mit den Eckpunkten (ed) (da) (ae) einen und denselben vierten Kurvenpunkt

R die Seite p des Polardreiseits und die Seiten d und b des Sehnenvierecks. Dann ist aber festgelegt durch r und p die dritte Seite q des Polardreiseits, und auch der zweite konjugierte Punkt auf r ist nicht mehr willkürlich, sondern er muß auf q liegen und muß die Diagonalen f und e des Sehnenvierecks liefern. Man kann also letztere entweder dadurch festlegen, daß man zu Q den konjugierten Punkt P konstruiert, oder dadurch, daß man mittels der Sehnen d und b durch Q die Kurvenpunkte (dc) und (bc) zeichnet und aus diesen die Figur vervollständigt.

Erkl. 410. Die willkürlich gewählte Gerade durch den Pol der verwandten Sekante ist in Erkl. 409 an der Figur 124 und 127 jedesmal eine die Kurve schneidende Gerade r. Es kann aber ebensowohl auch ein Strahl des Poles außerhalb der Kurve gewählt werden. Geht man nämlich in Figur 124 und 127 nicht von A und a aus, sondern von e und E, so hat man die Figur für die äußere Gerade p. Ihre Schnittpunkte mit den zwei anderen Seiten des Sehnendreiecks R = (pa) und Q = (pd) liefern durch Verbindung mit den Eckpunkten (ea) und (ed) den Kurvenpunkt (cfb) und sind zwei konjugierte Punkte. Oder wählt man auf p als Strahl durch den Pol E von e die zwei konjugierten Punkte (pq) und (pr), so sind deren Verbindungsgeraden mit (ea) und (ed) von selbst solche vier Geraden, daß die Schnittpunkte (ad) und (cb) zu Kurvenpunkten werden müssen.

(c, b, f) ausschneiden. Man erhält also aus der letztgenannten Tatsache den Satz:

Satz a. Bringt man in einem Sehnendreieck eine beliebige Gerade durch den Pol einer Seite zum Schnitt mit den beiden anderen Seiten, so erhält man stets zwei konjugierte Punkte.

Und als Umkehrung dieser letzten Beziehung entsteht der merkwürdige Satz:

Satz b. Werden zwei beliebige Kurvenpunkte verbunden mit irgend zwei konjugierten Punkten, welche auf einem Strahle durch den Pol ihrer Verbindungssekante liegen, so sind die Schnittpunkte der entstehenden Verbindungsgeraden stets zwei neue Kurvenpunkte.

Aufgabe 73. Man soll das Ergebnis der vorigen Aufgabe anwenden auf ein Sehnendreieck der Hyperbel, welches die unendlich ferne Sekante als Seite besitzt.

Erkl. 411. Eine Parallelgerade zu einer Asymptote der Hyperbel trifft die Hyperbel im unendlich fernen Punkt eben dieser Asymptote, kann also mit der Hyperbel sonst nur noch einen Punkt gemeinsam haben. Liegt dabei der gewählte Ausgangspunkt der Parallelgeraden innerhalb der Hyperbel, so muß der genannte Kurvenschnittpunkt zu liegen kommen zwischen dem Ausgangspunkt und dem Schnittpunkt der Parallelen mit der zweiten Asymptote. Liegt der Ausgangspunkt im Innenwinkel der Asymptoten, so muß der Kurvenpunkt

Auflösung. Wird die unendlich ferne Gerade als Seite des Sekantendreiecks benutzt, so sind zwei Eckpunkte die unendlich fernen Hyperbelpunkte, also werden die dorthin laufenden Sehnen zu Parallelgeraden der Asymptoten. Der Pol der unendlich fernen Sekante ist als Schnittpunkt der Asymptoten der Hyperbelmittelpunkt, jede Gerade durch ihn ein Durchmesser, und jedes Paar konjugierter Punkte liegt harmonisch getrennt zu den Kurvenschnittpunkten dieses Durchmessers. Die Geraden von solchen konjugierten Punkten nach den beiden anderen Eckpunkten dieses Sehnendreiecks sind ebenfalls Parallelgeraden zu

jeder Asymptotenparallelen im gleichen Innenwinkelraum liegen; liegt der Ausgangspunkt im Außenwinkel der Asymptoten, so liegt der Kurvenschnittpunkt der Parallele in demjenigen Innenwinkelraum der Asymptoten, durch welchen diese Parallele hindurchgeht, möglicherweise sehr weit entfernt, wenn nämlich die Parallele so nahe bei der Asymptote verläuft, daß der Hyperbelast erst in großer Entfernung noch näher an die Asymptote herankommt, als der Abstand dieser Parallelen von der Asymptote beträgt.

den Asymptoten, und so entsteht der Satz: Zieht man durch einen beliebigen Hyperbelpunkt die Parallelgeraden zu den beiden Asymptoten, so werden auf jedem Durchmesser der Hyperbel zwei konjugierte Punkte ausgeschnitten. Und werden diese konjugierten Punkte selbständig gewählt, so erhält man den anderen Satz: Die Parallelgeraden zu den Asymptoten durch irgend zwei konjugierte Punkte eines beliebigen Hyperbeldurchmessers liefern als Schnittpunkte stets zwei neue Kurvenpunkte der Hyperbel.

Aufgabe 74. Man soll beliebig viele Hyperbelpunkte konstruieren, wenn die Asymptoten und ein Hyperbelpunkt gegeben sind.

Andeutung. Man erhält zweierlei Lösungen, je nachdem man nach dem Satz von Paskal oder nach dem zweiten der vorigen Sätze konstruiert.

---

5. Aufgaben über Mittelpunkt und Durchmesser der Kurven.

(Zu Abschnitt 2a, b.)

Aufgabe 75. Von einer kontinuierlich gezeichnet vorliegenden Kurve den Mittelpunkt zu finden.

Erkl. 412. Von den drei nebenstehenden Lösungen dieser Aufgabe benützt die erste dreimal die Halbierung einer Strecke, die zweite nur zweimal, die dritte garnicht. Es ist also diese letztere die der projektivischen Geometrie angemessenste Lösung, sie braucht aber mehr Linienzüge als die vorhergehenden, denn sie benützt den Fall 1α der Antwort 39, während die anderen Lösungen auf 1γ derselben Antwort beruhen. — Die erste Lösungsweise führt nur dann nicht zum Ziel, wenn die Parallelsehnen bei einer Hyperbel durch beide Aeste gelegt sind; denn der dadurch erzeugte Durch-

Auflösung. I) Man zieht ein paralleles Sehnenpaar durch die Kurve, halbiert beide Sehnenstrecken, verbindet die Mittelpunkte, bringt die entstehende Verbindungsgerade zum Schnitt mit der Kurve und halbiert wieder den so entstandenen Durchmesser. Der Mittelpunkt ist Kurvenmittelpunkt.

II) Man zieht zwei Paare von Parallelsehnen und verbindet die Mittelpunkte jedes Paares. Der Schnittpunkt beider Verbindungsgeraden ist der Kurvenmittelpunkt.

III) Man zieht zwei Paare von Parallelsehnen und vervollständigt jedesmal das durch ihre Kurven-

messer der Hyperbel ist ein nicht schneidender, kann also nicht halbiert werden.

schnittpunkte bestimmte Sehnenviereck. Die Verbindungsgeraden der beiden im endlichen liegenden Nebenecken jedes Vierecks schneiden einander im Kurvenmittelpunkt.

Aufgabe 76. Den Mittelpunkt einer Hyperbel zu finden, von welcher nur der eine Ast gezeichnet vorliegt.

Aufgabe 77. Die Durchmesserrichtung einer gezeichnet vorliegenden Parabel aufzusuchen.

Aufgabe 78. Von einer durch fünf Punkte bestimmten Kurve den Mittelpunkt zu suchen.

Erkl. 413. Als besondere Fälle gehören zur vorliegenden Aufgabe alle die veränderten Ausdrucksweisen, welche für die Bestimmung einer Kurve durch fünf Punkte aufgestellt werden können. So findet man im II. Teile die Bestimmungen, daß die Kurve einem gegebenen Fünfeck umgeschrieben sein soll, oder einem Viereck bezw. Dreieck so umgeschrieben, daß sie noch durch einen bezw. zwei gegebene Punkte gehe. Auch kann durch P_∞ eine oder zwei Asymptotenrichtungen gegeben sein. Doch können die dahin laufenden Parallelsehnen zur nebenstehenden Auflösung nicht Verwendung finden, da sie durch denselben Kurvenpunkt gehen, also kein Sehnenviereck liefern.

Auflösung. Man verbindet zwei der gegebenen Punkte, zieht durch einen dritten derselben die Parallele zu der Verbindungsgeraden und konstruiert nach Paskal auf dieser Parallelen den zweiten Kurvenpunkt. Dadurch kennt man ein erstes Paar von Parallelsehnen.

Man wiederholt dieselbe Konstruktion ein zweites Mal, und verfährt mit den beiden so erhaltenen Sehnenvierecken nach der dritten Auflösung der Aufgabe 75.

Aufgabe 79. Man beweise, daß alle demselben Trapez umgeschriebenen Kurven einen gemeinsamen Durchmesser, und daß alle demselben Parallelogramm umgeschriebenen Kurven gemeinsamen Mittelpunkt haben.

Aufgabe 80. Eine Kurve zu konstruieren, von der gegeben sind drei (für Parabel zwei) Punkte und in einem derselben sowohl Tangente als Durchmesserrichtung.

Andeutung. Man erhält eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel je nach der Lage zu der einzigen Parabel, welche der zweite Punkt festlegt.

Aufgabe 81. Von einer Kurve den Mittelpunkt zu konstruieren, wenn dieselbe durch drei Punkte nebst Tangenten in zweien derselben bestimmt ist.

Erkl. 414. Die zweite nebenstehende Auflösung bildet eine Anwendung der Antworten 1β und 1γ der Antwort 39, welche in Auflösung der Aufgabe 86 noch besondere Erörterung erfährt. S. u. Erkl. 417. — Auch diese Aufgabe kann dieselben Abänderungen erfahren, welche in Erkl. 413 für Aufgabe 78 angedeutet wurden.

Auflösung. I) Man kann verfahren genau wie in Auflösung der Aufgabe 78.

II) Man verbindet die Berührungspunkte der beiden gegebenen Tangenten, halbiert die Verbindungsstrecke und verbindet deren Mittelpunkt mit dem Schnittpunkt der Tangenten. Diese Gerade muß der eine Durchmesser sein. Dazu konstruiert man dann noch einen zweiten wie zuvor.

Aufgabe 82. Dieselbe Aufgabe für eine Kurve zu lösen, welche durch vier Punkte nebst Tangente in einem derselben bestimmt ist.

Aufgabe 83. Den Mittelpunkt einer Kurve zu konstruieren, welche bestimmt ist durch fünf Tangenten oder durch vier Tangenten nebst einem, oder durch drei Tangenten nebst zwei Berührungspunkten.

Auflösung. I) Man konstruiert nach Brianchon im ersten Falle auf drei, im zweiten Falle auf zwei, im dritten Falle noch auf einer der Tangenten den Berührungspunkt und verbindet den Mittelpunkt zweier Berührungssehnen mit dem Schnittpunkt der zugehörigen Tangenten. Diese Verbindungsgeraden sind Durchmesser der Kurve und schneiden einander im Mittelpunkt.

II) Man konstruiert nach Brianchon zu zweien der gegebenen Tangenten die parallelen Tangenten, dann ist die Mittelparallele der beiden Paralleltangenten stets ein Durchmesser der Kurve.

III) Durch Zusammenfassung beider Lösungsweisen kann man jedesmal durch höchstens zwei Konstruktionen zum Ziele gelangen, indem man im ersten Falle zweimal nach II verfährt, im zweiten Falle zweimal I oder zweimal II oder einmal I und einmal II.

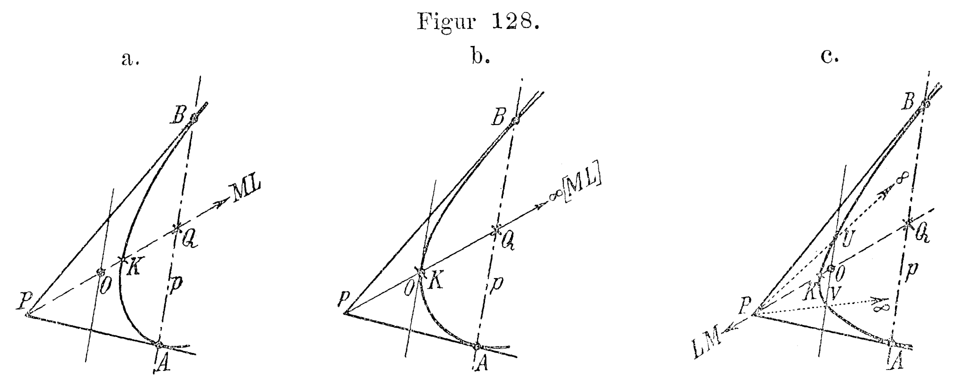
Erkl. 415. Von den vielen Abänderungen, welche auch diese Aufgaben erfahren können, sei nur diejenige erwähnt, daß wenn die Parabel in Betracht kommt, dann eine der im endlichen gegebenen Tangenten in Wegfall kommt; und wenn auf der unendlich fernen Tangente der Berührungspunkt gegeben ist, so ist dies von vornherein schon der Kurvenmittelpunkt, die Richtung nach ihm die Durchmesserrichtung.

Erkl. 416. Sind bei der Hyperbel beide Asymptoten gegeben, so ist als deren Schnittpunkt auch sofort der Mittelpunkt gegeben; ist nur eine Asymptote bekannt, so liefert eine beliebige andere samt Berührungspunkt gegebene Tangente einen Punkt der zweiten Asymptote durch Verdoppelung der Abstandsstrecke zwischen dem Berührungspunkt und der ersten Asymptote. Auch aus einer der Asymptotenrichtungen können nach Paskal beide Asymptoten und damit der Kurvenmittelpunkt bestimmt werden.

Aufgabe 84. Man beweise, daß alle demselben Trapez an- oder eingeschriebenen Kurven einen gemeinsamen Durchmesser, und alle demselben Parallelogramm an- oder eingeschriebenen Kurven gemeinsamen Mittelpunkt haben.

Aufgabe 85. Man soll ein Erkennungsmittel angeben, um zu entscheiden, ob ein gegebener Kurvenbogen einer Ellipse oder Parabel oder Hyperbel angehört.

Figur 128.



Erkl. 417. Der nebenstehende Satz ist bereits in Aufgabe 81 und 83 verwandt worden und in Erkl. 413 angekündigt. Man kann demselben auch folgende Gestalt geben: Für jede Kurve, welche zwei Seiten eines Dreiecks in den beiden Endpunkten der Grundseite berührt, ist die Mittellinie des Dreiecks ein Durchmesser. Der Satz dient zur Auffindung des Kurvendurchmessers durch jeden äußeren Punkt, wenn dessen Polare nebst Kurvenschnittpunkten gegeben ist.

Erkl. 418. Der zweite Teil nebenstehender Untersuchung bildet für alle Kurven eine allgemeine Anwendung von dem besonderen Falle, welcher in Erklärung 139 für die Parabel bereits ausgenützt worden ist. Allgemeine Erörterung der Lage des vierten harmonischen Punktes zu zwei festen Grundpunkten bei veränderlicher Lage des dritten ist bereits bei Einführung der harmonischen Beziehung durchgeführt worden in Antwort 7 des II. Teiles. —

Auflösung. 1) Die Antworten 1β und γ der Frage 39 besagen, daß für irgend eine Sekante der Kurve sowohl der Sehnenmittelpunkt als auch der Schnittpunkt der Tangenten ihrer Kurvenpunkte auf dem Durchmesser liegen, welcher die Polare des unendlich fernen Punktes der Sekante ist. Man kann also zunächst den Satz aussprechen:

Satz. Die Verbindungsgerade eines Tangentenschnittpunktes mit dem Mittelpunkt der zugehörigen Berührungssehne ist stets ein Durchmesser der Kurve.

2) Auf solchem Durchmesser schneidet die Berührungssehne als Polare des Tangentenschnittpunktes den vierten harmonischen Punkt aus zu den beiden Kurvenschnittpunkten des Durchmessers und dem Tangentenschnittpunkte. Also ist umgekehrt der zwischen Berührungssehne und Tangentenschnittpunkt liegende Kurvenpunkt als vierter harmonischer Punkt zugeordnet dem

Die Zeichnung ist an Figur 128 der Deutlichkeit halber für ein ziemlich großes Bogenstück durchgeführt. Sie gilt aber, und darin besteht eben ihr wesentlicher Wert, für ein beliebig kleines Stück, wenn man dasselbe nur durch eine Sekante schneiden und zu dieser auf irgend welchem Wege den Pol konstruieren kann — am ehesten durch Anlegen der Tangenten in den Sehnenschnittpunkten.

Erkl. 419. Denkt man sich durch den Mittelpunkt O der Strecke PQ eine Parallele zur Sekante p gelegt, so muß diese auf jeder der betr. Tangentenstrecken von P an die Kurve den Mittelpunkt treffen. Man kann daher auch umgekehrt diese die beiden Tangentenstrecken halbierende Parallele zur Unterscheidung benutzen. Für die Ellipse (Fig. 128a) muß sie außerhalb der Kurve verlaufen, für die Parabel (Fig. 128b) muß sie die Kurve berühren, die Hyperbel (Fig. 128c) muß sie in zwei Punkten schneiden. Dabei folgt aus den Durchmessereigenschaften einerseits, daß wenn der Kurvenbogen nicht durch O hindurchgeht, dann die Tangente in K jedenfalls doch zu p parallel sein muß, oder daß wenn umgekehrt die Mittelparallele zwischen P und p die Kurve berührt, dies nirgends anders sein kann, als im gemeinsamen Mittelpunkt dieser Parallelstrecke selber und der Strecke PQ, nämlich im zusammenfallenden Punkt O=K der Figur 128b.

Erkl. 420. Wenn die Mittelparallele zwischen P und p die Kurve in zwei Punkten trifft, so haben diese Schnittpunkte U und V der Figur 128c noch besondere Bedeutung. Da nämlich auf jeder Sekante durch P die Polare p den vierten harmonischen Punkt zu P und den Kurvenschnittpunkten ausschneidet, so muß auch auf PU und PV der Punkt U und V der vierte harmonische sein zum zweiten Kurvenschnittpunkt auf PU und PV. Da aber der eine davon, nämlich eben U und V im Mittelpunkt zwischen P und p liegt, so muß der vierte harmonische im unendlichen liegen; d. h. in der Richtung PU und PV liegen die unendlich fernen Punkte der Hyperbel, oder PU und PV sind die Asymptotenrichtungen, die Hyperbelasymptoten sind die durch den Mittelpunkt M gelegten Parallelen zu PU und PV.

zweiten Kurvenschnittpunkt des Durchmessers. Dieser letztere aber liegt bei jedem Kurvendurchmesser in derselben Richtung wie der Kurvenmittelpunkt, also bei der Ellipse auf der Innenseite des Kurvenbogens, bei der Parabel im Unendlichen, bei der Hyperbel auf der Außenseite des Kurvenbogens. Und hiernach richtet sich dann auch für den vierten harmonischen Punkt innerhalb der harmonisch geteilten Strecke zwischen Berührungssehne und Tangentenschnittpunkt die Lage diesseits oder jenseits des Mittelpunktes dieser Strecke.

3) Hieraus erhält man folgende Lösung der gestellten Aufgabe: Man schneidet den gegebenen Kurvenbogen (Fig. 128) in zwei Schnittpunkten durch eine Sekante p und konstruiert deren Pol P. Diesen Punkt P verbindet man mit dem Mittelpunkt Q der Sehne und halbiert die Verbindungsstrecke PQ. Liegt nun der Kurvenschnittpunkt K auf der inneren Hälfte der Strecke, so ist die Kurve eine Ellipse, liegt er im Mittelpunkt, so ist die Kurve eine Parabel, liegt der Kurvenschnittpunkt auf der äußern Hälfte, so ist die Kurve eine Hyperbel. Denn im ersten Falle liegt der zweite Kurvenschnittpunkt des Durchmessers samt dem Kurvenmittelpunkt nach innen, im zweiten im unendlichen, im dritten nach außen.

Aufgabe 86. Einem gegebenen Winkel eine Kurve so einzuschreiben, daß die Schenkel in vorgeschriebenen Punkten berührt werden, und daß der Kurvenmittelpunkt auf eine gegebene Gerade zu liegen kommt.

Andeutung. Man beachte die Lage der Kurve zur einzig möglichen Parabel.

Aufgabe 87. Von einer Kurve seien gegeben zwei Tangenten nebst Berührungspunkten und ein beliebiger Kurvenpunkt K auf dem Durchmesser des Tangentenschnittpunktes. Man soll die Kurve konstruieren und ihre Gattung bestimmen.

Erkl. 421. Die Bestimmungsstücke der Kurve in vorliegender Aufgabe sind nicht anderer Art, als in den bisherigen Aufgaben zulässig war. Denn der einzelne Kurvenpunkt bildet mit den zwei Tangenten die Gruppe (PT) (PT) P für Konstruktion nach Paskal. Seine besonders ausgezeichnete Lage aber erlaubt sofort weitere Schlüsse über drei weitere Kurvenelemente, nämlich einen weiteren Punkt auf demselben Durchmesser und die zwei Tangenten in denselben beiden Punkten. Denn nach dem Satz 14 müssen die Tangenten in den Kurvenschnittpunkten jedes Durchmessers parallel laufen zu den Berührungssehnen jedes Tangentenpaares, welches seinen Schnittpunkt auf diesem Durchmesser hat. Die Lage des Kurvenpunktes auf PQ ist in nebenstehender Aufgabe weit allgemeiner zulässig als in der vorhergehenden, wo er nur zwischen P und Q liegen konnte, während hier die ganze Gerade zur Verfügung steht.

Auflösung. 1) Man ziehe die Geraden p und PK und halbiere PQ (Fig. 128). Liegt nun etwa der Punkt K genau im Mittelpunkt O, oder im unendlich fernen Punkt von PQ, so ist die Kurve eine Parabel; liegt Punkt K zwischen O und Q oder außerhalb PQ jenseits Q, so ist die Kurve eine Ellipse und hat als zweiten Kurvenpunkt L auf PQ den vierten harmonischen Punkt zu PQK, als Kurvenmittelpunkt den Mittelpunkt der Strecke KL; liegt Punkt K zwischen O und P oder außerhalb PQ jenseits P, so ist die Kurve eine Hyperbel und hat wieder als zweiten Kurvenpunkt L auf PQ der vierten harmonischen zu PQK und als Kurvenmittelpunkt den Mittelpunkt der Strecke KL.

2) Zur weiteren Konstruktion kann Paskal oder Brianchon verwendet werden, denn man kennt vier Punkte nebst Tangenten, nämlich außer den zwei Tangenten nebst Berührungspunkten auch die Punkte K und L nebst Tangenten, weil letztere beide zur Sehne p parallel laufen müssen.

Aufgabe 88. Man soll untersuchen, wie viel Elemente unter den Bestimmungsstücken der Kurve durch den gegebenen Kurvenmittelpunkt ersetzt werden können.

Erkl. 422. Das nebenstehende Ergebnis zeigt sich als Anwendung des

Auflösung. Zu jedem gegebenen Kurvenpunkte liefert der Kurvenmittelpunkt einen zweiten im gleichen Abstand auf seinem Durchmesser jenseits des Mittelpunktes, also wird die Zahl der Punkte verdoppelt. Aber auch

Satzes in Auflösung der Aufgabe 9. Denn da der Mittelpunkt Pol der unendlich fernen Geraden ist, so ist durch den gegebenen Mittelpunkt eigentlich nichts anderes gegeben als eine Gerade nebst Pol. Auch die nebenstehende Ausführung der Konstruktion stimmt überein mit jener in Aufgabe 9, denn die Verdoppelung der Strecke KM ist Aufsuchung des vierten harmonischen Punktes zu P=M, K und dem unendlich fernen Schnittpunkt von PK mit p_∞; und die Paralleltangente zu k im gleichen Abstand jenseits M ist die vierte harmonische Gerade zu k, p_∞ und der Verbindungsgeraden von M mit (kp_∞).

zu jeder einzelnen Kurventangente liefert der Kurvenmittelpunkt eine zweite und zwar als Parallele im gleichen Abstand jenseits des Mittelpunktes, da der Kurvenmittelpunkt stets auf der Mittelparallelen zweier parallelen Tangenten liegen muß. Demnach verdoppelt der gegebene Kurvenmittelpunkt stets die Anzahl der sonst noch gegebenen Elemente und ersetzt daher unter den fünf zu gebenden Bestimmungsstücken der Kurve ein Elementenpaar.

Aufgabe 89. Eine Ellipse oder Hyperbel oder Parabel zu konstruieren aus den Elementen MPPP, MP (PT), MT (TP), MTTT.

Aufgabe 89a. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher ein Durchmesser nach Lage und Größe gegeben ist, und außerdem 1) PP oder 2) (PT) oder 3) die Tangente in einem Endpunkt des Durchmessers und P, oder 4) dieselbe Tangente und T.

Aufgabe 90. Eine Hyperbel zu konstruieren aus M, P_∞ und einem weiteren Elementenpaar.

---

6. Aufgaben über die konjugierten Durchmesser der Kurven.

(Zu Abschnitt 2c.)

Aufgabe 91. An einer durch beliebige fünf Bestimmungsstücke gegebenen Kurve sollen die Richtungen irgend zweier konjugierten Durchmesser konstruiert werden.

Erkl. 423. Wurde der Durchmesser nach Paskal konstruiert, so geschah es durch Halbierung zweier parallelen Sehnen: diese Sehnen geben die Richtung des zum gefundenen Durchmesser konjugierten. Wurde der Durchmesser nach Brianchon konstruiert, so geschah es durch Halbierung einer Berührungsehne, und diese

Auflösung. Man findet zunächst nach der Auflösung einer der Aufgaben 78 bis 83 irgend einen beliebigen Durchmesser der Kurve. Zu diesem Zweck tritt stets die Halbierung irgend einer Sekante ein, und diese gibt dann die Richtung des konjugierten Durchmessers an. Es bedarf also zum vorliegenden Zweck nur einer einzigen Konstruktion nach Paskal bezw. einer oder höchstens zweier Konstruktionen nach Brianchon.

gibt wieder die Richtung des zum gefundenen Durchmesser konjugierten. Will man den konjugierten nicht nur nach Richtung, sondern auch nach Lage konstruieren, so muß erst der Kurvenmittelpunkt aufgesucht werden.

Aufgabe 92. An einer kontinuierlich gezeichneten Kurve soll zu einem aufgefundenen bezw. gegebenen Durchmesser der konjugierte auf verschiedene Weise konstruiert werden.

Erkl. 424. Die Beweise für die Richtigkeit der nebenstehenden Auflösungen ergeben sich ohne weiteres aus den Sätzen 13 bis 17 über die Eigenschaften konjugierter Durchmesser. Die Art der einzelnen Konstruktionen ist sowohl nach den zur Ausführung verwandten Mitteln verschieden, als nach der Gattung der gegebenen Stücke. So wird in den ersten Auflösungen Halbierung von Strecken verwendet, während die letzten bloß mit rein projektivischen Operationen arbeiten. Auch ist teils der Kurvenmittelpunkt als bekannt vorausgesetzt, teils nicht. Letzteres kann jedenfalls zutreffen bei einem nicht schneidenden Durchmesser der Hyperbel.

Erkl. 425. Für die Ellipse sind alle nebenstehenden Konstruktionen gleichwertig durchführbar. Eine Abweichung ergibt die Hyperbel, je nachdem der gegebene Durchmesser ein schneidender oder nichtschneidender ist. Für den schneidenden Hyperbeldurchmesser (wo der Kurvenmittelpunkt durch Halbierung sofort bekannt ist) versagt die zweite Konstruktion, für den nichtschneidenden Hyperbeldurchmesser versagt die vierte Konstruktion. Sonst sind auch hier alle Konstruktionen verwendbar, und zwar liefert 1a mit 1b zusammen den Mittelpunkt, auch wenn er nicht gegeben, und ebenso die Lösung 2b und die siebente Konstruktion. Man kann also umgekehrt auch die Lösungen 2b oder 7 dazu verwenden, den Mittelpunkt eines gegebenen Durchmessers ohne Streckenhalbierung zu finden.

Auflösung. 1) Man zieht zum gegebenen Durchmesser eine parallele Kurven-Sekante und verbindet den Mittelpunkt des gegebenen Durchmessers a) mit dem Mittelpunkt dieser Sehne oder b) mit dem Schnittpunkt der Tangenten in ihren Kurvenschnittpunkten.

2) Man zieht zum gegebenen Durchmesser a) eine parallele Kurventangente und verbindet den Kurvenmittelpunkt mit deren Berührungspunkt, oder b) zwei Paralleltangenten und verbindet deren Berührungspunkte.

3) Man zieht durch einen beliebigen Kurvenpunkt eine Gerade parallel zum gegebenen Durchmesser und eine Gerade durch seinen Mittelpunkt und legt zur Verbindungsgeraden der neu entstehenden Kurvenschnittpunkte dieser beiden Geraden eine Parallele durch den Kurvenmittelpunkt.

4) Man zieht in einem der Kurvenschnittpunkte des gegebenen Durchmessers die Kurventangente und legt durch den Kurvenmittelpunkt die Parallele dazu.

5) Man zieht durch einen äußeren Punkt des gegebenen Durchmessers das Tangentenpaar an die Kurve und legt zur Berührungssehne eine Parallele durch den Kurvenmittelpunkt.

6) Man legt durch einen äußeren Punkt des gegebenen Durchmessers das Tangentenpaar an die Kurve, konstruiert den vierten harmonischen Strahl zu diesen und dem Durchmesser und legt durch den Kurvenmittelpunkt die Parallele zu diesem Strahl.

7) Man zieht durch zwei äußere Punkte des gegebenen Durchmessers parallele Tangentenpaare an die Kurve und zieht die zweite Diagonale des entstehenden Tangentenparallelogramms.

Aufgabe 93. Von einer Kurve kennt man zwei Tangenten nebst Berührungspunkt auf einer derselben und den durch den Tangentenschnittpunkt gehenden Durchmesser. Man konstruiere die Richtung des konjugierten.

Erkl. 426. Die vorliegende Aufgabe hat als gegebene Stücke außer dem bekannten Durchmesser nur drei eigentliche Kurvenelemente. Man sieht also, daß es möglich ist, schon aus vier passend gewählten Elementen die Richtung des konjugierten Durchmessers bezw. die Polare eines gegebenen Punktes zu konstruieren. Man entnimmt daraus die Tatsache, daß unter besonderen Nebenumständen auch ein gegebener Durchmesser als Bestimmungsstück einer Kurve auftreten kann. — Umgekehrt geht aber aus dem Vorstehenden hervor, daß alle Kurven, welche obigen vier Bestimmungsstücken genügen, dieselbe gemeinsame Richtung der beiden konjugierten Durchmesser haben.

Auflösung. Sei gegeben in Fig. 128 Punkt A und die Richtungen PA, PB, PM. Dann ist AB die gesuchte Richtung des zu PM konjugierten Durchmessers, und zwar muß B derjenige Punkt auf PB sein, für welchen AQ = QB wird. Betrachtet man also Q als Mittelpunkt eines Parallelogramms mit Grundseite PA, so sind PQ und AQ dessen Diagonalenhälften. Man zieht also durch A eine Parallele zu PB bis zum Schnittpunkt mit PM, vervollständigt das Parallelogramm und erhält als dessen zweite Diagonale die Gerade AB. Diese liefert die verlangte Richtung des zu PM konjugierten Durchmessers, zugleich auch den zweiten Berührungspunkt B und die Polare zu P.

Aufgabe 94. Man betrachte die gemeinsamen Eigenschaften aller Kurven mit gemeinsamem Sehnenparallelogramm oder Tangentenparallelogramm.

Aufgabe 95. Man soll durch einen beliebig gegebenen Punkt P eine Sehne in eine gegebene Kurve so legen, daß dieser Punkt zum Mittelpunkt der Sehne wird.

Erkl. 427. Sehnen, welche denselben Kurvenbogen zweimal schneiden, haben ihren Mittelpunkt jedenfalls innerhalb der Kurve. Dies gilt also für alle inneren Punkte einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Eine Sehne aber, welche die getrennten Äste einer Hyperbel schneidet, läuft jedenfalls parallel zu der Richtung eines schneidenden Hyperbeldurchmessers, hat also ihren Mittelpunkt unbedingt

Auflösung. Angenommen, die verlangte Sehne s durch P sei gefunden, und MP sei der durch P gehende Durchmesser der Kurve. Dann müssen nach Satz 16 die Sehne s und der Durchmesser MP in den Richtungen zweier konjugierten Durchmesser liegen, damit s von MP halbiert werden kann. — Hieraus ergibt sich die einfache Lösung, daß man den gegebenen Punkt P mit M verbindet und durch P die Parallele legt mit dem zur Richtung MP konjugierten Durchmesser. — Die Aufgabe ist

auf einem der nicht schneidenden Hyperbeldurchmesser, da sie nur von einem konjugierten Durchmesser halbiert wird. Nicht schneidende Hyperbeldurchmesser gehen aber nur durch den Außenwinkel der Asymptoten, also kann ein Punkt im Innenwinkel der Asymptoten nie der Mittelpunkt einer Sehne werden. Die nebenstehende Konstruktion aber bleibt für alle Fälle die gleiche.

bei der Ellipse und Parabel nur möglich für Punkte P innerhalb der Kurve, bei der Hyperbel außerdem auch für Punkte im Außenwinkel der Asymptoten. Die Konstruktion des konjugierten Durchmessers kann auf irgend eine der Arten der Auflösung 92 vollzogen werden.

Aufgabe 96. Man denke sich die vorige Aufgabe gelöst für sämtliche Punkte $P_1 P_2 \ldots$ einer beliebigen Geraden, und soll beweisen, daß die sämtlichen entstehenden Kurvensehnen Tangenten einer Parabel sind.

Erkl. 428. Bezeichnet man die Punkte P, ihre Durchmesser u, die konjugierten v, deren unendlich ferne Punkte U der Reihe nach als P_{123} u_{123} u. s. w., so kann man aufstellen $P_{123} \overline{\overline{\wedge}}\, u_{123} \,\overline{\wedge}\, v_{123} \,\overline{\overline{\wedge}}\, U_{123}$, folglich $P_{123} \,\overline{\wedge}\, U_{123}$. Nun sind aber die s_{123} die Verbindungsgeraden der $(PU)_{123}$, also bilden die s_{123} einen Strahlenbüschel zweiter Klasse. Da die U_{123} die Pole der u_{123} sind, und P jeweils auf u liegt, so kann man das nebenstehende Ergebnis auch auffassen als Anwendung des Satzes 11. Denn die P und U sind die inbezug auf die gegebene Kurve konjugierten Punkte der gegebenen Geraden und der unendlich fernen Geraden, folglich umhüllen die sämtlichen Verbindungsgeraden derselben nach Satz 11 ein Bogenstück einer Kurve zweiten Grades.

Auflösung. Der Strahlenbüschel aller Durchmesser MP ist einerseits projektivisch in perspektivischer Lage mit den Punkten der Punktreihe $P_{1,2} \ldots$ anderseits projektivisch in schiefer Lage mit dem Strahlenbüschel der konjugierten Durchmesser, und letzterer wieder projektivisch in perspektivischer Lage mit der Punktreihe seiner Schnittpunkte auf der unendlich fernen Geraden, mit welchen die Punkte $P_{1,2} \ldots$ in der Konstruktion der Reihe nach verbunden werden. Die erhaltenen Kurvensehnen verbinden also die zugeordneten Punkte zweier projektivisch verwandten Punktreihen, und müssen deshalb einen Kurvenbogen umhüllen. Da aber der eine Kurventräger die unendlich ferne Gerade ist, so hat die eingehüllte Kurve die unendlich ferne Gerade zur Tangente, und so muß folglich diese Kurve eine Parabel sein, wenn auch nur bei der Hyperbel der unendlich ferne Punkt selber in der Konstruktion zur Verwendung gelangt.

Aufgabe 97. An einer gegebenen Ellipse soll zu einem gegebenen Paare konjugierter Durchmesser dasjenige zweite Paar konjugierter Durchmesser p q gesucht werden, welches mit dem ersten harmonisch liegt.

Erkl. 429. Nach Satz 17 hat jedes beliebige Sehnenparallelogramm konjugierte Durchmesser als Mittelparallelen, nicht aber als Diagonalen. Macht

Auflösung. I) Angenommen, AC und BD in Figur 129 sind die gegebenen konjugierten Durchmesser. Dann behandelt man dieselben als Diagonalen eines Sehnenparallelogramms, verbindet also die Eckpunkte ABCD und erhält die verlangten neuen konjugierten Durchmesser p, q als Mittelparallelen dieses Sehnenparallelogramms.

man also die gegebenen zu Diagonalen eines Sehnenparallelogramms, so müssen zwei neue konjugierte als Mittelparallelen entstehen. Nach demselben Satze hat jedes beliebige Tangentenparallelogramm konjugierte Durchmesser als Diagonalen, nicht aber als Mittelparallelen. Macht man also die gegebenen zu Mittelparallelen eines Tangentenparallelogramms, so müssen zwei neue konjugierte als Diagonalen entstehen.

Figur 129.

II) Oder man behandelt die gegebenen konjugierten Durchmesser AC und BD als Mittelparallelen eines Tangentenparallelogramms, zeichnet also in A und C die Tangenten a//c//BD und in B und D die Tangenten b//d//AC, dann erhält man die verlangten neuen konjugierten Durchmesser pq als Diagonalen dieses Tangentenparallelogramms.

Erkl. 430. In dem vollständigen Viereck der Kurvenpunkte ABCD sind Nebenecken der Punkt M und die unendlich fernen Schnittpunkte der Parallelseiten AB//CD und AD//BC. Folglich sind pq harmonisch zu den durch M gehenden Vierecksseiten als Verbindungsgeraden der Nebenecke M mit den beiden andern Nebenecken. — Im vollständigen Vierseit der Tangenten abcd sind Nebenseiten die Geraden p, q und die unendlich ferne Gerade als Verbindungsgerade der beiden unendlich fernen Eckpunkte, nämlich der Schnittpunkte von a//c und b//d. Folglich sind p q harmonisch zu AC, BD, weil sie Projektionsstrahlen sind nach den auf dieser unendlich fernen Nebenseite durch die beiden Eckpunkte und die Schnittpunkte mit den Nebenseiten p und q gebildeten vier harmonischen Punkten. (Vgl. Abschnitt 2 und 3 sowie Aufgabe 48 und Erkl. 250 des II. Teils.)

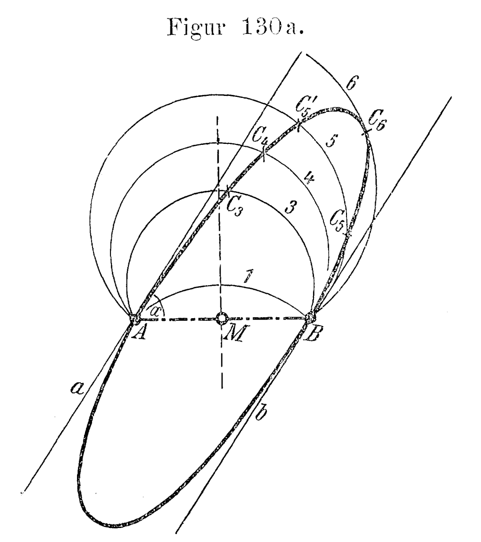
Aufgabe 98. Man soll nachweisen, daß dieselbe Aufgabe für Parabel und Hyperbel unmöglich ist.

Aufgabe 99. Man soll an gegebener Ellipse oder Hyperbel ein Paar konjugierter Durchmesser aufsuchen, welche einen Winkel von vorgeschriebener Größe γ bilden.

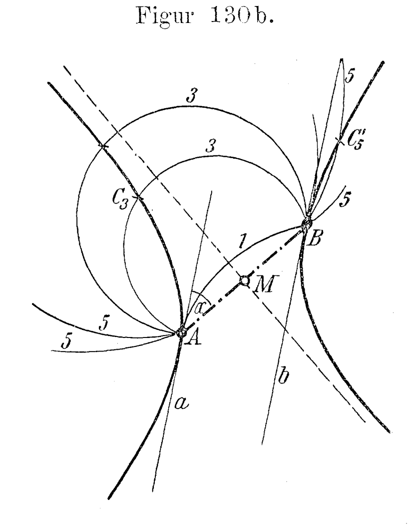
Erkl. 431. Die vorliegende und die beiden nächsten Aufgaben treten eigentlich aus dem Rahmen der rein projektivischen Geometrie heraus, indem sie mit gegebenen Winkelgrößen und Kreiskonstruktionen arbeiten. Da aber die im folgenden Abschnitt zur Behandlung gelangenden

Auflösung. Nach Satz 17 geben die Seiten jedes Sehnenparallelogramms die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser an. Man kann also einen beliebigen Durchmesser AB der Kurve (Fig. 130) als erste Diagonale eines Sehnenparallelogramms annehmen und die neue Ecke C auf der Kurve so aussuchen, daß die Seiten CA und CB des Sehnenparallelogramms und damit auch dessen Mittelparallelen,

Figur 130a.



Figur 130b.



Kurvenaxen auch nur einen besonderen Fall dieser Aufgabe darstellen, und da die Aufgabe geeignet ist, durch elementare Mittel bemerkenswerte Eigenschaften der Kurve kennen lernen zu lassen, verdient dieselbe doch an dieser Stelle eingereiht zu werden.

Erkl. 432. Der Peripheriewinkel, unter welchem von den Punkten eines Kreisbogens die Sehne AB gesehen wird, ist gleich dem Sehnentangentenwinkel zwischen dieser Sehne AB und den in A oder B an den Kreis gelegten Tangenten. Bezeichnet man nun wie in Figur 130a und b den Winkel der Kurventangenten a oder b mit dem Durchmesser AB als α, so findet man fünferlei verschiedene Arten von Kreisen je nach der Größe des ihnen zukommenden Winkels γ in Beziehung zum Winkel α. Es gibt nämlich 1) Kreise mit Peripheriewinkel über $180-\alpha$: diese treffen die Kurve gar nicht oberhalb AB. 2) Einen Kreis mit Peripheriewinkel gleich $180-\alpha$: dieser berührt gemeinsam mit der gegebenen Kurve die Tangente a in A und hat in der an Figur 130 dargestellten Lage keinen Schnittpunkt mit der Kurve. 3) Kreise mit Peripheriewinkel unter $180-\alpha$, aber über α: diese schneiden die Kurve in je einem Punkte C_3. 4) Einen Kreis mit Peripheriewinkel gleich α: dieser berührt mit der Kurve

also die konjugierten Durchmesser selber, den vorgeschriebenen Winkel bilden. Alle Punkte C, deren Verbindungsgeraden mit A und B einen bestimmten Winkel γ bilden, liegen aber nach planimetrischen Sätzen auf dem Kreise, welcher durch AB als Sehne und den gegebenen Winkel γ als Peripheriewinkel bestimmt ist. Zur Lösung der gestellten Aufgabe legt man also durch die gegebene Kurve einen beliebigen Durchmesser AB, zeichnet über demselben einen Peripheriewinkel-Kreis, welcher den vorgeschriebenen Winkel γ als Peripheriewinkel über der Sehne AB faßt, und verwendet die entstehenden Schnittpunkte C dieses Kreises und der Kurve zusammen mit A und B als Eckpunkte eines Sehnenparallelogramms. Die Mittelparallelen dieses Sehnenparallelogramms sind dann zwei konjugierte Durchmesser, welche den vorgeschriebenen Winkel einschließen.

Jeder gefundene Punkt C liefert zusammen mit seinem diametral gegenüberliegenden Kurvenpunkte ein Sehnenparallelogramm, also ein Paar konjugierter Durchmesser von der verlangten Eigen-

gemeinsam die Tangente b in B und schneidet die Kurve noch in einem Punkte C_4. 5) Kreise mit Peripheriewinkel unter dem Werte α: diese treffen die Kurve in zwei Punkten C_5 und C'_5, liefern also zwei Paare konjugierter Durchmesser mit dem verlangten Winkel.

Erkl. 433. Eine Vergleichung der Figuren 130a und b zeigt, daß bei der Hyperbel die Kreise der fünften Art mit zwei Schnittpunkten in unbegrenzter Anzahl und Größe möglich sind, daß dagegen bei der Ellipse keine Schnittpunkte mehr entstehen von einem gewissen Kreise sechster Art an, welcher die Kurve gerade berührt. Dieser Berührungspunkt C_6 liefert dann den kleinstmöglichen Neigungswinkel der konjugierten Durchmesser dieser Kurve. In der Tat besitzt die Hyperbel konjugierte Durchmesser unter allen Neigungswinkeln bis herunter zur Winkelgröße Null, welche eine einzelne Asymptote als ein zu sich selbst konjugierter Durchmesser darstellt. Bei der Ellipse dagegen besteht eine untere Grenze für den Neigungswinkel der konjugierter Durchmesser. Als obere Grenze besteht wegen der Nebenwinkelbeziehung für alle Kurven der rechte Winkel, sodaß die obige Durchführung streng genommen nun vom Winkel 90^0 an bis herunter zum Grenzwinkel bezw. bis 0^0 notwendig wäre.

schaft. Es gibt also je nach der Größe des gegebenen Winkels (siehe Figur 130) keinen, einen oder zwei Schnittpunkte der Kurve mit dem verwendeten Kreise, und daher auch kein, ein oder zwei Paare konjugierter Durchmesser von vorgeschriebenem Neigungswinkel.

Aufgabe 100. An einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel soll ein Kurvenpunkt aufgesucht werden, in welchem Tangente und Durchmesser einen Winkel von vorgeschriebener Größe bilden.

Erkl. 434. Die vorliegende Aufgabe erinnert an ihre entsprechende Beziehung beim Kreise. Dort ist in jedem Kurvenpunkte der Winkel zwischen Durchmesser und Tangente ein rechter Winkel. Bei Ellipse und Hyperbel dagegen sind auch andere Winkel möglich, und zwar in den geeigneten Fällen (C_5 der Figur 130) jede Winkelgröße an acht verschiedenen Kurvenpunkten, wovon je vier zusammengehörige als symmetrische Punkte um den Kurvenpunkt herumliegen. Und bei der Ellipse sind alle Winkelgrößen achtfach möglich vom rechten Winkel bis herunter zu einem gewissen Grenzwinkel, bei der Hyperbel sind alle Winkelgrößen vierfach möglich vom rechten Winkel bis herunter zu Null.

Auflösung. Angenommen der verlangte Punkt K sei gefunden, und seine Tangente k bilde mit seinem Durchmesser p den vorgeschriebenen Winkel γ. Zieht man durch den Kurvenmittelpunkt eine Parallele q zu k, so ist q der zu k konjugierte Durchmesser und bildet mit p denselben Winkel γ als korrespondierenden Winkel zum Winkel (kp). Die Aufgabe ist also zurückgeführt auf die vorhergehende Aufgabe 99: man konstruiert auf jene Weise erst ein bezw. zwei Sehnenparallelogramme ABCD mit dem vorgeschriebenen Winkel γ der Parallelogrammseiten, also auch der Mittelparallelen. Die vier bezw. acht Kurvenschnittpunkte dieser Geraden sind Punkte von der verlangten Eigenschaft.

Aufgabe 101. Dieselbe Aufgabe für die Parabel zu lösen.

Erkl. 435. Bei der Parabel sind alle Winkel zwischen Durchmesser und Tangente vertreten von 90 bis 0, und zwar wegen der Symmetrie gegen die Kurvenaxe jeder Winkel zweimal. Die vorstehende Fassung der Aufgabe ist diejenige, welche für die Parabel überhaupt an die Stelle der Frage nach den Winkeln konjugierter Durchmesser zu treten hat. Ist die Parabel nicht kontinuierlich gegeben, sondern durch fünf Bestimmungsstücke festgelegt, so konstruiert man nötigenfalls zuerst soweit nach Paskal, bis die Konstruktion nach Brianchon ermöglicht wird.

Auflösung. Da bei der Parabel alle Durchmesser parallel sind, so ist die Aufgabe darauf zurückzuführen, daß eine Tangente an die Parabel gelegt wird, welche mit dieser gemeinsamen Durchmesserrichtung den vorgeschriebenen Winkel bildet, oder eine Tangente an die Parabel zu zeichnen, welche durch einen gegebenen Punkt der unendlich fernen Geraden hindurchgeht. Diese Konstruktion ist aber für die Parabel nach Brianchon lösbar. Vgl. Aufgabe 295 der Aufgabensammlung am Schluß des II. Teiles.

Aufgabe 102. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind drei beliebige Bestimmungselemente und dazu ein Durchmesser samt der Richtung seines konjugierten.

Erkl. 436. Die vorliegende Aufgabe bildet eine Anwendung der Aufgabe 9, indem dort der Polpunkt ins unendliche verlegt wird. Man hat also außer den drei Bestimmungsstücken noch einen Punkt nebst dessen Polare. Entsprechend dem Ergebnis der Aufgabe 9 und der Aufgabe 88 zeigt sich auch hier, daß die Angabe eines Durchmessers nebst der Richtung seines konjugierten stets die Anzahl der gegebenen Kurvenelemente verdoppelt. Daher erscheint diese Aufgabe auch erst hier und nicht im vorigen Abschnitt. Denn der Mittelpunkt als solcher (Aufgabe 88) liefert schon die Gruppe eines Punktes nebst Polare, nicht so aber ein einzelner Durchmesser, da dieser zwar Pol eines unendlich fernen Punktes ist, aber eines unbestimmten, solange nicht die Richtung des konjugierten Durchmessers, das heißt eben die Lage dieses unendlich fernen Polpunktes gegeben ist.

Erkl. 437. Die Konstruktion der Aufgabe 9 wird hier für einen Punkt be-

Auflösung. 1) Für je zwei Kurvenpunkte bildet der gegebene Durchmesser die Axe einer schiefen Symmetrie, welche stattfindet in der Richtung des konjugierten. Man erhält also zu jedem gegebenen Kurvenpunkt einen zweiten, indem man durch ihn eine Parallele zur Richtung des konjugierten Durchmessers legt, dieselbe mit dem gegebenen Durchmesser zum Schnitt bringt und den Abschnitt der Parallelen zwischen Kurvenpunkt und Durchmesserschnittpunkt auf der anderen Seite des letzteren nochmals auf der Parallelen anträgt.

2) Für je zwei Tangenten, welche sich auf dem gegebenen Durchmesser schneiden, bildet dieser nebst der Parallelgeraden vom Schnittpunkt in der Richtung des konjugierten Durchmessers eine Gruppe von vier harmonischen Strahlen. Man erhält aber auch zu jeder gegebenen Tangente eine zweite, indem man durch ihren Schnittpunkt mit dem gegebenen Durchmesser eine Parallele zieht zur konjugierten Richtung und dann zur letzteren und dem Durch-

sonders einfach, weil die Verdoppelung der Abstandstrecke anstelle der Konstruktion des vierten harmonischen Punktes tritt; für die Tangente dagegen muß die Konstruktion der vierten harmonischen Geraden durchgeführt werden, wenn nicht infolge vereinigter Lage mit ihrem Berührungspunkt die nebenstehende besondere Vereinfachung eintritt. Bezeichnet man also mit q den gegebenen Durchmesser, mit Q seinen endlich fernen Pol, so hat man die vier Aufgabenfälle qQPPP, qQP(PT), qQT(PT), qQTTT. Dieselben liefern der Reihe nach PPPPPP, PP(PT)(PT), TT(PT)(PT), TTTTTT.

messer eine vierte harmonische Gerade konstruiert, zugeordnet zur erstgegebenen Tangente.

3) Besondere Vereinfachung tritt ein, wenn unter den drei gegebenen Kurvenelementen ein Kurvenpunkt samt Tangente erscheint. Denn dann ist der durch die schiefe Symmetrie erzeugte neue Kurvenpunkt zugleich der Berührungspunkt derjenigen Tangente, welche mit der gegebenen durch denselben Punkt des gegebenen Durchmessers hindurchgeht.

Aufgabe 103. Man soll aus voriger Aufgabe besondere Aufgaben für die Hyperbel herleiten.

Aufgabe 104. Welche Schlüsse sind ermöglicht, wenn unter den gegebenen Kurvenelementen zwei Tangenten nebst Berührungspunkten sind?

Erkl. 438. Sind gegeben (PT)(PT)P, also ein Kurvenpunkt K als fünftes Element, so liefert die konjugierte Durchmesserrichtung einen neuen Punkt K_1, und die Verbindungsgeraden von K und K_1 mit dem Tangentenschnittpunkt als vierten harmonischen Punkt je auch noch einen Punkt K_2 und K_3. Dadurch sind aus dem einen Punkt K vier Punkte geworden. Sind aber gegeben (PT)(PT)T, also eine Tangente k als fünftes Element, so liefert der Schnittpunkt von k mit einer der beiden gegebenen Tangenten den Eckpunkt eines Tangentenvierseits, welches den gegebenen Durchmesser als erste Diagonale hat und nach Satz 14 als zweite Diagonale eine Parallele zur bekannten Richtung des konjugierten Durchmessers. Man erhält also durch Vervollständigung dieses Vierseits zunächst eine neue Tangente k_1, und sodann liefert jeder Schnittpunkt von k und k_1 mit der Berührungssehne als vierte harmonische Gerade je noch eine weitere Tangente k_2 und k_3, sodaß auch aus der einen Tangente k vier Tangenten geworden sind.

Auflösung. Sowie unter den gegebenen Stücken einer Kurve zwei Tangenten nebst Berührungspunkten sind, kennt man (Figur 128) die Berührungssehne und deren Pol sowie den vom Tangentenschnittpunkt zum Mittelpunkt der Berührungssehne führenden Durchmesser und die Richtung des dazu konjugierten Durchmessers, nämlich eben die Berührungssehne selber. Man kann daher zu jedem weiteren Kurvenelement eine ganze Reihe neuer Elemente hinzukonstruieren. Man hat nämlich ein zum Parallelstreifen ausgeartetes Polardreieck der Kurve, dessen Eckpunkte gebildet sind aus dem Tangentenschnittpunkt, dem Pol des gegebenen Durchmessers und dem Schnittpunkt des letzteren mit der Berührungssehne, während als Seiten auftreten der gegebene Durchmesser, die Berührungssehne und die Parallele zu letzterer durch den Tangentenschnittpunkt. Die Aufgabe bildet daher einen besonderen Fall der Aufgaben 41 und folgender.

Aufgabe 105. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind der Mittelpunkt sowie ein Punkt Q nebst seiner Polaren q und ein weiteres Kurvenelement P oder T.

Erkl. 439. Daß bei vorstehender Aufgabe zu der Gruppe Qq und dem gegebenen M nur noch ein weiteres Kurvenelement gegeben sein darf, bildet eine Anwendung der in Erklärung 351 gegebenen Ausführung. Denn der Punkt M als Pol der unendlich fernen Geraden bildet mit dieser zusammen ein zweites Paar der Art Qq, doch aber nicht von der einfacheren Art, daß Q und M die Ecken eines Polardreiecks bilden. Die im nebenstehenden gefundene sechsfache Vermehrung des gegebenen fünften Kurvenelements entspricht aber ganz jenem allgemeinen Ergebnis. Polardreiecke lassen sich zwei aufstellen, nämlich ein erstes gebildet durch q mit Q und dem Durchmesser und der Parallelen zu q durch Q, ein zweites gebildet durch die unendlich ferne Gerade mit den beiden konjugierten Durchmessern durch M.

Auflösung. Der gegebene Mittelpunkt der Kurve verdoppelt die Zahl der sonst gegebenen Elemente liefert also zu P bezw. T ein zweites P bezw. T. Und das Paar Pol und Polare verdoppelt nochmals durch die harmonische Beziehung jedes Element P bezw. T. Verbindet man endlich den Mittelpunkt mit dem Polpunkt Q, so ist MQ ein Durchmesser und q die Richtung des konjugierten, und hieraus ergiebt sich eine dritte Verdoppelung des gegebenen letzten Kurvenelementes. Man erhält also aus dem einen gegebenen Element auf drei Arten je ein neues, deren jedes wieder auf die beiden andern Arten verdoppelt werden kann. Und so können statt des einen gegebenen Elementes P bezw. T sechs solcher festgestellt werden.

Aufgabe 106. Eine Hyperbel zu konstruieren, von der gegeben sind ein Pol nebst Polare sowie der Mittelpunkt und die eine Asymptote.

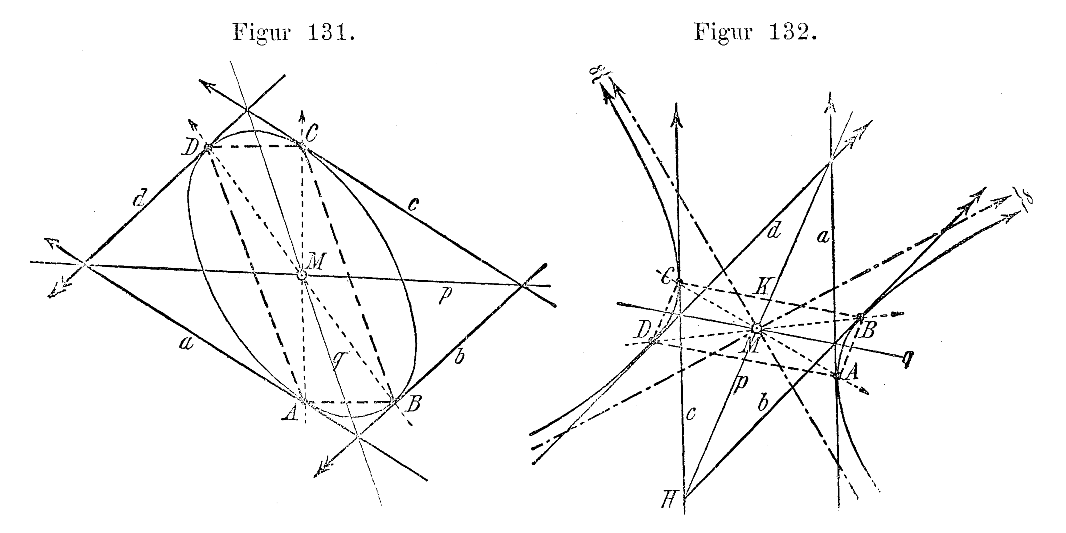
Aufgabe 107. Man soll eine Kurve konstruieren, von welcher gegeben sind ein Paar konjugierter Durchmesser und zwei weitere Kurvenelemente PP oder (PT) oder TT.

Erkl. 440. Durch zwei Durchmesser, sie seien konjugierte oder nicht, ist jedenfalls der Kurvenmittelpunkt bestimmt, also tritt die centrische Symmetrie der Kurven in Wirksamkeit, um zu einem Punkt den diametral gegenüberliegenden zu erzeugen, zu einer Tangente die im gleichen Abstand entgegengesetzt vom Mittelpunkt laufende Paralleltangente. Dazu kommt hier noch die harmonische Beziehung für Pol und Polare bezw. Durchmesser und Richtung

Auflösung. 1) Angenommen in Figur 131 bezw. 134 sei gegeben der Punkt A mit den konjugierten Durchmessern p und q. Dann liefert die centrische Symmetrie zum Mittelpunkt den Punkt C und die schiefe Symmetrie zu den konjugierten Durchmessern die Punkte B und D als Ecken des Sehnenparallelogramms ABCD. Ebenso liefert der zweite etwa gegebene Kurvenpunkt drei neue Punkte zu einem zweiten Sehnenparallelogramm, sodaß man statt der gegebenen zwei Punkte nunmehr acht Kurvenpunkte kennt.

2) Angenommen die Tangente a sei gegeben mit den konjugierten

Figur 131. Figur 132.



des konjugierten, welche für die Punkte zur schiefen Symmetrie wird. — Die beiden konjugierten Durchmesser bilden mit der unendlich fernen Geraden ein Polardreieck, und so bildet die vorstehende Aufgabe wieder einen besonderen Fall der Aufgaben 41 und folgender.

Erkl. 441. Die nebenstehende Auflösung bespricht den Fall des einzelnen Kurvenpunktes bezw. der einzelnen Tangente. Sind als gegebene Stücke ein Kurvenpunkt samt Tangente gegeben, so gelangt die Figur 131 bezw. 132 vollständig zur Geltung, indem dann statt acht Punkten bezw. acht Tangenten gerade die vier Punkte ABCD nebst ihren vier Tangenten abcd erzeugt werden. Wie in nebenstehender Auflösung bereits erwähnt ist, daß man b und d einfacher finden kann aus a und c, so wird in diesem Falle die Konstruktion noch weiter vereinfacht. Denn aus A findet man nach der allgemeinen Durchführung zunächst BCD; und dann brauchen für die Tangenten bcd gar keine Konstruktionen mehr durchgeführt zu werden: weder die Parallele noch die vierte harmonische Gerade, denn es entsteht b als Verbindungsgerade von (aq) nach B, d als Verbindungsgerade von (ap) nach D, und es muß c die Schlußgerade des Tangentenparallelogramms werden, als gemeinsame Gerade durch die drei Durchmessern p und q. Dann liefert die centrische Symmetrie zum Mittelpunkt die Paralleltangente c, und in den Schnittpunkten (ap) bezw. (aq) entstehen als vierte harmonische Geraden zu a mit p und der Parallelen zu q bezw. zu q und der Parallelen zu p die Tangenten d und b. Noch einfacher für die Zeichnung erhält man letztere als Verbindungsgeraden der durch Verdoppelung der Diagonalenhälften entstehenden Schnittpunkte von a und c mit p und q zur Vervollständigung des Tangentenparallelogramms abcd. Ebenso liefert die zweite etwa gegebene Tangente drei neue zu einem zweiten Tangentenparallelogramm, sodaß man statt der gegebenen zwei Tangenten nunmehr acht Kurventangenten kennt.

3) Bemerkenswert ist die Determination dieser Aufgabe. Eine Parabel ist ausgeschlossen, da sie keine konjugierten Durchmesser im endlichen hat. Um zu entscheiden, ob die Kurve zur Ellipse oder Hyperbel wird, zeichnet man zuerst das eine Sehnen- bezw. Tangentenparallelogramm, welches durch eines der beiden gegebenen Stücke bestimmt wird, und beob-

Punkte (dq) (bp) und C, und zwar parallel zu a. Ebenso ist in diesem Falle besonders einfach die Entscheidung über Ellipse oder Hyperbel, indem die Lage der Tangente außerhalb oder innerhalb des Sehnenparallelogramms sofort Auskunft gibt.

achtet dann die Lage des zweiten gegebenen Elementes zu diesem ersten Parallelogramm. Ein Blick auf die Figur 131 und 132 lehrt, daß eine Ellipse oder Hyperbel entsteht, wenn der zweite gegebene Kurvenpunkt in einem der Außenwinkelräume des Sehnenparallelogramms liegt oder aber im Innenraum bezw. in einem Scheitelwinkelraum desselben. Ebenso entsteht Ellipse oder Hyperbel, wenn die zweite gegebene Kurventangente mit einer Ecke des Tangentenparallelogramms eine Fläche im Innenwinkel oder aber im Scheitelwinkelraum bildet. (Man vergleiche hierzu die Erörterungen in Antwort 39 zu Figur 39 und 41 des II. Teiles dieses Lehrbuches.)

Aufgabe 108. Dieselbe Aufgabe für zwei senkrechte konjugierte Durchmesser zu lösen.

Aufgabe 109. Eine Hyperbel zu konstruieren aus einem Paar konjugierter Durchmesser und einer Asymptotenrichtung nebst einem gegebenen Kurvenpunkte.

Andeutung. Die Asymptotenrichtung liefert die Asymptote selber, und die harmonische Beziehung zu dem konjugierten Durchmesser die zweite Asymptote.

Auflösung 110. Die Aufgabe 107 zu erörtern für getrennt gegebene P und T.

Erkl. 442. Das Ergebnis der nebenstehenden Aufgabe stimmt überein mit dem Ergebnis der Aufgabe 42, woselbst zu einem gegebenen Polardreieck ebenfalls vier Kurvenpunkte oder vier Kurventangenten gefunden werden konnten, ohne daß die vollständige Konstruktion nach Paskal oder Brianchon ermöglicht wurde.

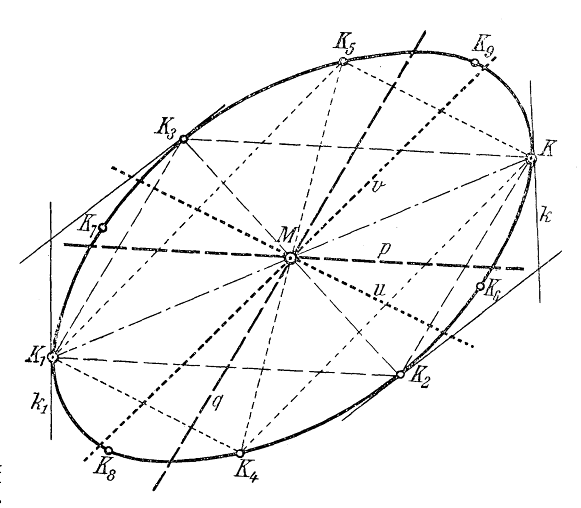
Auflösung. Zum gegebenen P erhält man durch das Sehnenparallelogramm drei weitere und ebenso zu T durch das Tangentenparallelogramm drei weitere. Aber die erhaltenen vier Punkte nebst getrennt liegenden vier T gestatten keine Konstruktion nach Paskal oder Brianchon. Es bedarf dazu vielmehr der Verwendung der involutorischen Eigenschaften.

Aufgabe 111. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind zwei Paare konjugierter Durchmesser und ein weiteres Kurvenelement P oder T.

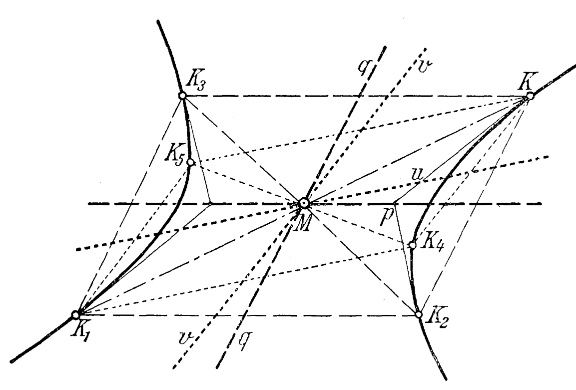
Erkl. 443. In Figur 133 und 134 ist aus dem Kurvenpunkt K zunächst

Auflösung. 1) Sind p und q das eine, u und v das andere Paar der gegebenen konjugierten Durchmesser, so liefert der gegebene Kurvenpunkt K zunächst durch die centrische Symmetrie zum Mittelpunkt den diametral gegen-

gezogen KK_1 durch $KM = MK_1$. Sodann $KK_2 // q$ und $KK_3 // p$; $K_1K_2 // p$, $K_1K_3 // q$. So entsteht das erste Sehnenparallelogramm $KK_1K_2K_3$. Dazu kommt dann $KK_4 // v$, $KK_5 // u$, $K_1K_4 // v$, $K_1K_5 // u$, und somit das Sehnenparallelogramm $KK_1K_4K_5$. Die Punkte K_6K_7 sind dann weiter erzeugt aus K_2K_3 mittels u und v, K_8K_9 ebenso aus K_4K_5 mittels pq u. s. w. Angedeutet sind auch die Konstruktionen der Tangenten $k // k_1$ in K und K_1, durch welche auf p und q die Schnittpunkte der in K_2 und K_3 berührenden Tangenten k_2k_3, auf u und v die Schnittpunkte der in K_4 u. K_5 berührenden Tangenten k_4 und k_5 ausgeschnitten werden.



Figur 133.



Figur 134.

überliegenden Kurvenpunkt K_1, und sodann je zwei weitere Punkte durch jedes der beiden Sehnenparallelogramme mit Mittelparallelen p und q bezw. u und v, welche die Strecke KK_1 als gemeinsame Diagonale haben. Aus den so erhaltenen sechs Kurvenpunkten kann dann entweder nach Paskal weiter konstruiert werden oder noch einfacher durch fortgesetzte Wiederholung der vorigen Konstruktion von Sehnenparallelogrammen aus je einem der neuentstehenden Kurvenpunkte.

Erkl. 444. Besonders bemerkenswert ist hier wieder die Determination der Aufgabe. Man erkennt nämlich sofort aus der Lage der gegebenen Stücke zu einander, was für eine Kurve entsteht. Da Parabel bei endlich gelegenen Mittelpunkt ausgeschlossen ist, so hat man nämlich sicher Ellipse (Fig. 133), wenn die Paare der konjugierten Durchmesser pq und uv einander trennen, dagegen Hyperbel (Figur 134), wenn die Paare der konjugierten Durchmesser pq und uv ungetrennt liegen, d. h. uv im gleichen Winkelraum von pq, pq im gleichen (stumpfen) Winkelraum von uv. Im gemeinsamen Winkelraume müssen dann die Asymptoten

2) In gleicher Weise liefert eine gegebene Kurventangente k zunächst durch Verdoppelung der Diagonalenhälften die diametral gegenüberliegende Kurventangente k_1, und sodann je zwei weitere Tangenten durch jedes der beiden Tangentenparallelogramme mit Diagonalen p und q bezw. u und v, welche die Mittelparallele von kk_1 als gemeinsame Mittelparallele haben. Aus den so erhaltenen

liegen, also in Figur 134 im spitzen Winkel (uv), bezw. im stumpfen Winkel (pq). — Die Aufgabe bildet eine Anwendung des in Figur 21 vorkommenden Zusammentreffens zweier Polardreiecke, gebildet von je derselben Ecke M und der unendlich fernen Geraden zusammen mit je einem Paare der konjugierten Durchmesser. Daher bedarf es zur Gesamtkonstruktion nur noch eines einzigen hinzukommenden Kurvenelementes.

sechs Kurventangenten kann dann entweder nach Brianchon weiter konstruiert werden, oder noch einfacher durch fortgesetzte Wiederholung der vorigen Konstruktion von Tangentenparallelogrammen aus je einer der neuentstehenden Kurventangenten.

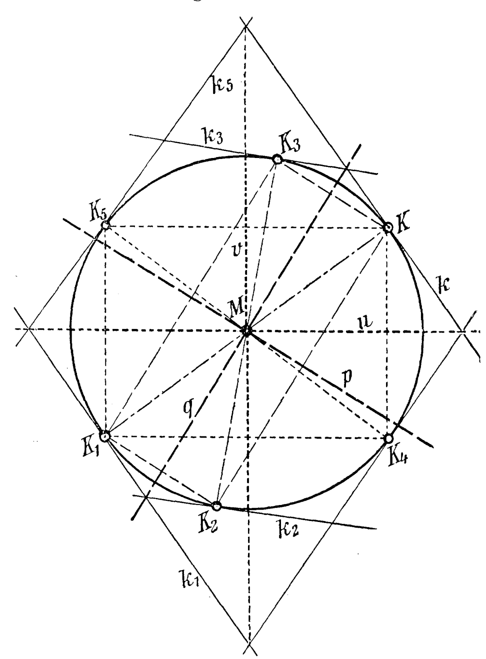
Aufgabe 112. Die vorige Aufgabe für den besonderen Fall zu konstruieren, daß die beiden Paare der konjugierten Durchmesser rechte Winkel bilden.

Erkl. 445. Daß ein Paar konjugierter Durchmesser senkrecht steht, kann auch in Figur 133 oder 134 bezw. in Aufgabe 108 vorkommen. Dann ist eben zufällig dieses Paar auch das Axenpaar der zu konstruierenden Ellipse bezw. Hyperbel. So ist in Figur 133 der Winkel (uv) nicht weit von einem rechten, und deshalb zeigen diese konjugierten Durchmesser uv auch nahezu die Lage der Axen der Kurve. Sind die beiden Winkel der gegebenen konjugierten Durchmesser in Figur 133 und 134 festgelegt, so können die Winkel der übrigen Paare noch die verschiedensten Werte annehmen, bei Figur 133 bis zu dem vorhandenen Minimum, bei Figur 134 bis zu Null. Sind aber die zwei gegebenen Paare konjugierter Durchmesser schon senkrecht zu einander, so können auch alle übrigen konjugierten Durchmesserpaare keinen anderen Winkel mehr aufweisen, als alle ebenfalls den rechten Winkel.

Erkl. 446. Der Gegenstand nebenstehender Auflösung deckt sich teilweise mit dem der Antwort der Frage 47. An vorliegender Stelle schließt sich diese Aufgabe aber unmittelbar an die vorhergehende allgemeinere Aufgabe an, sie erfährt auch allgemeinere Auffassung infolge des Hinzukommens des Tangentenparallelogramms, während an jener Stelle der Kreis bloß als Punktkurve aufgefaßt war. Daß

Auflösung. Wenn die beiden gegebenen Paare konjugierter Durchmesser senkrecht stehen, so liegen dieselben jedenfalls in getrennten Winkelräumen, liefern also sicher eine Ellipse und keine Hyperbel. Durch die rechten Winkel der Mittelparallelen pq, uv werden die

Figur 135.



Sehnenparallelogramme $KK_1 K_2 K_3$ und $KK_1 K_4 K_5$ zu Rechtecken, und durch die rechten Winkel der Diagonalen pq, uv werden die Tangentenparallelogramme

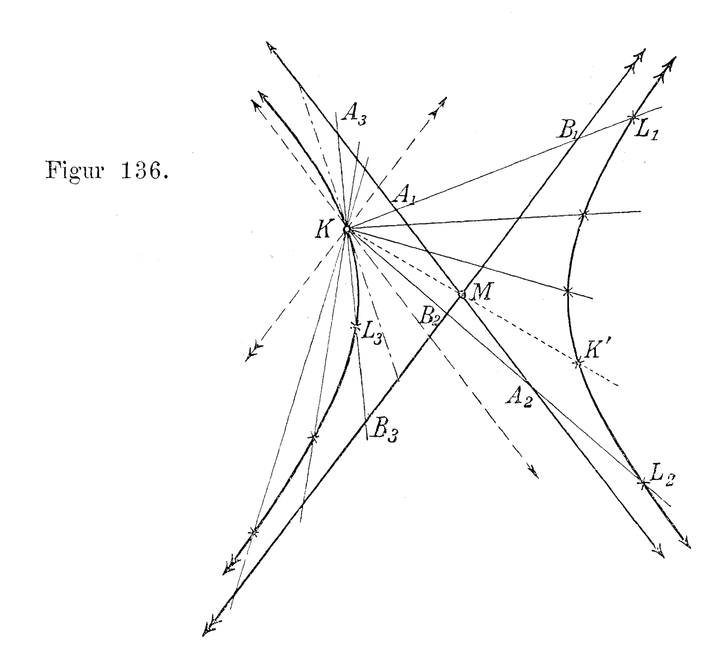
der Kreis sowohl als Punktkurve, wie auch als Tangentenkurve zu den Erzeugnissen der projektivischen Gebilde gehört, wurde erörtert im zweiten Teile dieses Lehrbuches, besonders Antwort 47 und Satz 20. Das Senkrechtstehen der sämtlichen Paare konjugierter Durchmesser des Kreises bildet noch den Gegenstand besonderer Erörterung bei den involutorischen Eigenschaften der Kurve.

$kk_1k_2k_3$ und $kk_1k_4k_5$ zu Rhomben. Die beiden Sehnenrechtecke haben also als gemeinsame Gegenecken die Punkte KK_1, und folglich sind die Diagonalen $KK_1 = K_2K_3 = K_4K_5$ alle drei gleichlang, die Punkte K bis K_5 sind Punkte eines Kreises um M mit Radius MK. Ebenso haben die Tangentenrhomben als gemeinsame Gegenseiten die Geraden $k//k_1$, und folglich sind die Abstände der Paralleltangentenpaare $k//k_1$, $k_2//k_3$, $k_4//k_5$ alle drei gleich, die Geraden k bis k_5 sind Tangenten eines Kreises um M mit Radius $\frac{1}{2}$ KK_1. Nun gehört aber der Kreis ebenfalls zu den Erzeugnissen der projektivischen Gebilde, und durch fünf Punkte bezw. fünf Tangenten ist nur eine einzige Kurve festgelegt, folglich muß die durch zwei Paare senkrechter konjugierter Durchmesser bestimmte Kurve stets ein Kreis sein (vgl. Satz 20).

Aufgabe 113. Man soll eine Hyperbel konstruieren aus den Asymptoten und einem gegebenen Kurvenpunkte auf Grund des Satzes 19.

Auflösung. Man macht den gegebenen Kurvenpunkt K (Fig. 136) zum Scheitel eines Strahlenbüschels und trägt auf jedem Strahl die

Figur 136.



Erkl. 447. Zu den hierhergehörigen Konstruktionsaufgaben über die Hyperbel sind auch zu rechnen die Aufgaben 261 und folgende (besonders 266) im II. Teile, welchedort konstruiert wurden auf Grund der durch maßgeometrische Betrachtungen gefundenen Hyperbeleigenschaften, während hier rein geometrische Untersuchungen zu den gleichen Beziehungen geführt haben.

zwischen K und der einen Asymptote entstehende Strecke als Abstand zwischen dem Schnittpunkt mit der anderen Asymptote und einem neuen Kurvenpunkte an, z. B. in Fig. 136 $KA_1 = B_1L_1$ oder $KA_2 = B_2L_2$ oder $KA_3 = B_3L_3$. Man könnte ebensowohl $KB_1 = A_1L_1$, $KB_2 = A_2L_2$, $KB_3 = A_3L_3$ machen; denn die Lage des Punktes A bezeichnet zweifellos die Innenwinkelräume der Asymptoten, innerhalb deren sämtliche Kurvenpunkte liegen müssen.

Erkl. 448 Unter den in Fig. 136 benutzten Strahlen befinden sich einige besonders bemerkenswerte. Zunächst liefert der Strahl KM den centrisch symmetrischen Kurvenpunkt K'. Ferner liefert der Parallelstrahl zur A-Asymptote den unendlich fernen Punkt eben dieser Asymptote, und ebenso der Parallelstrahl zur B-Asymptote deren unendlich fernen Punkt, weil die zugehörige Abstandstreke KA bezw. KB im unendlichen angetragen werden muß. Endlich gibt es auch einen Strahl, dessen Abschnitt zwischen beiden Asymptoten durch den Punkt K halbiert wird, und dieser Strahl muß die vom Punkt K an die Hyperbel gelegte Tangente bilden. Man findet seine Abschnitte auf den Asymptoten durch Verdoppelung der Abschnitte der beiden Parallelstrahlen zu den Asymptoten, weil diese die Mittelparallelen des von der Tangente mit den Asymptoten gebildeten Dreiecks sind.

Aufgabe 141. Auf dieselbe Weise eine Hyperbel zu konstruieren aus den zwei Asymptoten und einer Kurventangente.

---

7. Aufgaben über die Axen der Kurven.

(Zu Abschnitt 2d.)

Aufgabe 115. Von einer gegebenen bezw. durch beliebige fünf Elemente bestimmten Ellipse oder Hyperbel die Axen zu bestimmen.

Auflösung. Man konstruiert zunächst nach früheren Aufgaben den Mittelpunkt der Kurve und einen beliebigen Durchmesser nach Lage und Größe. Sodann verfährt man weiter nach Antwort 46 durch den Halbkreis über diesem Durchmesser.

Erkl. 449. Ist die Kurve vollständig gegeben, so erfolgt die Konstruktion ohne jede Schwierigkeit. Ist sie durch fünf Elemente bestimmt, so muß der Mittelpunkt nach Paskal oder Brianchon gefunden werden. Ebenso findet man nach Paskal den zweiten Endpunkt eines aus gegebenem bezw. gefundenem Kurvenpunkt durch den Mittelpunkt gelegten Durchmessers. Aber die Auffindung der Schnittpunkte des Halbkreises mit der Kurve erfordert die Annahme, daß der Kurvenbogen an jener Stelle gegeben oder durch eine große Zahl von Punkten genügend genau gefunden sei.

Aufgabe 116. Von einer hyperbolischen Kometenbahn seien fünf Punkte bestimmt und in Zeichnung festgelegt. Man suche das Perihel der Bahnkurve.

Andeutung. Das Perihel jeder Kometenbahn ist der Scheitelpunkt der Bahnkurve.

Aufgabe 117. Von einer gegebenen oder durch beliebige vier Elemente bestimmten Parabel den Scheitel zu suchen.

Erkl. 450. Bei Ellipse und Hyperbel bedarf es zur Axenkonstruktion eines Kreises und seiner Schnittpunkte mit der Kurve. Die Konstruktion dieser Elemente ist nicht elementar. Dagegen ist bei der Parabel der Scheitel nach Paskal stets konstruierbar, weil die Axe eine Sekante durch den samt Tangente gegebenen unendlich fernen Kurvenpunkt der Parabel darstellt.

Auflösung. Man konstruiert die Durchmesserrichtung und bestimmt eine darauf senkrechte Sehne der Parabel. Die Mittelsenkrechte dieser Sehne ist die Axe der Parabel, und deren Schnittpunkt mit der Parabel ist der Scheitel der Kurve.

Aufgabe 118. Wieviel Kurvenelemente sind noch erforderlich zur Konstruktion einer Parabel, wenn von derselben Axe und Scheitel gegegeben sind?

Erkl. 451. Die vier gegebenen Elemente sind $(T_\infty P_\infty)$ wegen Axenrichtung, und (PT) = Scheitelpunkt samt dessen auf der Axenrichtung senkrecht stehender Tangente, der sogenannten Scheiteltangente.

Auflösung. Es bedarf noch eines Punktes oder einer Tangente, denn die gegebenen Stücke stellen schon vier Elemente der Kurve dar.

Aufgabe 119. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind die Lage beider Axen sowie zwei Elemente PP oder TT oder (PT) oder P und T.

Andeutung. Man vergleiche Aufgabe 108 und 110.

Aufgabe 120. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind die beiden Scheitel derselben Axe und ein Kurvenelement P oder T.

Andeutung. Man kennt (PT) (PT) und dazu P oder T.

Aufgabe 121. Eine Hyperbel zu konstruieren aus den beiden Scheiteln und einer Asymptotenrichtung.

Aufgabe 122. Von einer Ellipse kennt man zwei Scheitel verschiedener Axen und noch die Lage eines Durchmessers. Kann sie konstruiert werden?

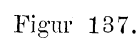
Auflösung. Auf dem gegebenen Durchmesser muß der Mittelpunkt so liegen, daß er der Scheitel des rechten Winkels der durch die zwei

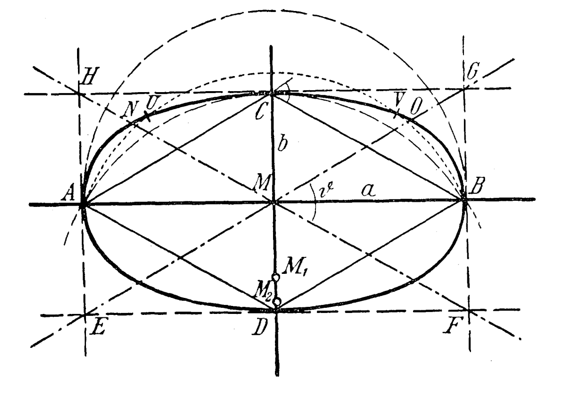
Erkl. 452. Je nach Lage des Durchmessers zu dem Halbkreis über der Verbindungssehne beider Scheitel gibt es zwei, eine oder keine Ellipse der verlangten Art.

Scheitel gehenden Axen ist. Man findet also den Mittelpunkt durch den Halbkreis über der Verbindungssehne der Scheitel.

Aufgabe 123. Man benutze die Hauptaxe einer Ellipse oder Hyperbel zu der Konstruktion der Aufgabe 99.

Auflösung. Der Halbkreis über der großen Axe AB muß die Ellipse völlig einschließen, die Hyperbel


Figur 137.



Erkl. 453. Die Figur für die Hyperbel besonders zu entwerfen, mag dem Studierenden überlassen bleiben. Man erkennt ohne weiteres, daß je zwei Kreisschnittpunkte symmetrisch zur Nebenaxe liegen, daß also auch zwei zur Nebenaxe symmetrisch liegende Sehnenparallelogramme bestimmt werden, und durch diese auch zwei symmetrisch liegende Paare konjugierter Durchmesser je in den beiden rechten Winkeln beiderseits der Nebenaxe. Und jedes Paar wird getrennt durch die beiden Asymptoten, welche als Grenzfall den Nullwinkel zweier konjugierten Hyperbeldurchmesser darstellen, und welche ausgeschnitten werden durch den unbegrenzt erweiterten Kreis, der gebildet wird durch die Axe AB selber zusammen mit der oberen Hälfte der unendlich fernen Geraden.

Erkl. 454. Der Kreisbogen AUVB in Figur 137 trifft die Ellipse zweimal, in U und V. Das Dreieck AUB hat als Mittelparallelen zwei Geraden von M, welche einmal zwischen A und N, einmal zwischen C und V die Kurve treffen. Und das

völlig ausschließen. Die Hyperbel wird von jedem größeren Kreisbogen durch A und B zweimal getroffen, liefert also konjugierte Durchmesserrichtungen von jeglichem Neigungswinkel in beliebig verlangter Größe, je paarweise in symmetrischer Lage. Die Ellipse wird von kleineren Kreisbogen zunächst zweimal geschnitten (Punkte U und V der Figur 137) und wird nur einmal berührt von demjenigen Kreisbogen, welcher durch den Scheitelpunkt C der kleinen Axe geht. Folglich ist $\sphericalangle$ ACB der größtmögliche, oder sein Nebenwinkel ϑ der kleinste aller Winkel, welchen zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse miteinander bilden können. Und gebildet wird dieser kleinste Winkel von denjenigen beiden konjugierten Ellipsenhalbmessern, welche die Mittelparallelen des Sehnenparallelogramms ADBC sind. Dieselben bilden aber die Diagonalen des

Dreieck AVB hat als Mittelparallelen zwei Geraden von M, welche einmal zwischen U und C, einmal zwischen O und B die Kurve treffen. Es gibt also auf den Kurvenbogen AN und UC und CV und OB je einen Punkt, in welchem Durchmesser und Tangente den Winkel AUB = AVB bezw. gleich seinem Nebenwinkel bilden, und wegen der Symmetrie sind es in der ganzen Ellipse acht Punkte dieser Art. Ueberhaupt gibt es also für jede Winkelgröße zwischen dem rechten Winkel und dem Winkel ACB bezw. zwischen dem Winkel ACB und 180 — ACB zwei konjugierte Durchmesserpaare bezw. acht Ellipsenpunkte, in welchen Durchmesser und Tangente diesen Winkel bilden.

Erkl. 455. Für den rechten Winkel sind die vier Scheitel als einzige Punkte und die Axen als einziges Paar konjugierter Durchmesser vorhanden (vergleiche Satz 20). Und für den Grenzwinkel ACB bezw. 180—ACB hat man ebenfalls nur ein einziges Paar konjugierter Durchmesser und nur vier Kurvenpunkte, welche eben von diesen ausgeschnitten werden. Die Figur 137 hat also dieselben Eigenschaften wie die Figur 35, daß nämlich zwei Paare konjugierter Durchmesser harmonisch zu einander liegen, daß das Sehnenparallelogramm des einen Paares jeweils parallele Seiten aufweist zum Tangentenparallelogramm des anderen Paares, und daß Ecken und Seiten je beider Arten von Parallelogrammen Pol und Polare bilden wegen der Berührungssehnen usw. Und eben diese beiden harmonisch liegenden Paare konjugierten Durchmesser von besonderer Eigenschaft sind die einzigen ihrer Art an der Kurve.

Tangentenparallelogramms EFGH, welches die Kurve in den vier Scheiteln berührt, und liegen harmonisch zu dessen Mittelparallelen, den Axen, und symmetrisch zu diesen. Man erhält also die merkwürdige Eigenschaft der Ellipse:

Satz. Die Diagonalen des Rechtecks, dessen Seiten die Ellipse in den vier Scheitelpunkten berühren, bilden zwei konjugierte Durchmesser, welche zu den Axen harmonisch liegen, zu den Axen symmetrisch liegen, gleiche Länge haben, und als Neigungswinkel ϑ den kleinsten Winkel bilden von allen Paaren konjugierter Durchmesser dieser Ellipse, indem $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}=\frac{b}{a}$.

Erkl. 456. Weil eben das Axenpaar das symmetrisch liegende Tangentenrechteck bestimmt, müssen auch die Diagonalen symmetrisch liegen, was sonst bei keinem Paar konjugierter Durchmesser zutrifft. Ebenso sind die Längen dieser beiden konjugierten Durchmesser dieselben, was sonst keinem Paare zukommt, wenn auch der längere und kürzere zweier konjugierten Durchmesser in fester Beziehung stehen (vergl. unten Aufg. 214). Die Winkelgröße ist aber einfach bestimmbar aus dem Dreieck MBG, wo $BMG=\frac{1}{2}\vartheta$, $MB=a$, $BG=MC=b$, also $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}=\frac{b}{a}$.

Aufgabe 124. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher man kennt einen Scheitel nebst Tangente und zwei Elemente PP oder TT oder (PT).

Erkl. 457. Würden P und T getrennt gegeben, so wäre keine vollständige Kon-

Auflösung. Die Scheiteltangente bestimmt die eine Kurvenaxe, und diese verdoppelt wegen der Symmetrie die übrigen Elemente zur Konstruktion nach Paskal für PP oder (PT) bezw. nach Brianchon für TT oder (TP).



struktion nach Brianchon oder Paskal ermöglicht. Gegebenes (PT) ermöglicht besonders leicht den Mittelpunkt zu finden. Man betrachte die Lage der Kurve zur einzig möglichen Parabel.

Aufgabe 125. Eine Ellipse oder Hyperbel zu konstruieren, von welcher gegeben ist die Lage einer Axe und die Elemente PPP oder P(PT) oder T(TP) oder TTT.

Erkl. 458. Die Aufgabe ist identisch mit Aufgabe 102; denn mit dem Namen „Axe" ist festgestellt, daß die Richtung des diesem Durchmesser konjugierten Durchmessers senkrecht dazu ist.

Auflösung. Die Axe verdoppelt durch die senkrechte Symmetrie die Anzahl der gegebenen Elemente. Man kennt also statt dreier deren sechs und kann weiter konstruieren nach Brianchon oder Paskal.

Aufgabe 126. Man soll für die Hyperbel die Bestimmungsstücke aufstellen, welche zur Lage einer Axe hinzutreten können.

Erkl. 459. Es kann auch die Aufgabe gestellt werden, eine Hyperbel zu konstruieren aus drei Elementen PPP oder P(PT), wenn außerdem gegeben sind die Richtungen einer Axe und einer Asymptote. Denn hierdurch wird die Richtung der zweiten Asymptote festgelegt durch nochmaliges Antragen des gleichen Winkels, welchen die beiden gegebenen Richtungen miteinander bilden.

Auflösung. Da die Axe die Stücke verdoppelt, so kann außer den gewöhnlichen Bestimmungselementen auftreten: eine Axenrichtung mit zwei Kurvenpunkten oder eine Asymptote nebst einem Punkt oder einer Tangente. Beide Asymptotenrichtungen sind nicht mehr beliebig, da die Axe den Winkel dieser Richtungen halbieren muß. Kennt man also eine Asymptotenrichtung oder eine Asymptote, so ist durch die Symmetrie die andere sofort bekannt.

Aufgabe 127. Dieselbe Aufgabe für die Parabel zu lösen.

Aufgabe 128. Von einer parabolischen Kometenbahn kennt man das Perihel und dessen Richtung zur Sonne. Wieviel weitere Beobachtungen sind nötig?

Erkl. 460. Wenn die Entfernung zwischen Perihel und Sonne als bekannt gilt, bedarf es überhaupt keiner weiteren Beobachtung mehr, da die Sonne den Brennpunkt der Parabel bildet, und Brennpunkt und Scheitel eine einzige Parabel bestimmen.

Auflösung. Das Perihel ist der Scheitel der Kurve und die Richtung vom Perihel zur Sonne die Parabelaxe, also hat man wie in Aufgabe 118 nur noch eine einzige Beobachtung nötig, um das eine fehlende weitere Kurvenelement zu beschaffen.

Aufgabe 129. Einen Kometen sah man in der Sehlinie geradlinig verschwinden, man kennt also die eine

Auflösung. Perihel und dessen Sonnenrichtung geben Scheitel und

Asymptote der hyperbolischen Bahn. Wenn nun außerdem das Perihel und dessen Richtung zur Sonne bekannt ist, so sollen weitere Bahnelemente durch Zeichnung gefunden werden.

Erkl. 461. Die Bahnen der Kometen, soweit sie nicht Ellipsen sind, also zurückkehrenden Kometen angehören, sind sämtlich Hyperbeln, welche aber Parabeln sehr nahe sind und auch von den Astronomen in erster Annäherung als Parabeln behandelt werden.

Axe, also ist auch der Mittelpunkt der Bahn als Schnittpunkt der bekannten Asymptote mit der Axe bekannt, und man hat durch Symmetrie die zweite Asymptote, kennt also drei Elementengruppen (PT) und kann sowohl nach Paskal als Brianchon konstruieren.

Aufgabe 130. Von einer parabolischen Geschoßbahn kennt man Ausgangspunkt und -richtung, sowie den Punkt, wo das Geschoß an einer Bergwand eingeschlagen. Man soll den höchsten Punkt der Flugbahn konstruieren.

Erkl. 462. Die an dieser Stelle zu behandelnden Aufgaben über Wurf- oder Geschoß-Flugbahnen können natürlich nur die parabolische Bahnkurve zum Gegenstand der Konstruktion machen. Diese sieht ab vom Reibungswiderstand der Luft und könnte daher streng genommen nur stattfinden im luftleeren Raum bezw. annäherungsweise bei solchen Geschossen bezw. Würfen, die infolge mäßiger Geschwindigkeit und geeigneter zugespitzter Form nur geringeren Luftwiderstand erfahren. Die wirkliche Flugbahn rasch fliegender Geschosse, welche ballistische Kurve genannt wird, weicht besonders in der zweiten Hälfte der Bahn (bei der Parabel ist der absteigende Ast dem aufsteigenden Aste symmetrisch gleich) ziemlich stark von der Parabel ab. Ihrer Berechnung stellen sich so vielerlei Schwierigkeiten hinsichtlich der praktischen Grundlagen entgegen, daß diese auch mit den Mitteln der höheren Mathematik kaum vollständig genau lösbar sein dürfte und der empirischen Aufstellung überlassen werden zu müssen scheint.

Erkl. 463. Der rein geometrischen Behandlungsweise entsprechend bleiben auch zwei andere Momente der Geschoß-

Auflösung. I) Man kennt von der vorliegenden Parabel $(P_\infty T_\infty)$(PT)P, nämlich außer den angegebenen Stücken die unendlich ferne Tangente und deren Berührungspunkt in der Richtung zum Erdmittelpunkte. Also kann man nach Paskal zunächst die Richtung konstruieren, in welcher das Geschoß am Treffpunkt eingeschlagen, nämlich die Tangente in jenem gegebenen Parabelpunkte, sodaß dreimal (PT) bekannt ist. Die höchste erreichte Höhe ist der Berührungspunkt der Scheiteltangente, also einer Tangente, die senkrecht steht auf der Axenrichtung zum Erdmittelpunkt, oder die parallel läuft zum Horizont. Nach Brianchon kann man aber diejenige Tangente der Parabel konstruieren, welche einer gegebenen Richtung parallel läuft, man erhält also diejenige Horizontale, welche die erreichte Höhe angibt. Endlich wird nochmals nach Brianchon auf dieser gefundenen Tangente der Berührungspunkt konstruiert, dann kennt man auch denjenigen Punkt, in welchem das Geschoß seine höchste Höhe erreicht hat.

II) Man kann aber dieselbe Aufgabe auch durch Konstruktion nach Paskal allein lösen. Legt man durch den Treffpunkt die Parallele zum Horizont, so kann man darauf den zweiten Kurvenpunkt konstruieren. Diese Sehne steht aber auf

bahn hier außer Betracht, welche in der physikalischen Behandlungsweise mit in erster Reihe stehen, nämlich die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses und die Flugzeit. Erstere ist in der Praxis bedingt durch die Art des Geschützes und besonders die Menge der Pulverladung und erscheint zusammen mit der Zeit t in den Formeln der elementaren Physik für die in der Zeit t von dem Geschoß erreichte horizontale Entfernung $x = c \cdot t \cdot \cos \alpha$ und die vertikale Entfernung $y = c \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$.

der Durchmesserrichtung senkrecht, folglich ist ihre Mittelsenkrechte die Axe der Kurve. Diese Axe selbst geht durch den unendlich fernen Kurvenpunkt und enthält als zweiten Kurvenpunkt den Scheitel der Kurve, welcher demnach wieder nach Paskal konstruierbar ist. Endlich findet man dann als Senkrechte zur Axe im Scheitel die Scheiteltangente, welche die höchste vom Geschoß erreichte Horizontale darstellt.

Aufgabe 131. Aus vorgeschriebenem Schießstand soll eine Kugel über den Rand einer Mauer von bekannter Entfernung und Höhe gerade noch hinübergeschossen werden. In welcher Richtung ist das Geschützrohr zu halten?

Erkl. 464. Es ist eine charakteristische Eigentümlichkeit jeder Wurfparabel, daß ihre Axenrichtung von vornherein bekannt ist als Richtung nach dem Erdmittelpunkt, weil in dieser Richtung die Erdschwere ihre Wirkung ausübt. Daher ist jede Vertikale durch einen Parabelpunkt auch rückwärts aufzufassen als eine Kurvensekante durch den gegebenen unendlich fernen Parabelpunkt nach oben, und auf ihr kann daher auch nach Paskal der Parabelpunkt konstruiert werden.

Auflösung. Von der vorliegenden Parabel kennt man $(P_\infty T_\infty)$ und den Ausgangspunkt P und den Höhepunkt der Mauer als Scheitel der Parabel samt Axe und Scheiteltangente, also der Symmetrie wegen auch den gegenüberliegenden Punkt zum Ausgangspunkt, und somit die Elemente (PT)(PT)PP. Die verlangte Richtlinie des Geschützes ist die Abgangsrichtung der Kugel, also die Tangente im ersten Parabelpunkte. Daher wird dieselbe durch eine einfache Konstruktion nach Paskal gefunden.

Aufgabe 132. Von einer Gewehrkugel kennt man Ausgangspunkt und Richtung sowie den Punkt des Niederfallens am Boden. Gesucht: Einschlagsrichtung, erreichte Höhe und höchster Punkt der Bahn.

Aufgabe 133. Von einem aufsteigenden Wasserstrahl kennt man Ausgangspunkt und Richtung und weiß, daß er eine horizontale Fläche von bekannter Höhe über dem Boden eben gestreift hat. Gesucht: Lage des höchsten Punktes und Ort des Niederfallens.

Erkl. 465. Auch die Bahn eines Wasserstrahls folgt denselben Gesetzen, wie die

Auflösung. Von der vorliegenden Parabel kennt man drei Tangenten nebst zwei Berührungspunkten, nämlich $(P_\infty T_\infty)$, (PT) an der Rohrmündung und die Scheiteltangente in der angegebenen Höhenlage. Man konstruiert also nach Brianchon den Berührungspunkt der letzteren gegebenen Tangente, kennt dadurch den Scheitel und die Axe und



Bahn eines geworfenen oder geschossenen Körpers. Als Fläche, welche gestreift wird, kann auch irgend eine schief liegende Fläche von bekannter Lage angenommen werden. Dann wird man erst aus der schiefen Tangente die horizontale, nämlich die Scheiteltangente konstruieren und die Aufgabe in gleicher Weise weiterführen.

findet durch Symmetrie den Treffpunkt am Boden.

Aufgabe 134. Aus denselben Bestimmungsstücken soll gefunden werden, wo der Wasserstrahl eine in gegebener Entfernung stehende hohe Mauer oder Wand treffen muß.

Erkl. 466. Die Auflösung ist nur dadurch möglich gemacht, daß die Wand bezw. Mauer auf dem Erdboden senkrecht steht. Auf einer schiefen Bergwand bezw. Dachfläche, welche keine Gerade durch einen bekannten Parabelpunkt enthält, würde die Aufgabe nicht mit den vorliegenden Mitteln möglich sein.

Auflösung. Die Mauer enthält in der Ebene der Parabel eine senkrechte Gerade, welche als Strahl durch den unendlich fernen Berührungspunkt anzusehen ist. Auf ihr ist also nach Paskal der zweite Kurvenpunkt zu konstruieren. Da unter den Bestimmungsstücken aber drei Tangenten sind, muß erst nach Brianchon ein dritter Berührungspunkt, und zwar auf der Scheiteltangente konstruiert werden.

Aufgabe 135. Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn von dem Wasserstrahl außer Ausgangspunkt und Richtung der höchste Punkt selber oder der (nach anderer Richtung auszuprobierende) Ort des Niederfallens bekannt ist.

* * *

Aufgabe 136. Man soll untersuchen, in welcher Weise die Mittelpunktseigenschaften der Kurve bei ihrer polaren Abbildung in Erscheinung treten.

Erkl. 467. Aus den drei ersten Teilen nebenstehender Untersuchung läßt sich entnehmen, daß zu einer Originalellipse oder Parabel oder Hyperbel, stets als Bildkurve eine Kurve gehört, welche den Mittelpunkt M der Kernkurve einschließt oder berührt oder ausschließt. Dabei kann dieselbe Bildkurve in jedem Falle noch selber Ellipse oder Parabel oder Hyperbel sein. Insbesondere wird eine Parabel, welche durch den Mittelpunkt M der Kernkurve geht, wieder zu einer Parabel durch denselben Punkt. Und zwar werden jeweils Tangente der Originalparabel in M und Axenrichtung der Bildparabel oder um-

Auflösung. Die wichtigsten Beziehungen für die polare Abbildung der Kurve ergeben sich nicht sowohl aus den Mittelpunktseigenschaften der Originalkurve selber, als von ihren Beziehungen zu den Mittelpunktseigenschaften der gewählten Fundamental- oder Kernkurve.

1) Hat die Originalkurve den Mittelpunkt der Kernkurve als Kurvenpunkt, so erhält die Bildkurve die unendlich ferne Gerade zur Tangente, wird also Parabel; und umgekehrt wird jede Parabel als Originalkurve zu einer Bildkurve, welche durch den Mittelpunkt der Kernkurve hindurchgeht.

2) Hat die Originalkurve den Mittelpunkt der Kernkurve als

gekehrt zu konjugierten Durchmesserrichtungen der Kernkurve, denn die Tangente durch M ist ein Durchmesser der Kernkurve, und ihr entspricht als Polpunkt der unendlich ferne Berührungspunkt der Bildparabel, also läuft deren Axenrichtung nach dem Polpunkt jenes Durchmessers.

Erkl. 468. Zu den obengenannten Eigenschaften treten als schon früher behandelte und mit den Mittelpunktseigenschaften nicht unmittelbar zusammenhängende Erscheinungen hinzu die Lagebeziehungen der Kurvenelemente der Originalkurve zur Kernkurve; gemeinsamen Punkten der Originalkurve und Kernkurve entsprechen gemeinsame Tangenten der Bildkurve und Kernkurve und umgekehrt. Vergl. Erkl. 80. So wird der Mittelpunkt (ab) der Bildhyperbel im zweiten Teile nebenstehender Ausführung außerhalb der Kernkurve zu liegen kommen, wenn die Berührungssehne AB der Tangenten u und v die Kernkurve schneidet, aber innerhalb, wenn jene Gerade außerhalb der Kernkurve läuft.

Erkl. 469. Allgemein kann man sagen, daß als Mittelpunkt der Bildkurve diejenige Gerade an der Originalkurve abgebildet wird, welche die Polare des Mittelpunktes der Kernkurve inbezug auf die Bildkurve bezw. die Berührungssehne der vom Mittelpunkt der Kernkurve an die Originalkurve gehenden Tangenten ist. Hat die Originalkurve ihren Mittelpunkt innerhalb der Kernkurve, so werden ihre sämtlichen Durchmesser zu äußeren Punkten der Kernkurve auf der Polargeraden dieses Mittelpunktes inbezug auf die Kernkurve, deren Lage zur Bildkurve von der Gattung der Originalkurve abhängt. Paralleltangenten der Originalkurve werden zu Kurvenpunkten der Bildkurve auf einen Durchmesser der Kernkurve und umgekehrt. Damit durch eine elliptische Kernkurve eine Originalellipse als Bildellipse abgebildet wird, muß die eine von der Kernkurve eingeschlossen werden und deren Mittelpunkt einschließen, die andere die ganze Kernkurve einschließen, usw. usw.

äußeren Punkt, welcher also zwei Tangenten u und v an die Punkte A und B der Bildkurve sendet, so erhält die Bildkurve die unendlich ferne Gerade als Sekante, wird also Hyperbel, und die unendlich fernen Pole U und V von u und v sind deren Asymptotenrichtungen, die Polaren a und b von A und B die Asymptoten, der Polpunkt (ab) der Geraden AB der Hyperbelmittelpunkt.

3) Hat die Originalkurve den Mittelpunkt der Kernkurve als inneren Punkt, welcher also keine Tangenten an die Originalkurve sendet, so wird die Bildkurve die unendlich ferne Gerade nicht treffen, sie wird zu einer Ellipse.

4) Von den Mittelpunktseigenschaften der Originalkurve findet Uebertragung nur insofern statt, daß sie als harmonische Polaritätsbeziehungen auftreten zum Mittelpunkt der Kernkurve bezw. zu der dem Mittelpunkt der Originalkurve entsprechenden Polargeraden. Ein beliebiger schneidender oder nichtschneidender Durchmesser der Originalkurve wird zu einem beliebigen äußeren oder inneren Punkt auf dieser Geraden der Bildkurve. Und da konjugierte Punkte bezw. Gerade zu konjugierten Geraden bezw. Punkten werden, Polardreieck zu Polardreiseit, Polardreiseit zu Polardreieck, so liefern zwei konjugierte Durchmesser der Originalkurve zwei konjugierte Punkte auf der dem Mittelpunkt der Originalkurve entsprechenden Geraden, welche zusammen mit dem Mittelpunkt der Kernkurve ein Polardreieck der Bildkurve bilden. Das gleiche gilt von den Axen der Originalkurve, deren rechter Winkel in keinerlei ausgezeichnete Maßbeziehung übertragen wird.

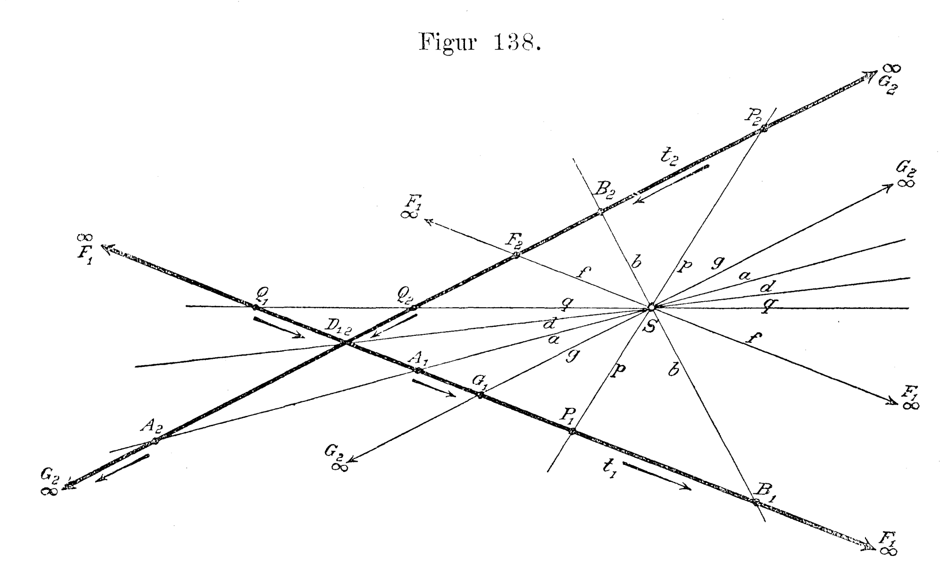
8. Aufgaben über involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel.

(Zu Abschnitt 3a und b.)

Aufgabe 137. Man soll die involutorische Lage von Punktreihen und Strahlenbüscheln aus der einfachsten Beziehung zweier projektivisch verwandten Punktreihen in perspektivischer Lage ableiten.

Auflösung. 1) In Fig. 138 sind t_1 und t_2 zwei projektivisch verwandte Punktreihen in perspektivischer Lage; F_2 und G_1 sind die den unendlich fernen Punkten $_\infty F_1$

Figur 138.



und $_\infty G_2$ zugeordneten Punkte, also die Fluchtpunkte oder Gegenpunkte. Dabei entsprechen also allen Punkten von t_1, welche den von G_1 ausgehenden Halbstrahl $G_1 P_1 B_1 F_1$ erfüllen, nur solche Punkte von t_2, welche den Halbstrahl $G_2 P_2 B_2 F_2$ bis F_2 erfüllen, und solchen Punkten von t_1, welche den von G_1 ausgehenden Halbstrahl $G_1 A_1 D_1 Q_1 F_1$ erfüllen, nur solche Punkte von t_2, welche den Halbstrahl $G_2 A_2 D_2 Q_2 F_2$ bis F_2 erfüllen. Denkt man sich nun die Gerade t_2 von ihrem Platze aufgehoben und so auf t_1 aufgelegt, dass die Gegenpunkte $F_2 G_1$ als ein Punkt M zur Deckung gebracht werden, so kann dies immer noch auf zwei Arten geschehen, jenachdem nämlich auf den Halbstrahl $G_1 B_1 F_1$ von t_1 der Halbstrahl $F_2 Q_2 G_2$ von t_2 oder sein

Erkl. 470. Der zweite Teil der nebenstehenden Auflösung ergibt dieselbe Behandlung der Fig. 138, welche schon in Antwort der Frage 37 des I. Teiles durchgeführt wurde: Die Dreiecke $g t_1 q$ und $t_2 f q$ sind ähnlich wegen der Parallelität $g // t_2$, $t_1 // f$, also $\sphericalangle (g t_1) = (t_2 f)$, $(gq) = (t_2 q)$, $(t_1 q) = (fq)$. Und die aus dieser Aehnlichkeit hervorgehende Proportion $G_1 S : G_1 Q_1 = F_2 Q_2 : F_2 S$ liefert $G_1 S \cdot F_2 S = G_1 Q_1 \cdot F_2 Q_2$. Ebenso sind die Dreiecke $g t_1 b \sim t_2 f q$, weil $\sphericalangle (g t_1) = (t_2 f)$, $(gb) = (t_2 b)$, $(t_1 b) = (fb)$. Und die aus dieser Aehnlichkeit hervorgehende Proportion $G_1 S : G_1 B_1 = F_2 B_2 : F_2 S$ liefert jetzt $G_1 S \cdot F_2 S = G_1 B_1 \cdot F_2 B_2$. Beide Produkte sind aber auch dem aus der Aehnlichkeit $g t_1 p \sim t_2 f p$ hervorgehendem Produkte $G_1 P_1 \cdot F_2 P_2$ gleich, und so erhält man entweder das Zusammenfallen von Q_1 mit P_2 als Folge des Auflegens von Q_2 auf P_1, oder das

Zusammenfallen von B_1 mit P_2 als Folge des Auflegens von B_2 auf P_1. Der erste Fall gibt eine sogen. hyperbolische Punktinvolution mit ungleich laufenden projektivischen Einzelpunktreihen, der zweite Fall die elliptische Punktinvolution mit gleichlaufenden projektivischen Einzelpunktreihen.

Figur 139.

Erkl. 471. Auch der Inhalt des Satzes 22, durch welchen die Allgemeinheit des Doppeltentsprechens zur Grundlage der weiteren Untersuchungen gemacht wird, läßt sich aus nebenstehendem Satze herleiten, indem man von jener Voraussetzung aus mittels des Doppelverhältnisses dies Zusammenfallen der Gegenpunkte als Folgerung nachweist. Sind nämlich zunächst die Punktpaare $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ so aufeinandergefallen, daß Q_2 auf P_1 und P_2 auf Q_1 (Fig. 139 α) kam, und es entspricht dabei dem unendlich fernen Punkte G_2 der Punktreihe t_2 der Punkt G_1 in t_1, so fragt sich, welcher Punkt von t_1 demjenigen Punkt von t_2 entspricht, welcher mit G_1 zusammenfällt. Man nennt diesen vorläufig etwa E_2 und beweist, daß er mit dem Gegenpunkt F_2 zum unendlich fernen Punkt F_1 identisch ist. Projektivisch sind nämlich jetzt die Punktgruppen $P_1 Q_1 G_1 E_1$ und $P_2 Q_2 G_2 E_2$, also sind gleiche Doppelverhältnisse $(P_1 Q_1 G_1 E_1) = (P_2 Q_2 G_2 E_2)$, oder

$$\frac{P_1 G_1}{Q_1 G_1} : \frac{P_1 E_1}{Q_1 E_1} = \frac{P_2 G_2}{Q_2 G_2} : \frac{P_2 E_2}{Q_2 E_2}.$$

Nun ist aber hierin laut Annahme an der Figur 139 α $\frac{P_2 G_2}{B_2 G_2} = \frac{\infty}{\infty} = 1$, und $P_1 G_1 = Q_2 E_2$, $Q_1 G_1 = P_2 E_2$, also wird das zu suchende $\frac{P_1 E_1}{Q_1 E_1} = \frac{P_1 G_1}{Q_1 G_1} \cdot \frac{P_2 E_2}{Q_2 E_2} = 1$. Da hier E_2

Gegenstrahl $F_2 B_2 G_2$ aufgelegt wurde. Auf dem nunmehr gemeinsamen Träger der beiden projektivischen Punktreihen werden im ersteren Falle (Fig. 139 α) je zwei zugeordnete Punkte stets auf verschiedenen Seiten, im zweiten Falle (Fig. 139 β) immer auf derselben Seite des Punktes M liegen.

2) Nun bilden aber in Figur 138 die Parallelstrahlen $f // t_1$ und $g // t_2$ mit jedem der Projektionsstrahlen ein Paar von ähnlichen Dreiecken mit parallelen Seiten, z. B. $\triangle\, g t_1 p \sim t_2 f p$ oder $\triangle\, g t_1 q \sim t_2 f q$, und daraus ergibt sich, daß dasselbe Produkt $G_1 S \cdot F_2 S$ das einemal gleich $G_1 P_1 \cdot F_2 P_2$, das anderemal gleich $G_1 Q_1 \cdot F_2 Q_2$ wird, also auch alle Produkte dieser Art einander gleichwerden. Trifft es sich also, daß beim oben verlangten Aufeinanderlegen der beiden Punktreihen die Strecke $F_2 Q_2$ auf die Strecke $G_1 P_1$ zu liegen kommt (Fig. 139 α), so folgt aus $G_1 P_1 \cdot F_2 P_2 = G_1 Q_1 \cdot F_2 Q_2$ wegen Gleichheit des ersten und letzten Faktors auch Gleichheit der beiden anderen, nämlich $F_2 P_2 = G_1 Q_1$ bezw. $MP_2 = MQ_1$. Trifft es sich aber bei der anderen Art des Aufeinanderlegens der beiden Punktreihen, daß auf die Strecke $G_1 P_1$ etwa die Strecke $F_2 B_2$ zu liegen kommt (Fig. 139 β), so folgt diesmal aus $G_1 P_1 \cdot F_2 P_2 = G_1 B_1 \cdot F_2 B_2$ wieder wegen Gleichheit des ersten und letzten Faktors auch die Gleichheit der beiden anderen, nämlich $F_2 P_2 = G_1 B_1$ bezw. $MP_2 = MB_1$.

innerhalb $Q_2 P_2$ liegt, muß wegen der gleichlaufenden Projektivität E_1 außerhalb $Q_1 P_1$ liegen, folglich wird E_1 zu demjenigen äußeren Punkt von $Q_1 P_1$, der diese Strecke im Einheitsverhältnis teilt, und das kann nur der unendlich ferne sein. Also sind $E_1 E_2$ die Punkte $F_1 F_2$. Sind umgekehrt $P_1 B_1$ und $B_2 P_2$ aufeinandergefallen (Fig. 139β), so findet sich in genau gleicher Weise $(P_1 B_1 G_1 E_1) = (P_2 B_2 G_2 E_2)$,

$$\frac{P_1 G_1}{B_1 G_1} : \frac{P_1 E_1}{B_1 E_1} = \frac{P_2 G_2}{B_2 G_2} : \frac{P_2 E_2}{B_2 E_2};$$

$$\frac{P_1 E_1}{B_1 E_1} = \frac{P_1 G_1}{B_1 G_1} \cdot \frac{P_2 E_2}{B_2 E_2} = 1.$$

Da hier E_2 außerhalb $B_2 P_2$ liegt, muß wegen der ungleichlaufenden Projektivität auch E_1 außerhalb $B_1 P_1$ liegen, folglich wird E_1 wieder zu demjenigen äußeren Punkt von $P_1 B_1$, der diese Strecke im Einheitsverhältnis teilt, also zum unendlich fernen Punkte. Auch hier sind also $E_1 E_2$ die Punkte $F_1 F_2$.

3) Im ersten Fall kommt aber P_2 auf dieselbe Seite von M zu liegen wie Q_1, im zweiten Falle dagegen P_2 auf dieselbe Seite wie B_1, also muß auch wirklich Punkt P_2 auf Q_1 bezw. P_2 auf B_1 fallen, wenn Q_2 auf P_1 bezw. B_2 auf P_1 gefallen war. Da aber die Punktpaare $P_1 Q_2$ bezw. $P_1 B_2$ ganz beliebig ausgewählt waren, so ist damit die Grundlage der involutorischen Beziehung gewonnen, nämlich der

Satz: Wenn in zwei auf gleichem Träger liegenden projektivischen Punktreihen die Gegenpunkte zusammenfallen, so sind je zwei zugeordnete Punkte beider Reihen einander doppelt entsprechend, sie bilden eine involutorische Punktreihe.

4) Als involutorischen Strahlenbüschel definiert man dann ganz einfach den Strahlenbüschel, durch welchen die sämtlichen einander doppelt entsprechenden Punktpaare einer involutorischen Punktreihe projiziert werden. Auch die Strahlen dieses Büschels sind dadurch in der Weise zugeordnet, daß je zwei zugeordnete Strahlen beider Büschel einander doppelt entsprechen.

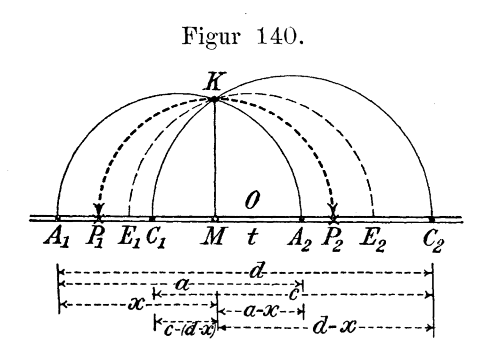
Erkl. 472. Die vorstehende Ueberlegung zeigt, daß aus dem Doppeltentsprechen eines Punktpaares das Zusammenfallen der Gegenpunkte folgt, und aus dem Zusammenfallen der Gegenpunkte folgt auf Grund des nebenstehenden Satzes wieder das Doppeltentsprechen aller Punktpaare. Durch diesen Zwischenschluß ist aber auch erst die Möglichkeit geboten, den involutorischen Strahlenbüschel, welcher Strahlen von der Eigenart der Gegenpunkte nicht besitzt, auf dieselbe Grundlage zu stellen; und damit sind aus der obigen einfachsten Verwandtschaft beiderlei involutorische Gebilde hergeleitet als projektivisch verwandte Gebilde auf gemeinsamem Träger mit Doppeltentsprechen sämtlicher zugeordneten Elementenpaare.

Aufgabe 138. Von einer elliptischen oder hyperbolischen Punktinvolution seien gegeben irgend zwei zugeordnete Punktpaare. Man soll beliebige weitere zugeordnete Punktpaare sowie auch die besonderen Punkte der Involution konstruieren.

Auflösung. 1) Man kann verfahren nach der rein geometrischen Behandlungsweise der Figuren 47 und 48 S. 100. Man bezeichnet die beiden gegebenen Punktpaare als Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ bezw. $A_2 B_2 C_2 D_2$ zweier Punktreihen $t_1 t_2$ auf

Erkl. 473. Bei der ersten Auflösung der Aufgabe könnte die Frage entstehen, ob man rückwärts und vorwärts denselben gepaarten Punkt erhält, d. h. denselben, ob man zu einem Punkte E_1 Punkt E_2 sucht, oder zu dem in t_1 als L_1 bezeichneten Punkt E_2 wieder $L_2 = E_1$. Diese Frage ist aber oben in Antwort 52 ausführlich erörtert und bejahend erledigt. Ob man in Figur 47 und 48 die Reihe der Projektionen von B_1 über B_3 $B_4 B_2$ oder rückwärts von A_2 über A_4 $A_3 A_1$ durchführt, ergibt gleicherweise dasselbe Punktpaar $A_1 A_2$ oder $B_1 B_2$. — Zur Konstruktion des Mittelpunktes zieht man entweder $S_1 F_{1\infty} // t_1$ nach F_3 auf t_3, dann $F_3 S_0$ nach F_4 auf t_4 und $F_4 S_2$ nach $F_2 = M$ oder $S_2 G_{2\infty} // t_2$ nach G_4 auf t_4, dann $G_4 S_0$ nach G_3 auf t_3 und $G_3 S_1$ nach $G_1 = M$.

Figur 140.



Erkl. 474. In Figur 140 und 141 sind dieselben Punkte $A_1 A_2 C_1 C_2$ gewählt, welche in Figur 47 und 48 zur Konstruktion dienten. Daher erhalten auch die Punkte $M_1 P_1 P_2 X Y$ dieselbe Lage unter den übrigen Punkten, wie in Figur 47 und 48. Die beiden Konstruktionen nach Figur 140 und 141 lassen zuerst den Mittelpunkt M aufsuchen und mit dessen Hilfe dann die weiteren Punktpaare. Ob nach Figur 140 oder 141 zu konstruieren ist, erkennt man sofort aus der gegenseitigen Lage der Punktpaare, nämlich ob elliptische Involution mit getrennten oder hyperbolische Involution mit ungetrennten Strecken der Punktpaare vorliegt. In Figur 140 kann man in gemeinsamem Träger, projiziert t_1 aus beliebigem Scheitel S_1 auf den beliebig durch D_1 gelegten Träger t_3, t_3 aus $B_2 = S_0$ auf den als Verbindungsgrade $S_1 C_1$ durch C_1 gelegten Träger t_4, und t_4 aus $B_3 = S_2$ wieder zurück auf den gemeinsamen Träger $t_{1\,2}$. Nach der Zeichenvorschrift $t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_3 \overline{\overline{\wedge}} S_0 \overline{\overline{\wedge}} t_4 \overline{\overline{\wedge}} S_2 \overline{\overline{\wedge}} t_2$ erhält man so zu jedem beliebigen Punkt von t_1 den zugehörigen von t_2, also je zwei zugehörige Punkte der Involution. — So erhält man insbesondere den Mittelpunkt M der Involution als zugehörigen zum unendlich fernen Punkte der einen oder anderen Reihe. — Dagegen ist die Aufsuchung der Ordnungspunkte XY bezw. der Potenzpunkte $P_1 P_2$ nicht ohne Zuhilfenahme anderer Ueberlegungen durchführbar.

2) Verfährt man nach der maßgeometrischen Behandlungsweise, so hat man zunächst zu unterscheiden, ob die Involution eine elliptische oder hyperbolische ist.

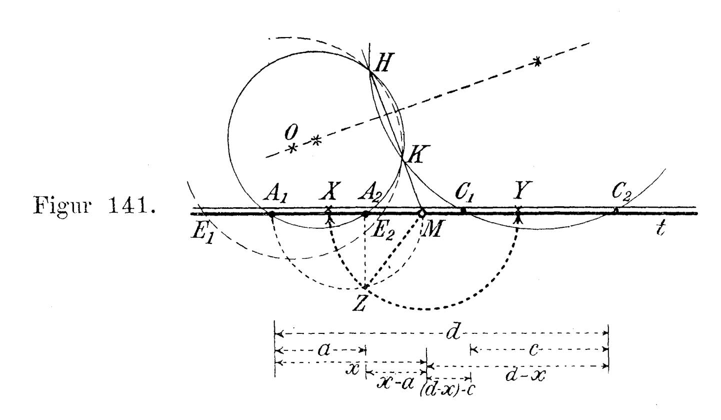
Im ersteren Falle (Figur 47 bezw. 140) wo die Strecke $A_1 A_2$ durch $C_1 C_2$ getrennt liegt, zeichnet man über $A_1 A_2$ und $C_1 C_2$ je einen Halbkreis und fällt aus dem Schnittpunkt K beider Halbkreise die Senkrechte KM auf t. Dann ist M der gesuchte Mittelpunkt, und jeder andere Halbkreis durch K mit Durchmesser auf t schneidet t in zwei weiteren zugeordneten Punkten E_1 E_2. Denn $\overline{MK}^2 = MA_1 \cdot MA_2 = MC_1 \cdot MC_2 = ME_1 \cdot ME_2 = MP_1 \cdot MP_2 = \overline{MP_1}^2 = \overline{MP_2}^2$. Der Halbkreis um M mit Radius MK liefert nämlich auch die Potenzpunkte $P_1 P_2$, welche als zugeordnete Punkte im gleichen Abstand beiderseits M liegen.

Im zweiten Falle (Figur 118 bezw. 141), wo die Strecke $A_1 A_2$ durch $C_1 C_2$ ungetrennt liegt, zeichnet man durch $A_1 A_2$ einen beliebigen Kreis und durch $C_1 C_2$ ebenfalls einen beliebigen Kreisbogen, der den

liebigem Punkte O auf t einsetzen, seinen Abstand OK von K als Radius nehmen, und durch den Halbkreis $E_1 K E_2$ um O jedesmal zwei zugeordnete Punkte E_1 E_2 erhalten. Ist deren einer, z. B. E_1 vorgeschrieben, so wird man $E_1 K$ ziehen, und erhält den zur Ausführung notwendigen Kreismittelpunkt O durch die Mittelsenkrechte auf $E_1 K$.

ersteren schneidet in zwei Punkten H und K. Dann trifft die Verbindungsgerade HK den Träger t im Mittelpunkt M der Involution, und jeder andere Kreis durch H und K schneidet t in zwei weiteren zugeordneten Punkten $E_1 E_2$. Denn $MH \cdot MK = MA_1 \cdot MA_2 = MC_1 \cdot MC_2 = ME_1 \cdot ME_2$. — Den Abstand MX

Figur 141.



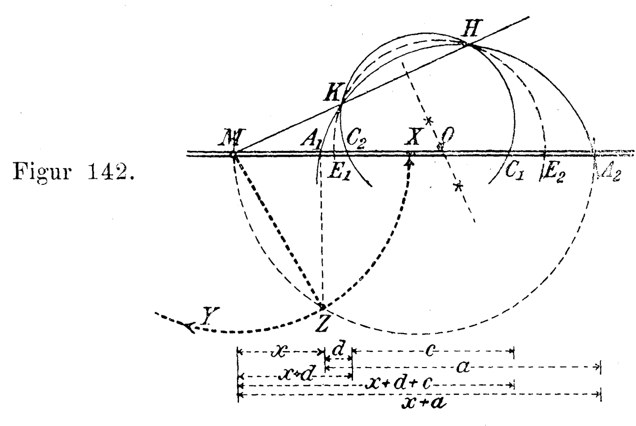
der Ordnungspunkte X und Y konstruiert man als mittlere geometrische Proportionale zu irgend zweien der ebengenannten Strecken z. B. als Sehne MZ über MA_2 im Halbkreis über MA_1. Es ist nämlich $\overline{MX}^2 = \overline{MY}^2 = \overline{MZ}^2 = MA_1 \cdot MA_2$.

Erkl. 475. Die maßgeometrischen Gleichungen, welche an Figur 140 und 141 zum Ansatz gelangen, sind die des Sekantensatzes der Planimetrie. Dazu kommt im Halbkreis A_1ZM der Satz vom Sehnenquadrat $\overline{MZ}^2 = MA_1 \cdot MA_2$. Diese Strecke MZ hätte man auch erhalten können als Tangentenabschnitt aus M an den einen oder anderen der Kreise durch H und K. Denn es ist $MA_1 \cdot MA_2 = MK \cdot MH =$ dem Quadrat des Tangentenabschnitts an jeden Kreis des Kreisbüschels HK. Man kann in beliebigem Punkte O auf der Mittelsenkrechten von HK einsetzen, seinen Abstand $OH = OK$ als Radius nehmen und durch den Kreisbogen $HK E_1E_2$ um O jedesmal zwei zugeordnete Punkte E_1 und E_2 erhalten. Ist einer derselben vorgeschrieben z. B. E_1, so wird man E_1K ziehen, und erhält den zur Ausführung erforderlichen Kreismittelpunkt O auf HK durch den Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten von E_1 K und HK.

Erkl. 476. In Anlehnung an die grundlegende Figur 48 enthält Figur 141 die Punktgruppen $A_1A_2 C_1C_2$ in der Lage,

3) Man kann aber auch rein rechnend verfahren, indem man die Lage des Punktes M durch Rechnung findet, und dann die Lage jedes anderen Punktes aus dem konstanten Produkt oder der Potenz der Punktinvolution ableitet. Bezeichnet man zu dem Zwecke jedesmal den Abstand $A_1M = x$ und die Strecken $A_1A_2 = a$, $C_1C_2 = c$ und in Figur 140 und 141 etwa den längsten Abstand A_1C_2, in Figur 142 den kürzesten Abstand A_1C_2 mit d, so hat man wieder verschiedene Lagen für M je nach der Lage der elliptischen oder den beiden Lagen der hyperbolischen Involution. Im ersten Falle (Figur 140) ist $MC_2 = d - x$, aber $MA_2 = a - x$, $MC_1 = c - (d - x)$, im zweiten Falle

welche sie für die hyperbolische Involution in Figur 50 $I\beta$ annehmen, daß nämlich bei ungetrennter Lage das Punktpaar C_1C_2 ganz außerhalb der Punktstrecke A_1A_2 liegt. Es kann aber die Punktstrecke C_1C_2 statt auf der äußeren Strecke der Punkte A_1A_2, auch wie in Figur 50 $I\gamma$ auf der inneren Strecke dieser Punkte liegen. Dadurch erfährt die Konstruktion geringe Abweichungen, welche in Figur 142 dargestellt sind: Die Mittelsenkrechte der Kreisschnittpunkte HK trifft den Träger t nicht innerhalb sondern außerhalb, und die Gerade HK selber schneidet den Mittelpunkt M nicht innerhalb, sondern außerhalb der beiden Punktstrecken auf t aus. Dieser Punkt M liegt auf derjenigen Seite der Strecke A_1A_2, wo der Abstand A_1C_2 kleiner ist als der Abstand A_2C_1; noch ferner außerhalb A_1A_2, als M, liegt der zweite Ordnungspunkt Y; dagegen ist die Konstruktion der Strecke $MX = MY$ dieselbe wie zuvor, nämlich als Sehne MZ über MA_1 im Halbkreis über MA_2, oder auch als Tangentenstrecke an einen der Kreise durch HK.



Figur 142.

Erkl. 477. Wenn man zur rechnenden Durchführung dieser Aufgabe die Strecke A_1M als x bezeichnet, so wird man nach nebenstehender Gleichung erhalten $x = \frac{d(d-c)}{2d-a-c}$. Würde man den Abstand A_2M als y bezeichnen, so käme $y = \frac{(d-c)(d-a-c)}{2d-a-c}$; würde (Figur 141) ist auch $MC_2 = d - x$, aber $MA_2 = x - a$, $MC_1 = (d-x) - c$. Die Gleichung der konstanten Produkte $MA_1 \cdot MA_2 = MC_1 \cdot MC_2$ erhält daher im ersten Fall die Form $x(a-x) = (d-x)[c-(d-x)]$, im zweiten Fall $x(x-a) = (d-x)[(d-x)-c]$. Die Ausrechnung wird also für beide Fälle ganz identisch, da nur je eine der Klammern auf beiden Seiten entgegengesetztes Vorzeichen bekommt. Man findet demnach beidemale $x^2 - ax = x^2 - 2dx + cx + d(d-c)$, und durch Wegfall von x^2 wird $x(2d-a-c) = d(d-c)$, $x = \overline{MA_1} = \frac{d(d-c)}{2d-a-c}$. Damit ist der Abstand des Punktes M von A_1 festgestellt. Das Produkt $\overline{MA_1} \cdot \overline{MA_2} = \pm x(x-a)$ wird

$$\pm k^2 = \frac{\pm d(d-a)(d-c)(d-a-c)}{(2d-a-c)^2}.$$

Und hiernach kann erstens der Abstand der Potenzpunkte P_1P_2 bezw. der Ordnungspunkte XY von M gefunden werden, nämlich $\overline{MX} = \overline{MY} =$

$$k = \pm \frac{\sqrt{d(d-a)(d-c)(d-a-c)}}{2d-a-c},$$

wobei unter der Wurzel der positive Ausdruck $\pm(d-a-c)$ zu setzen ist. Und zweitens erhält man zu einem beliebigen Punkt E_1 im Abstand ME_1 den zugehörigen

man C_1M als u bezeichnen, so würden gerade nur a und c vertauscht, also $u = \frac{d(d-a)}{2d-a-c}$, und wird $C_2M = v$ gesetzt, so entsteht $v = \frac{(d-a)(d-a-c)}{2d-a-c}$. Dagegen bliebe für das Produkt k^2 jedesmal der unveränderte Wert $\frac{\sqrt{d(d-a)(d-c)(d-a-c)}}{2d-a-c}$. Dabei ist dieser Ausdruck, wie nicht anders zu erwarten, in a und c symmetrisch gebaut, d. h. er ändert seinen Wert nicht, wenn man darin a mit c oder c mit a vertauscht. Es ist in der Tat ohne Einfluß anf die Untersuchung, ob man A_1A_2 als a und C_1C_2 als c, oder A_1A_2 als c und C_1C_2 als a bezeichnet. Aber noch mehr läßt sich aus den Buchstabenausdrücken entnehmen: Da d die größte aller Strecken ist, so ist $d-a$ und $d-c$ jedenfalls positiv, und ebenso deren Summe $2d-a-c$, welche im Nenner steht. Dagegen ist der vierte Faktor im Zähler $d-a-c$ nur für Figur 141 ein positiver, für Figur 140 aber negativ. In der Tat ist auch in Figur 140 als Ergebnis der Gleichung nicht $d-a-c$, sondern $a+c-d$ entstanden, indem nicht $x-a$, wie in Figur 141, sondern $a-x$ zu nehmen ist.

Erkl. 478. Umgekehrt aber ist in einem allgemeinen Falle gerade der Faktor $d-a-c$ im Ausdruck für k^2 in Figur 140 oder 141 der maßgebende dafür, ob die Involution eine hyperbolische oder elliptische ist. Wird nämlich $d-a-c$ positiv, so wird auch k^2 positiv, und k enthält einen reellen Wert $= MX = MY$ für die hyperbolische Involution. Ist aber $d-a-c$ negativ, so wird k^2 negativ, und k erhält einen imaginären Wurzelwert für die elliptische Involution. Es gibt also hier keinen reellen Abstand MX oder MY für Ordnungspunkte, vielmehr hat man nur Potenzpunkte P_1P_2, deren einer den positiven, deren anderer den negativen Abstand von M hat; beide Abstände sind aber gleichgroß, also gibt ihr Produkt ein Quadrat, aber mit negativen Vorzeichen. Dieses kann folglich nicht in das Produkt zweier gleichen Faktoren mit gleichem Vorzeichen zerlegt werden, sondern nur in das Produkt zweier gleichgroßen Faktoren aber mit ungleichen Vorzeichen. Damit ist ausgesprochen, daß im ersteren Falle zwei Punkte selbstentsprechend sind, indem die auch sonst nach gleicher Seite gemessenen Abstände

Punkt E_2 im Abstande $ME_2 = \frac{\pm k}{ME_1}$, nämlich mit +, wenn E_2 wegen hyperbolischer Involution auf der gleichen Seite von M liegt wie E_1, dagegen mit −, wenn E_2 wegen elliptischer Involution auf entgegengesetzter Seite von M liegt, wie E_1.

Im dritten Falle (Figur 142) werden die Strecken $MA_1 = x$, $MA_2 = x + a$ u. s. w. nach derjenigen Seite hinaus liegen müssen, auf welcher der kürzeste Abstand d liegt, also $MC_2 = x + d$ und $MC_1 = x + d + c$. So entsteht die Gleichung $x(x+a) = (x+d)(x+d+c)$. Hieraus $x^2 + ax = x^2 + x(c+2d) + d(c+d)$, und durch Wegfall von x^2 wird $x = \frac{d(c+d)}{a-c-2d} = \overline{MA_1}$. Damit ist der Abstand M von A_1 festgestellt. Das Produkt $\overline{MA_1} \cdot \overline{MA_2} = x(x+a)$ wird $k^2 = \frac{d(d+c)(a-d)(a-d-c)}{(a-c-2d)^2}$. Und hieraus ergibt sich wie oben der Abstand der Ordnuugspunkte XY von M als $MX = MY = k = \frac{\sqrt{d(d+c)(a-d)(a-d-c)}}{a-c-2d}$. Und ebenso erhält man zu einem beliebigen Punkte E_1 im Abstand ME_1 den zugehörigen Punkt E_2 im Abstande $ME_2 = \frac{k}{ME_1}$, wobei ME_2 mit ME_1 stets gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ zu nehmen ist.

der zugeordneten Punkte hier auch gleichgroß geworden sind; im zweiten Falle aber sind die auch sonst nach entgegengesetzten Seiten gemessenen Abstände der zugeordneten Punkte zwar gleichgroß geblieben, aber doch nach entgegengesetzten Seiten gemessen worden. Demnach ist ein negatives Produkt bezw. ein imaginärer Abstand der Ordnungspunkte das Kennzeichen der elliptischen Involution.

Erkl. 479. Die Erörterung der Vorzeichen der einzelnen Faktoren läßt sich auch im dritten Falle obiger Auflösung durchführen, welche nur eine zweite Erscheinungsweise der hyperbolischen Involution darstellt. Es würde

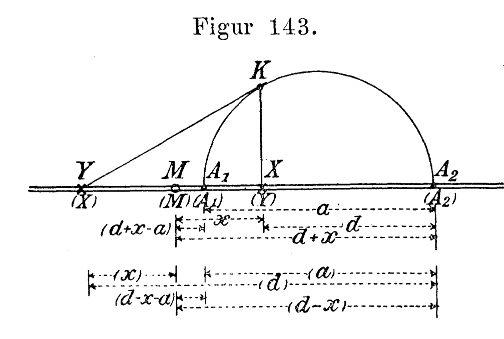
$$MA_2 = \frac{(a-d)\,(a-d-c)}{a-c-2d},\quad MC_2 = \frac{d\,(a-d)}{a-c-2d},\quad MC_1 = \frac{(d+c)\,(a-d-c)}{a-c-2d}.$$

Da hierin d die kleinste aller Strecken ist, und $a > c$, so wird sicher $a-d$ positiv und größer als $c-d$ bezw. $d-c$, folglich auch deren Summe bezw. Differenz $a-c-2d$ positiv, welche im Nenner steht. Und da $a-d = C_2A_2 = c + C_1A_2$ ist, so wird auch der letzte Faktor im Zähler $a-d-c$ sicher positiv. Durch beliebige Veränderlichkeit der drei Größen a, c und d gelangt man dann auch hier zu der allgemeinen Unterscheidung der elliptischen und hyperbolischen Involution wie oben.

Aufgabe 139. Zu einem beliebig gegebenen Punkte einer involutorischen Punktreihe den zugeordneten zu finden, wenn die Involution durch zwei Punktpaare bestimmt ist.

Aufgabe 140. Von einer hyperbolischen Punktinvolution seien gegeben ein Punktpaar und einer der Ordnungspunkte. Man soll weitere zugeordnete Punktpaare sowie die übrigen besonderen Punkte der Involution bestimmen.

Figur 143.



Erkl. 480. Die reingeometrische Behandlungsweise der vorliegenden Aufgabe kann zurückgeführt werden auf Figur 49. Da man aber dort nichts anderes entnimmt, als daß der Hilfsträger t_3 durch den gegebenen Ordnungspunkt zu legen ist, und dadurch die harmonische Beziehung zur Erscheinung kommt, so kann

Auflösung. 1) Nach der reingeometrischen Behandlungsweise findet man den zweiten Ordnungspunkt Y als vierten harmonischen zu $A_1 A_2$ und X; und jedes Punktpaar, welches die Strecke XY innen und außen harmonisch trennt, ist ein involutorisch zugeordnetes Punktpaar der Reihe. Zugleich ist der Mittelpunkt der Strecke XY der Mittelpunkt der involutorischen Reihe.

2) Nach der maßgeometrischen Behandlungsweise findet man den äußeren Punkt Y zum inneren X, indem man ähnlich Figur 142 im Halbkreis über $A_1 A_2$ die senkrechte Halbsehne in X und in deren Kreisschnittpunkt die Kreistangente zieht: sie trifft t in Y. Zum äußeren X aber findet man umgekehrt das innere Y, indem man zum gleichen Halbkreis über $A_1 A_2$ die Tangente aus X und die Berührungssehne im Berührungspunkt errichtet: sie trifft t in Y.

man sich auch mit dem Ergebnis begnügen und diese harmonische Beziehung unmittelbar durch Konstruktion erzeugen. — In den Konstruktionen der Figur 143 fallen die Figur 142 und die maßgeometrische Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zusammen. Denn die Berührungssehne XK als Polare erzeugt den äußeren Punkt Y als Pol, bezw. umgekehrt erzeugt der äußere Polpunkt (X) die Polare (YK), wie dies in der elementaren Behandlung der harmonischen Beziehung benützt wird. (S. Satz 23 des VI. Teiles der Planimetrie.)

Erkl. 481. In Figur 143 sind für die rechnende Durchführung beiderlei Annahmen dargestellt: für inneren Punkt X mit Buchstaben ohne Klammern, für äußeren Punkt (X) mit Buchstaben in Klammern. Eine Vereinfachung gegen die frühere Aufgabe tritt dadurch ein, daß sofort die Abstandsstrecke MX bezw. $M(X)$ als Unbekannte eintritt, so daß keine Umrechnung nötig fällt für den Potenzwert. Die Wahl der Vorzeichen hängt hier allein von der Wahl der Richtung ab, in welcher man den unbekannten Punkt M aufsuchen will. Denn elliptische Involution mit imaginärem Potenzwert kommt hier bei gegebenem Ordnungspunkte nicht vor.

Dann werden nach Figur 141 oder 142 die weiteren Punktpaare gefunden.

3) Nach der rechnenden Behandlungsweise setzt man den unbekannten Abstand von M nach X gleich x, $A_1 A_2 = a$ und den größeren der beiden Abstände von X zu einem der Punkte A als d, dann wird für inneres X die Gleichung $(d + x)(d + x - a) = x^2$, für äußeres X dagegen $(d - x)(d - x - a) = x^2$. Beidemale fällt x^2 weg, und es kommt bloß mit Unterschied des Vorzeichens $x = \frac{d(a - d)}{2d - a}$ oder $x = \frac{d(d - a)}{2d - a}$. Damit sind gefunden Y und M und $k^2 = \left[\frac{d(a - d)}{2d - a}\right]^2$, also auch zu jedem Punkt E_1 mit Abstand ME_1 der zugehörige Punkt E_2 im Abstand $\frac{k^2}{ME_1}$.

Aufgabe 141. Zu einem beliebig gegebenen Punkte den involutorisch zugeordneten zu konstruieren, wenn die Involution als hyperbolische durch ein Punktpaar und einen Ordnungspunkt gegeben ist.

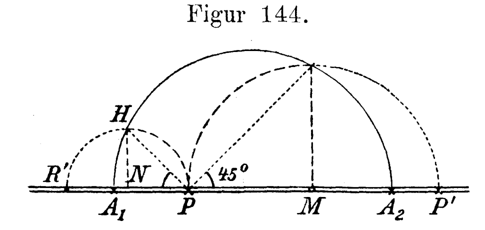
Aufgabe 142. Man soll die maßgeometrische und die rechnende Lösung der Aufgabe 140 durchführen, wenn eine elliptische Punktinvolution durch ein Punktpaar und einen Potenzpunkt bestimmt ist.

Erkl. 482. In Figur 144 und 145 sieht man, daß für die Punkte $A_1 A_2 P$ mit M und P' jeweils die Gleichung besteht $MA_1 \cdot MA_2 = \overline{MK}^2 = \overline{MP}^2 = \overline{MP'}^2 = MP \cdot MP'$, also hat man eine erste Involution mit Mittelpunkt M, Potenzpunkten PP' und Punktpaar $A_1 A_2$.

Auflösung. 1) Angenommen $A_1 A_2$ sei das gegebene Punktpaar und P der gegebene Potenzpunkt, welcher in Figur 144 als innerer, in Figur 145 als äußerer Punkt angenommen sei. Wenn dann M der gesuchte Mittelpunkt der Involution ist, so muß $MA_1 \cdot MA_2 = \overline{MP}^2$ sein. Nun ist aber im Halbkreis über $A_1 A_2$ auch $MA_1 \cdot MA_2 = \overline{MK}^2$, folglich $MP = MK$; das hierdurch gleichschenklig werdende Dreieck MPK hat aber bei P einen rechten Winkel, muß daher bei P einen solchen von 45^0 haben. Die Punkte

Ferner ist aber jedesmal auch $\overline{NA_1} \cdot \overline{NA_2} = \overline{NH}^2 = \overline{NP}^2 = \overline{NR'}^2 = \overline{NP} \cdot \overline{NR'}$, also hat man eine zweite Involution mit Mittelpunkt N, Potenzpunkten P und R' und Punktpaar $A_1 A_2$. Man erkennt sowohl aus Betrachtung der Figur, als auch aus der Gestalt des Wurzel-

Figur 144.



ausdruckes ganz deutlich, daß für Figur 144 der eine Mittelpunkt M rechts, der andere Mittelpunkt N links von P liegen muß. Denn sowohl $2d - a$, als auch $a - d$ ist hier ausnahmslos positiv, also der Wurzelinhalt größer als $(2d - a)^2$, die Wurzel größer als $(2d - a)$ und stets reell. Da vor der Wurzel ebenfalls $2d - a$ steht, so liefert das +Zeichen der Wurzel einen Punkt mit positivem Abstand, das —Zeichen der Wurzel einen Punkt mit negativem Abstand von P. — Für Figur 145 aber ist $a - d$ jedenfalls negativ, auch $(2d - a)^2$ sicher positiv, also der Wurzelinhalt kleiner als $(2d - a)^2$, der Wurzelwert kleiner als $(2d - a)$,

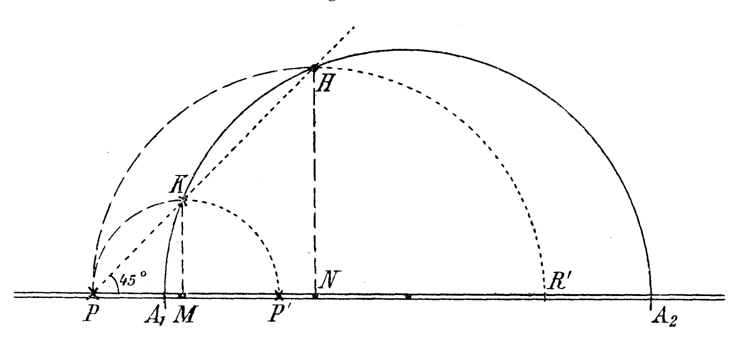
K bezw. H entstehen also als Schnittpunkte des Halbkreises über $A_1 A_2$ mit dem Schenkel eines im Punkte P angetragenen Winkels von 45°. Hiernach erhält man in Figur 144 stets zwei Lösungen, in Figur 145 zwei oder eine oder keine Lösung, je nachdem dieser Winkelschenkel den Halbkreis in zwei oder einem oder keinem Punkte trifft.

2) Bezeichnet man, wie in Aufgabe 140, den Abstand des Mittelpunktes vom gegebenen Potenzpunkte P mit x, den Abstand $A_1 A_2$ als a, und den größeren Abstand PA_2 als d, so wird für den gegebenen inneren Potenzpunkt P in Figur 144 und gerade ebenso für den gegebenen äußeren Potenzpunkt P in Figur 145 $MP = x$, $MA_2 = PA_2 - PM = d - x$, $MA_1 = A_1 A_2 - MA_2 = a - d + x$. Folglich nimmt die Produktengleichung folgende Gestalt an $MP^2 = MA_1 \cdot MA_2$ oder $x^2 = (d - x)(a - d + x)$. Hier fällt x^2 nicht weg, und es bleibt $2x^2 - x(2d - a) - d(a - d) = 0$, also $x =$

$$\frac{2d - a}{4} \pm \sqrt{\frac{(2d - a)^2 + 8d(a - d)}{16}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[2d - a \pm \sqrt{(2d - a)^2 + 8d(a - d)}\right]$$

Figur 145.



solange er nicht imaginär wird durch Vergrößerung des Subtrahenden $8d(a - d)$. Vor der Wurzel steht $2d - a$, also

Man erhält also zweierlei Punkte M, und dadurch auch zweierlei Involutionen mit demselben zu-



liefert sowohl das + als —Zeichen einen Punkt mit positivem Abstand von P, oder aber überhaupt keinen Punkt P, wenn die Wurzel imaginär wird.

Erkl. 483. Der Potenzpunkt hat für die reingeometrische Behandlungsweise keine Bedeutung, weil er durch keine Lagebeziehung charakterisiert ist, wie das Zusammenfallen zweier zugeordneten Punkte in einen Ordnungspunkt. Daher enthält die vorliegende Aufgabe nicht genügend viele Bestimmungsstücke, um die Konstruktion nach der reingeometrischen Weise elementar mit Lineal auszuführen. Auch die Auflösung der quadratischen Gleichung zeigt, daß die Aufgabe vom zweiten Grade ist. Geometrisch würden die Punkte M als Schnittpunkte des Trägers t mit einer Kurve zweiten Grades erscheinen müssen. Man kann also dieser Auflösung entnehmen, daß zu einem gegebenen Punktpaar stets zweierlei Involutionen möglich sind, welche einen gegebenen innerhalb liegenden Punkt zum Potenzpunkt haben, dagegen zweierlei oder einerlei oder keinerlei Involutionen, welche einen gegebenen äußeren Punkt zum Potenzpunkt haben, je nachdem die Gerade PKH in Figur 145 den Halbkreis über $A_1 A_2$ schneidet, berührt oder garnicht trifft. Die Konstruktion weiterer Punktpaare geschieht bei der vorliegenden elliptischen Punktinvolution am bequemsten maßgeometrisch nach Figur 140.

geordneten Punktpaar $A_1 A_2$, nämlich mit einem gleichen und einem ungleichen Potenzpunkt P und P′ bezw. P und R′, und mit verschiedenen Mittelpunkten M oder N und verschiedenen Potenzwerten $x_1{}^2$ bezw. $x_2{}^2$.

Aufgabe 143. Man soll von einer Punktinvolution weitere Punktpaare sowie die besonderen Punkte konstruieren, wenn dieselbe bestimmt ist durch den Mittelpunkt und ein zugeordnetes Punktpaar.

Erkl. 484. Der Mittelpunkt M hat in der maßgeometrischen Behandlungsweise die wesentliche Bedeutung durch die gleichen Abstände nach beiden Seiten. Käme dazu keine lage-geometrische Bedeutung, so würde die Aufgabe der vorigen ähnlich werden. So aber kommt dem Mittelpunkt die wichtige Eigenschaft zu, daß er der zugeordnete zum unendlich fernen ist, oder in anderer Ausdrucksweise, daß in ihm die Gegenpunkte oder Fluchtpunkte der auf dem gemeinsamen Träger aufgelegten projektivischen Punktreihen zusammengefallen sind, und dadurch hat man eine so ausreichende lage-geometrische Eigenschaft desselben, daß die Konstruktion auch mit den elementaren Hilfsmitteln der projektivischen Geometrie möglich wird.

Erkl. 485. Mit der vorliegenden Aufgabe kann die Anzahl der Konstruktionen

Auflösung. 1) Nach der reingeometrischen Behandlungsweise bezeichnet man die gegebenen beiden Punkte als $A_1 = B_2$ und $A_2 = B_1$, den Mittelpunkt der Reihe aber als zugeordneten Punkt zum unendlich fernen $_\infty F_1 = {}_\infty G_2$ als $F_2 = G_1$. Dann besitzt man von den projektivischen Punktreihen t_1 und t_2 je vier zugehörige Punkte $A_1 B_1 F_1 G_1$ und $A_2 B_2 F_2 G_2$, also geht die Konstruktion genau ebenso vor sich wie in Auflösung der Aufgabe 138.

2) In der maßgeometrischen Behandlung liefert der bei elliptischer Involution innerhalb $A_1 A_2$ liegende Punkt M durch seine senkrechte Halbsehne MK im Halbkreis über $A_1 A_2$ die Potenzstrecke $MP = MP' = MK = \sqrt{MA_1 \cdot MA_2}$. Der bei hyperbolischer Involution außerhalb $A_1 A_2$ liegende Punkt M liefert durch seine Tangente MK an den Halbkreis über $A_1 A_2$ die Potenzstrecke $MX = MY = \sqrt{MA_1 \cdot MA_2}$. Die weitere

involutorischer Punktreihen als abgeschlossen betrachtet werden. Vergleicht man die Aufzählung in Erklärung 214, so hat man

I. 1. M und k^2 } in II enthalten (144)
2. M und X bezw. M und P
3. X und Y bezw. P und P'

II. 1. A A' und M in Aufgabe 143 und 144.
2. A A' u. X bezw. A A' u. P } in Aufg. 140 bis 142.
3. A A' u. Y bezw. A A' u P'

III. A A' und B B' in Aufgabe 138, 139.

Konstruktion erfolgt wie in Aufgabe 138.

3) Für die **Rechnung** ist durch M und $A_1 A_2$ sofort das Produkt $MA_1 \cdot MA_2$ bestimmt, also auch der Wert der Potenz $\pm k^2$, so daß man beliebige weitere Punkte findet nach dem Gesetz $ME_2 = \frac{k^2}{ME_1}$.

Eine wertvolle Vereinfachung der reingeometrischen Konstruktionen ergibt der folgende Abschnitt über die involutorischen Beziehungen am vollständigen Viereck und Vierseit.

Aufgabe 144. Zu einem beliebig gegebenen Punkte den involutorisch zugeordneten zu konstruieren, wenn die Punkt-Involution bestimmt ist a) durch ihren Mittelpunkt und ein Punktpaar, b) durch ihren Mittelpunkt und einen Ordnungspunkt bezw. Potenzpunkt, c) durch beide Ordnungspunkte bezw. Potenzpunkte.

Aufgabe 145. Von einer elliptischen oder hyperbolischen Strahleninvolution seien gegeben irgend zwei zugeordnete Strahlenpaare. Man soll beliebige weitere zugeordneten Strahlenpaare sowie die besonderen Strahlen der Involution konstruieren.

Erkl. 486. Als besondere Punkte der Punktinvolution waren zu bezeichnen der Mittelpunkt M, zugleich zugeordnet zum unendlichfernen, sowie die Ordnungspunkte X, Y bezw. Potenzpunkte P, Q. Als besondere Strahlen der Strahleninvolution sind zu bezeichnen das Paar der Normalstrahlen oder die Axenstrahlen u, v, sowie die Ordnungsstrahlen x, y bezw. Potenzstrahlen p, q. Während aber der Mittelpunkt einer Punktinvolution neben seiner metrischen Symmetrie-Eigenschaft auch die projektivische Beziehung zum unendlich fernen Punkte hat, besteht für die Axenstrahlen u v keine solche rein geometrische Merkwürdigkeit, weil im Strahlenbüschel kein Strahl die Auszeichnung besitzt wie der

Auflösung. 1) Man kann verfahren nach der rein geometrischen Behandlungsweise dualistisch zu Figur 47 und 48 Seite 100. Man bezeichnet die beiden gegebenen Strahlenpaare als Strahlen $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$ bezw. $a_2\, b_2\, c_2\, d_2$, zweier Büschel $S_1\, S_2$ mit gemeinsamem Scheitel, schneidet die Strahlen von S_1 durch einen beliebigen Träger t, und projiziert diese Schnittpunkte aus einem beliebig auf d_1 gewählten Scheitel S_3 auf den Träger $t_0 = b_2$, projiziert die Punkte aus dem in den Schnittpunkt $C_1 = (t_1 c_1)$ auf c_1 verlegten Scheitel S_4 auf $t_2 = b_3$, und die auf letzterem Träger erhaltenen Punkte wieder aus dem ursprünglichen Scheitel S_{12}. Nach der Zeichenvorschrift $S_1 \overline{\wedge}\, t_1 \overline{\wedge}\, S_3 \overline{\wedge}\, t_0 \overline{\wedge}\, S_4 \overline{\wedge}\, t_2 \overline{\wedge}\, S_2$ erhält man so zu jedem beliebigen Strahl von S_1 den zugehörigen von S_2, also zwei zugeordnete Strahlen der Involution. — Dagegen ist die Aufsuchung der besonderen Strahlen nicht ohne Zuhilfenahme maßgeometrischer Beziehungen durchführbar.

unendlich ferne Punkt der Punktreihe, und so erscheinen dieselben nur durch metrische Auffassung ausgezeichnet. Daher sind bei der Strahleninvolution die Ordnungsstrahlen xy die einzigen besonderen Strahlen, welche durch rein geometrische Eigenschaften sich von den übrigen Strahlen auszeichnen.

Erkl. 487. Der zweite Teil nebenstehender Auflösung ist keine vollständig durchgeführte Lösung. Es soll damit nur gezeigt werden, daß die Aufstellung einer Gleichung mit einziger Unbekannter ξ möglich ist. Mit dieser Aufstellung einer Gleichung ist dem Grundsatze der algebraischen Methoden genügt, auch wenn die Lösung dieser Gleichung nicht selber durchgeführt wird. Es gilt in vielen Problemen der höheren Mathematik als befriedigender Abschluß der Untersuchung, wenn nur gezeigt werden kann, daß es überhaupt möglich ist, die Aufgabe auf die Formulierung einer Gleichung hinauszuführen. Diese Formulierung ist in nebenstehender Auflösung erfolgt in genau analoger Weise, wie in der zweiten Lösung der Aufgabe 138. Es ist daher auch keine weitere Ausführung erforderlich, wie sich die Gestalt der Gleichung ändern möchte je nach der verschiedenen Lage der Elemente analog den Figuren 140, 141 oder 142.

Erkl. 488. Aufgaben der analogen Art, wie Aufgabe 139 lassen sich zu jeder der folgenden Aufgaben selbstverständlich ebensowohl aufstellen. Ihre Lösung erfolgt am einfachsten in derselben Weise wie dort, indem man stets nach der dritten Art nebenstehender Auflösung verfährt.

2) Wollte man nach der rechnenden Behandlungsweise verfahren, so würde man zur Bestimmung der Axenstrahlen die Gleichung des konstanten Tangentenproduktes ansetzen. Bezeichnet man nämlich $\sphericalangle(ua)$ als ξ, $\sphericalangle(a_1 a_2)$ als α, $(c_1 c_2)$ als γ, $(a_1 c_2)$ als δ, so wäre $\sphericalangle(uc_2) = \delta - \xi$, $\sphericalangle(ua_2) = \alpha - \xi$, $(uc_1) = \gamma - (\delta - \xi)$, also käme die Gleichung $\operatorname{tg} \xi \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \xi) = \operatorname{tg}(\delta - \xi) \operatorname{tg}(\gamma - \delta + \xi)$. Hieraus wäre ξ zu bestimmen, dann der Potenzwert $\operatorname{tg} \xi \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \xi) = \text{const.} = \operatorname{tg}^2(ux)$ bezw. $= \operatorname{tg}^2(up)$ zu bilden, und hiernach die Lage der Axenstrahlen u, u' sowie der Ordnungsstrahlen x, y bezw. der Potenzstrahlen $p_1 p_2$ festzustellen. Ebenso käme für jeden beliebigen Strahl e_1 der Winkel (ue_2) des zugeordneten Strahles aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}(ue_2) = \frac{\operatorname{tg}^2(ux)}{\operatorname{tg}(ue_1)} \text{ bezw.} = \frac{\operatorname{tg}^2(up)}{\operatorname{tg}(ue_1)}.$$

3) Weit einfacher aber als beide vorgenannten Auflösungen ist die Verwendung der einfachen Projektion. Man schneidet die vier gegebenen Strahlen des involutorischen Büschels durch einen Träger t, erhält auf demselben zwei zugeordnete Punktpaare einer involutorischen Punktreihe und konstruiert nach der ersten oder zweiten oder dritten Auflösung der Aufgabe 138 die verlangten Elemente dieser Punktinvolution. Die projizierenden Strahlen dieser gefundenen Punkte sind dann die verlangten Strahlen der Strahleninvolution. — Man vergl. hierzu auch die Bemerkung in der dritten Lösung der Aufgabe 147.

Aufgabe 146. Von einer Strahleninvolution seien gegeben ein Strahlenpaar und der eine Ordnungsstrahl bezw. Potenzstrahl. Man soll weitere zugeordnete Strahlenpaare bestimmen.

Auflösung. 1) Die Auflösung dieser Aufgabe für die hyperbolische Strahleninvolution mit gegebenem Ordnungsstrahl x ist auf rein geometrische Weise

Erkl. 489. Bei der entsprechenden Aufgabe der Punktinvolution war die Trennung in zwei aufeinderfolgende Aufgaben gemacht worden (Aufgabe 140 und 142), weil sowohl die maßgeometrische als die rechnende Behandlungsweise wesentliche Unterschiede aufzuweisen hatten. Diese Unterscheidung ist hier nicht mehr erforderlich, denn die reingeometrische Lösung ist ebenso wie die maßgeometrische oder die durch Projektion vermittelte Auflösung nur bei der hyperbolischen Strahleninvolution durchführbar. Der besonders einfachen Beziehung jener maßgeometrischen Figur mit dem rechtwinklig gleichschenkligem Dreieck steht hier keine analoge gegenüber, und die Unterscheidung der beiderlei Aufgaben nach zwei, bezw. 2, 1, 0 Lösungen in der rechnenden Behandlung jener Aufgabe fällt hier ebenfalls fort, also bleibt eigentlich nur die Aufgabe für die hyperbolische Involution als lösbar übrig (und zwar besonders einfach nach Lösung 3 der folgenden Aufgabe). Für die anderen sind nicht genügend ausreichende Elemente vorhanden, um die Aufgabe elementar vollständig durchzuführen.

möglich, indem der zweite Ordnungsstrahl y als vierter harmonischer Strahl entsteht zu a_1 a_2 und x; und jedes Strahlenpaar, welches die Strahlen xy innen und außen harmonisch trennt, ist ein involutorisch zugeordnetes Strahlenpaar des Büschels. Zugleich sind die Axenstrahlen uv die Winkelhalbierenden des Winkels der Strahlen x und y.

2) Nach der rechnenden Behandlungsweise hätte man wieder eine Gleichung anzusetzen von der Gestalt $\text{tg}^2 \xi = \text{tg}(\delta + \xi)\, \text{tg}(\delta + \xi - \alpha)$ für die hyperbolische, bezw. $\text{tg}^2 \xi = \text{tg}(\delta - \xi)\, \text{tg}(\alpha - \delta + \xi)$ für die elliptische Involution. Dadurch wäre der Winkel $\xi = (ux)$ bezw. $\xi = (up)$ bestimmt, sowie der Potenzwert der Strahleninvolution.

3) Das Verfahren der Projektion führt hier nur bei hyperbolischer Involution zum Ziele, da nur Ordnungsstrahlen als Elemente analoger Eigenschaft projiziert werden. Potenzstrahlen aber und Axenstrahlen schneiden aus beliebigem Träger auch nur beliebige Punktpaare der Punktinvolution aus, nicht die gleichwertigen besonderen Punkte dieser Involution.

Aufgabe 147. Man soll von einer Strahleninvolution weitere Strahlenpaare konstruieren, wenn dieselbe bestimmt ist durch die Axenstrahlen und ein zugeordnetes Strahlenpaar.

Erkl. 490. Im Vergleich der Erklärungen 214 und 485 ergeben sich aus der vorigen Aufzählung in Erklärung 486 die folgenden Bestimmungsfälle für die Strahleninvolution:

I. 1. uu' und $\text{tg}^2(ux) = k^2$ bezw. uu' u. $\text{tg}^2(up) = k^2$ in II enthalt. (148)
2. uu' und x bezw. uu' und p . . . .
3. x und y bezw. p und p'

Auflösung. 1) Für die sämtlichen geometrischen Behandlungsweisen, nämlich die rein projektivische, die planimetrische und die mit Projektion auf beliebigen Träger arbeitende, bildet das Paar der Axenstrahlen ein zugeordnetes Strahlenpaar wie jedes andere auch, sodaß man eine einfache Wiederholung der Aufgaben 145 bezw. 138 hat, und zwar ohne die Besonderheit der zweiten Lösung zu Aufgabe 145.

2) Für die rechnende Behandlungsweise aber ist der Fall besonders einfach gelegen, denn tg (ua) tg (ua') = const. ist das konstante Produkt $= \text{tg}^2(ux)$ bezw. $\text{tg}^2(up)$,

II. 1. aa′ und uu′ . . . . in Aufg. 147
2. aa′ und x bezw. aa′ und p . . . . } in Aufgabe 146
3. aa′ und y bezw. aa′ und p′ . . . . } in Aufgabe 146
III. aa′ und bb′ . . . . . . in Aufg. 145.

Erkl. 490 a. Die reingeometrische Konstruktion der weiteren Elemente wird auch für die Strahleninvolution eine besondere Vereinfachung erfahren durch die Beziehung zum vollständigen Vierseit. Die nebenstehende dritte Lösungsart liefert eine Erleichterung nur für die auf dem Träger enstehende Punktinvolution. Dort findet man leichter MXYPP′, damit ist aber für die Strahleninvolution bloß für xy etwas gewonnen, denn MPP′ der Punktreihen stehen in keiner Beziehung zu uu′ pp′ der Strahleninvolution.

sodaß alle weiteren Winkel aus diesem Potenzwerte leicht gefunden werden können.

3) Die Lösung dieser und der beiden vorhergehenden Aufgaben durch Projektion der Strahleninvolution auf einen Träger kann noch besonders vereinfacht werden, wenn man den Träger nicht in beliebiger Lage erscheinen läßt, sondern besonders auswählt, nämlich parallel zum einen Strahl des einen der gegebenen Strahlenpaare. Dadurch wird der Schnittpunkt mit dem zugeordneten Strahle der Mittelpunkt der zu projizierenden Punktinvolution auf t, erlaubt also die wesentliche Vereinfachung, welche durch jenes gegebene Element für die Punktinvolution herbeigeführt wird.

Aufgabe 148. Zu einem beliebig gegebenen Strahle den involutorisch zugeordneten zu konstruieren, wenn die Strahleninvolution bestimmt ist a) durch die Axenstrahlen uu′ und ein Strahlenpaar, b) durch die Axenstrahlen und einen Ordnungsstrahl bezw. Potenzstrahl, c) durch beide Ordnungsstrahlen bezw. Potenzstrahlen.

Aufgabe 149. Von einer beliebig gegebenen Strahleninvolution sollen die Axenstrahlen konstruiert werden.

Erkl. 491. Die Ausführung der vorliegenden Aufgabe hat für die vorhergehenden Aufgaben keine wesentliche Bedeutung, da die Lage der Axenstrahlen nur für die rechnende Behandlungsweise von Wichtigkeit ist, sonst aber keinerlei Vorzüge mit sich bringt. Dagegen ist es für spätere Anwendungen wichtig, daß die Axenstrahlen, denen besondere metrische Eigenschaften zustehen, auf so einfache Weise aus dem Büschel herausgefunden werden können. Die Konstruktion gilt für alle Arten der gegenseitigen Lage der zugeordneten Strahlenpaare. Die getrennt liegenden Strahlen erzeugen jedenfalls auch getrennt liegende

Auflösung. 1) Angenommen das Paar der Axenstrahlen uu′ wäre gefunden, dann schneidet es auf irgend einem Träger t ebenfalls zwei involutorisch zugeordnete Punkte UU′ aus, wie jedes andere Strahlenpaar des involutorischen Büschels S. Nimmt man also den Kreis durch den Scheitel S und die Punkte eines beliebigen Paares AA′ zu Hilfe sowie den zweiten Kreis durch denselben Scheitel S und die Punkte eines zweiten Paares CC′, so muß auch das neue Punktpaar UU′ ausgeschnitten werden durch einen Kreis, welcher durch UU′ und S und denselben Schnittpunkt K der zwei vorgenannten Kreise hindurchgeht. Dieser neue Kreis enthält aber über UU′ einen rechten Winkel, ist also

Punkte (Figur 140); ungetrennt liegende Strahlen erzeugen ungetrennt liegende Punktpaare (Figur 141 oder 142). Die beiden letzteren sind aber keineswegs so verschieden wie bei den Punktreihen, denn dieselben Strahlenpaare können je nach Lage des gewählten Trägers t die ineinander oder auseinander liegenden Punktpaare ausschneiden. Und bei der Konstruktion nach der 2. Art nebenstehender Auflösung fällt der eben erwähnte Unterschied überhaupt weg.

Erkl. 492. Die nebenstehenden Auflösungen behandeln die Aufgabe vom allgemeinen Standpunkte, daß die Involution durch zwei Strahlenpaare gegeben sei. Wären beide Ordnungsstrahlen gegeben, so würden u und u' eben Winkelhalbierungsgerade. Ist unter den Bestimmungsstücken ein Ordnungstrahl, so wäre dessen Schnittpunkt mit dem Träger Ordnungspunkt, und der Kreis müßte den Träger in diesem Punkte berühren. Würden beide Hilfskreise einander in S berühren, so wäre SK die Tangente der Kreise in S. — In allen diesen Fällen beachte man auch, daß die beiden gefundenen Axenstrahlen sich unter die übrigen zugeordneten Strahlenpaare einordnen wie vorgeschrieben, nämlich getrennt oder ungetrennt mit den übrigen Strahlenpaaren, ebenso wie diese miteinander.

Halbkreis über UU', sein Mittelpunkt muß der Punkt auf dem Träger t sein, welcher von der Axe des Kreisbüschels SK oder von der Mittelsenkrechten von SK ausgeschnitten wird.

2) Auch bei dieser Aufgabe kann die Lösung besonders vereinfacht werden, wenn als Träger schon eine Parallele zu einem Strahle eines der gegebenen Strahlenpaare a a' gewählt wird. Denn dann ist der zugeordnete Strahl von S selber schon einer der zu verwendenden Kreise und enthält zugleich die gemeinsame Sehne SK aller Büschelkreise, der Schnittpunkt ihrer Mittelsenkrechten mit t ist also Mittelpunkt des gesuchten Halbkreises.

Aufgabe 150. Auf demselben Träger t mögen zwei involutorische Punktreihen liegen. Man soll untersuchen, ob ein Punktpaar des Trägers t gleichzeitig für beide Involutionen involutorisch zugeordnet sein kann.

Auflösung. Da die Punktpaare einer involutorischen Punktreihe durch einen Kreisbüschel ausgeschnitten werden, so muß das etwa vorhandene gemeinsame Punktpaar durch einen Kreis ausgeschnitten

Figur 146.

Erkl. 493. In nebenstehender Auflösung ist angenommen, daß die beiden Involutionen durch je zwei zugeordnete Punktpaare gegeben sind. Tritt an die Stelle eines Punktpaares der Mittelpunkt der einen oder beider Reihen, so ist als zugehöriger Kreis der Strahl von ihm durch S zu betrachten: er enthält auch die Berührungssehne SK, denn diese muß auf dem Träger den Mittelpunkt der Reihe ausschneiden. Tritt an die Stelle eines Punktpaares der eine Ordnungspunkt der einen oder beider Reihen, so ist als zugehöriger Kreis derjenige Kreis durch S zu betrachten, welcher den Träger im Ordnungspunkte berührt. Ein Vergleich mit Figur 52 II zeigt, daß in diesem Falle die Punkte S und K stets auf derselben Seite von t liegen müssen.

Erkl. 494. Die letzte Bemerkung läßt erkennen, wann die drei nebenstehend genannten Fälle eintreten: Sind beide Involutionen oder ist wenigstens eine von ihnen eine elliptische, so geht t nach Figur 52 I zwischen S und K bezw. S und H beidemale oder wenigstens einmal hindurch, der Kreis SKH muß Punkte beiderseits t haben, er trifft also t sicher zweimal. Sind beide Involutionen hyperbolisch, so liegen S, K und H alle drei auf derselben Seite von t, und nur in diesem Falle kann die Berührung mit t überhaupt vorkommen. Dieser Berührungspunkt wäre jedenfalls ein gemeinsamer Ordnungspunkt beider Reihen. Schneidet in diesem Fall der Kreis den Träger t, so müßte zwischen beiden Schnittpunkten noch von jeder Reihe ein Ordnungspunkt liegen, und zwar so, daß die Paare der Ordnungspunkte beider Reihen einander nicht trennen. Bilden die Ordnungspunkte ein getrenntes Punktpaar, so kann der Kreis den Träger nicht treffen. Man kann also den Satz aussprechen: Zwei Involutionen auf demselben Träger besitzen stets ein gemeinsames Elementenpaar, außer wenn sie in der Weise beide hyperbolisch sind, daß ihre Ordnungselemente zwei getrennte Elementenpaare bilden.

werden, welcher beiden Kreisbüscheln zugleich angehört. — Man wählt also einen beliebigen Punkt S als einen gemeinsamen Stützpunkt der beiden Kreisbüschel, und legt durch S und die Punktpaare der ersten Punktinvolution die Kreise des Büschels, dann gehen diese alle noch durch einen zweiten Punkt H, und jeder Kreis durch S und H schneidet t in zwei zugeordneten Punkten der ersten Involution. Legt man ferner Kreise durch S und die Punktpaare der zweiten Punktinvolution, so gehen diese alle noch durch einen zweiten Punkt K, und jeder Kreis durch S und K trifft t in zwei zugeordneten Punkten der zweiten Involution. Man legt nun den Kreis durch die drei Punkte S, H, K. Wo dieser den Träger t trifft, müssen zwei zugeordnete Punkte sowohl der ersten als der zweiten Involution sein. Und je nachdem dieser Kreis den Träger beider Reihen in zwei Punkten oder in einem Punkte oder in keinem Punkte trifft, haben die beiden Involutionen ein gemeinsames Punktpaar, oder einen gemeinsamen Ordnungspunkt, oder kein gemeinsames Punktpaar.

Aufgabe 151. Man soll untersuchen, ob zwei Strahleninvolutionen mit gemeinsamem Scheitel ein gemeinsames Strahlenpaar besitzen.

Aufgabe 152. Die Aufgabe 150 für den Fall zu lösen, daß beide Punktinvolutionen durch ihre Ordnungsstrahlen gegeben sind.

Auflösung. Man kann die Auflösung der Aufgabe 150 in der Weise wiederholen, daß man durch



Erkl. 495. Da die Involutionen Ordnungselemente besitzen, sind sie jedenfalls beide hyperbolisch. Und aus der Lage der Punkte SKH zu t erkennt man die Unterscheidung des in Erkl. 494 ausgesprochenen Satzes. Sowie die beiden Involutionen einen gemeinsamen Ordnungspunkt besitzen, wird der Kreis SHK zum gemeinsamen Berührungskreis des Trägers t in diesem Punkte. Rücken diese Kreise vom gemeinsamen Berührungspunkt nach der einen oder andern Seite auseinander, so muß der Kreis SKH sich vergrößern oder verkleinern, also den Träger schneiden oder gar nicht treffen.

beliebigen Scheitel S die Berührungskreise konstruiert, welche t in den gegebenen Ordnungspunkten berühren. Sie liefern die Punkte für den Kreis SKH. Man kennt aber auch die Mittelpunkte beider Reihen und weiß also, daß die gemeinsamen Sehnen der Kreisbüschel auf den Strahlen von S durch diese Mittelpunkte liegen müssen.

Aufgabe 153. Das gemeinsame Strahlenpaar zweier durch ihre Ordnungsstrahlen bestimmten Strahleninvolutionen mit gemeinsamem Scheitel zu konstruieren.

Aufgabe 154. Zu zwei gegebenen Strecken derselben Geraden eine dritte Strecke zu suchen, deren Endpunkte beide gegebenen Strecken innen und außen harmonisch teilen.

Erkl. 496. Aus Erkl. 494 erkennt man, daß die vorliegende Aufgabe nur lösbar ist, wenn die beiden gegebenen Strecken einander selber nicht trennen, also wenn entweder die eine ganz innerhalb der andern oder die eine ganz außerhalb der anderen liegt. Zum gleichen Ergebnis führt die andere Überlegung, daß nicht nur die neugefundene Strecke beide gegebenen harmonisch teilt, sondern ebenso auch jede der gegebenen die neue. Man kann also die gegebenen Streckenpunkte auffassen als Punktpaare einer involutorischen Punktreihe, welche die Punkte der gefundenen Strecke zu Doppelpunkten hat. Nun können aber Doppelpunkte nur auftreten, wenn die Involution hyperbolisch ist, also kann auch diese gesuchte Strecke nicht bestehen, wenn die gegebenen Strecken einander trennen.

Auflösung. Die Strecke der Ordnungspunkte einer involutorischen Punktreihe wird durch die Strecke jedes zugehörigen Punktpaares harmonisch geteilt. Man führt also die Aufgabe auf die vorhergehende Aufgabe 152 zurück, indem man die Endpunkte der beiden gegebenen Strecken je als Ordnungspunkte einer involutorischen Punktreihe ansieht und das gemeinsame Punktpaar dieser beiden Punktreihen aufsucht.

Aufgabe 155. Zu zwei gegebenen Winkeln am gleichen Scheitel soll ein dritter Winkel gesucht werden, dessen Schenkel die beiden gegebenen Winkel innen und außen harmonisch teilen.

---

9. Aufgaben über die involutorischen Beziehungen am vollständigen Viereck und Vierseit.

(Zu Abschnitt 3 c.)

Aufgabe 156. Es soll auf einfachste Weise vollständig hergestellt werden eine hyperbolisch-involutorische Punktreihe a) mit zwei gegebenen Ordnungspunkten bezw. b) mit einem gegebenen Ordnungspunkt und Mittelpunkt.

Erkl. 497. Wenn der eine Ordnungspunkt nebst Mittelpunkt gegeben ist, so findet man den zweiten Ordnungspunkt durch einfaches Abtragen der Abstände und konstruiert wie nebenstehend.

Auflösung. Man konstruiert nach Figur 63 beliebig viele Vierecke mit Gegenecken in den gegebenen Ordnungspunkten und erzeugt die Reihe durch die Gesamtheit der harmonischen Punktpaare zu den beiden Ordnungspunkten.

Aufgabe 157. Es soll auf lineare Weise vollständig hergestellt werden ein hyperbolisch - involutorischer Strahlenbüschel a) mit zwei gegebenen Ordnungsstrahlen b) mit einem gegebenen Ordnungsstrahl und einem Axenstrahl.

Erkl. 498. Ist ein Ordnungsstrahl und ein Axenstrahl gegeben, so findet man den zweiten Ordnungspunkt durch Abtragen des Winkels zwischen Axenstrahl und Ordnungsstrahl. Die Winkelbeziehungen werden besonders übersichtlich, wenn der Scheitel auf der Mittelsenkrechten von EF in Figur 63, also senkrecht über dem Mittelpunkt H_4K_{12} der Punktinvolution gewählt wird.

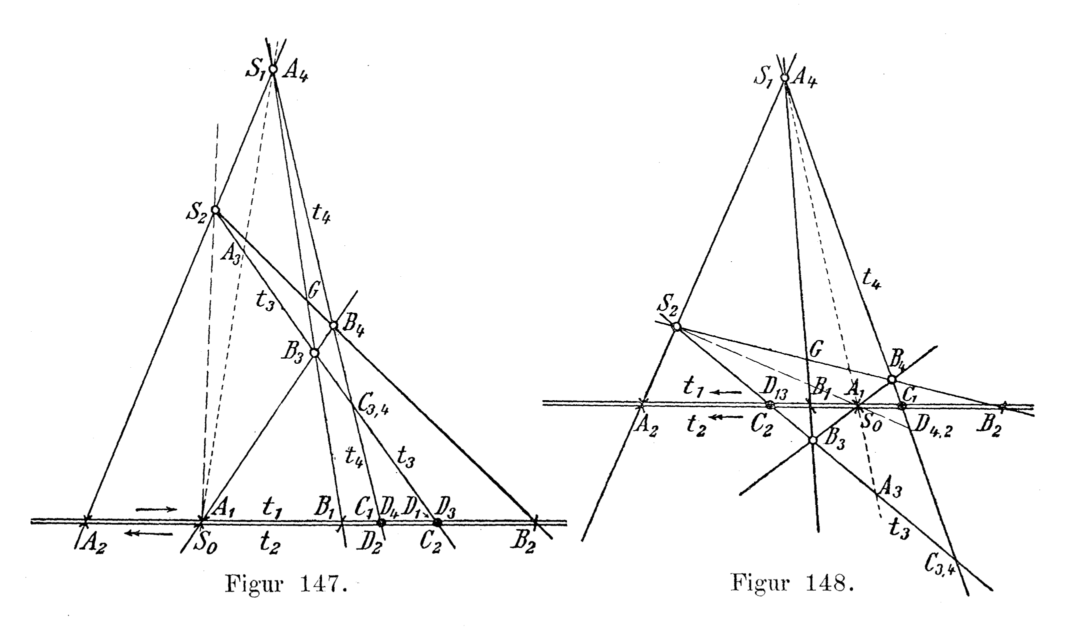
Auflösung. Man konstruiert entweder dualistisch zu Figur 63 und Auflösung der Aufgabe 156, oder man projiziert die gegebenen Elemente auf einen beliebigen Träger, führt auf diesem wirklich die Aufgabe 156 durch und erhält die verlangten Elemente, indem man die erzeugten Punkte des Trägers rückwärts aus dem Scheitel projiziert.

Aufgabe 158. Mittels Lineal allein soll zu einem beliebigen Punkt einer Punktreihe der involutorisch zugeordnete konstruiert werden, wenn die Involution durch zwei Punktpaare bestimmt ist.

Erkl. 499. Die nebenstehende Auflösung hat den mehrfachen großen Vorzug vor den Konstruktionen des vorigen Kapitels, daß man dazu keinerlei Maßbeziehungen braucht, daß alle Zeichnung bloß mit dem Lineal und zwar mit einer sehr geringen Zahl von Geraden und

Auflösung. 1) Man betrachtet die beiden gegebenen Punktpaare als die Schnittpunkte des Trägers t mit zwei Gegenseitenpaaren eines vollständigen Vierecks, den einzeln gegebenen fünften als Schnittpunkt einer fünften Seite, und erhält den gesuchten zugeordneten Punkt als Schnittpunkt der sechsten Seite des vollständigen Vierecks mit dem Träger t. — Sind also in Figur 147 von einer hyperbolischen und in Figur 148 von einer elliptischen

Punkten geleistet werden kann, und daß man garnicht nötig hat, sich vor Beginn der Zeichnung davon zu überzeugen, ob man elliptische oder hyperbolische Involution zu behandeln hat. Es genügt die einfache Zeichenvorschrift: erstes Paar Gegenseiten, einzelne Transversale, zweites Paar Gegenseiten, sechste Seite als Gegenseite der Transversale. — Dabei erhalten die Eckpunkte des vollständigen Vierecks ganz von selbst bei elliptischer bezw. hyperbolischer Involution die Lage zum Träger, welche als elliptische bezw. hyperbolische Lage bezeichnet wird, man braucht in keinerlei Weise etwa für deren Zutreffen Sorge zu tragen.



Figur 147. Figur 148.

Erkl. 500. Für die Konstruktion des involutorisch zugeordneten Punktes durch das vollständige Viereck besteht mehrfache Auswahl für die Stücke. Zunächst sind die beiden Geraden des ersten Gegenseitenpaares und die Tranversale völlig willkürlich, und schließlich können auch noch die beiden Geraden des zweiten Gegenseitenpaares auf zwei Arten gewählt werden, nämlich (Figur 147 und 148) als B_1A_4 und B_2B_4 oder auch als B_1B_4 und B_2A_4. Jedesmal liefert die sechste Punktinvolution die Punktpaare A_1A_2 und B_1B_2 gegeben, und zu C_1 der zugeordnete Punkt C_2 gesucht, so zieht man erst ganz beliebig die ersten zwei Gegenseiten etwa durch A_1 und A_2 und schneidet sie durch eine beliebige dritte Gerade des gegebenen Einzelpunktes C_1. Durch die so entstehenden Schnittpunkte, welche in Figur 147 und 148 als A_4 und B_4 bezeichnet sind, werden bestimmt die beiden durch B_1B_2 gehenden Gegenseiten B_1A_4 und B_2B_4, und diese liefern wieder als Punkte auf dem ersten Paar Gegenseiten die zwei Schnittpunkte S_2 und B_3 für die Gegenseite der durch C_1 gelegten Geraden. Die Verbindungsgerade dieser zwei Punkte scheidet also auf t den zu C_1 involutorisch zugeordneten Punkt C_2 aus.

2) Wollte man die erste Konstruktion der untenfolgenden Aufgabe 161 als bekannt voraus setzen, so könnten auch die gegebenen Punkte von t aus beliebigem Schnittpunkte S projiziert werden, in dem entstehenden Büschel der sechste Strahl konstruiert und durch ihn

Seite des Vierecks denselben involutorisch zugeordneten Punkt C_2 auf t. — Man beachte, daß diese Konstruktion sich auf ganz analoge Weise vollzieht, wie früher die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen in Aufgabe 13 des II. Teiles. Auch die verschiedenen Abänderungen der Konstruktion könnten in ähnlicher Weise als neue Lösungsarten aufgestellt werden wie dort, und auch die Anzahl der Willkürlichkeiten ist ähnlich zu behandeln wie in Erklärung 9 des zweites Teiles. Endlich ist auch die Lösung der obigen Aufgabe 156 in genau gleicher Weise nur ein besonderer Fall der vorliegenden, indem die Ordnungspunkte eben Doppelpunkte sind, sodaß die Geraden des ersten Paares Gegenseiten nicht durch verschiedene, sondern durch denselben Punkt des Trägers hindurchgehen.

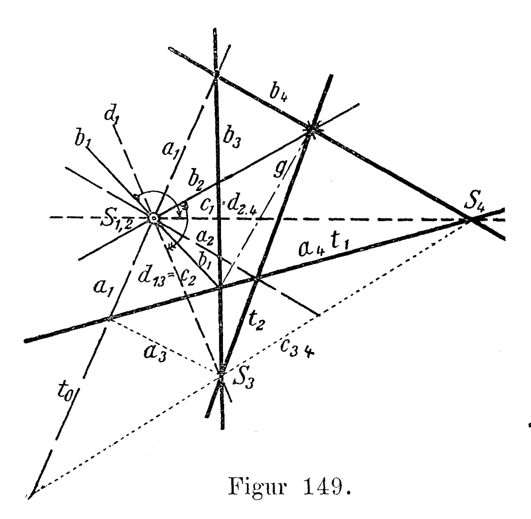
der gesuchte sechste Punkt ausgeschnitten werden.

Aufgabe 159. Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn die Punktinvolution durch einen Ordnungspunkt und ein zugeordnetes Punktpaar bestimmt ist.

Aufgabe 160. Man soll mit Lineal allein den Mittelpunkt einer Involution bestimmen, die bestimmt ist a) durch zwei Punktpaare b) durch ein Punktpaar und einen Ordnungspunkt.

Auflösung. Man konstruiert nach Aufgabe 158 den zugehörigen Punkt zum unendlich fernen Punkt.

Aufgabe 161. Mittels Lineal allein soll zu einem beliebigen Strahl eines Büschels der involutorisch zugeordnete bestimmt werden, wenn die Involution durch zwei Strahlenpaare bestimmt ist.



Figur 149.

Figur 150.

Auflösung. 1) Man betrachtet die beiden gegebenen Strahlenpaare als die Verbindungsgeraden des Scheitels S mit zwei Gegeneckenpaaren eines vollständigen Vierseits, den

Erkl. 501. Der nebenstehenden Auflösung kommen dieselben Vorzüge zu, welche in Erkl. 499 über die dualistischen Aufgaben ausgesprochen sind. Man hat wieder die einfache Zeichenvorschrift: erstes Paar Gegenecken, einzelner Eckpunkt, zweites Paar Gegenecken, sechster Eckpunkt als Gegenecke des einzelnen. — Die Möglichkeit dieser Konstruktion verdient um so mehr hervorgehoben zu werden, als unter den maßgeometrischen Auffassungsweisen keinerlei Mittel waren um Strahleninvolutionen unmittelbar zu konstruieren, sondern alle dort zur Verfügung stehenden Mittel, wie geometrische Proportionale, Kreisbüschel u. s. w., nur die involutorische Punktreihe zum Gegenstand hatten. Und die Winkel-Übertragung aus der rechnenden Behandlungsweise mit dem Produkt zweier Tangentenfunktionen liegt soweit ab von der geometrischen Auffassungsweise, daß sie — besonders für die projektivische Geometrie — überhaupt kaum in Betracht kommt.

Erkl. 502. Auch hinsichtlich der Willkürlichkeit der zur Konstruktion zu verwendenden Stücke sowie des Zusammenhanges mit der früheren Konstruktion harmonischer Geraden und der Aufgabe 157 gilt dasselbe, was in Erkl. 500 ausgeführt wurde. Eben die willkürliche Auswahl der Stücke läßt es bei Aufgabe 158 und 161 vorkommen, daß jede der beiderlei Involutionsarten, elliptische und hyperbolische, mit irgend einer der Figuren 64 bis 69 und 70 bis 74 ausgeführt werden kann. So kann der Schnitt des Strahlenbüschels entweder ganz außerhalb des Vierseits bleiben, oder innerhalb eines der Innenräume desselben zu liegen kommen, je nach der Wahl der ersten drei Elemente der Konstruktion.

einzeln gegebenenen fünften als Verbindungsgerade mit einer fünften Ecke, und erhält den gesuchten zugeordneten Strahl als Verbindungsgerade des sechsten Eckpunktes des vollständigen Vierseits mit dem Scheitel S. — Sind also in Figur 149 von einer hyperbolischen, und in Figur 150 von einer elliptischen Strahleninvolution die Strahlenpaare $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$ gegeben und zu c_1 der zugeordnete Strahl c_2 gesucht, so wählt man erst ganz beliebig die ersten zwei Gegenecken etwa auf a_1 und a_2 und verbindet sie mit einem beliebigen dritten Punkt des gegebenen Einzelstrahles c_1. Durch die so entstehenden Verbindungsgeraden, welche in Figur 149 und 150 als a_4 und b_4 bezeichnet sind, werden bestimmt die beiden auf $b_1 b_2$ liegenden Gegenecken $(b_1 a_4)$ und $(b_2 a_4)$, und diese liefern wieder als Strahlen durch das erste Paar Gegenecken die zwei Verbindungsgeraden t_2 und b_3 für die Gegenecke des auf c_1 liegenden Eckpunktes. Der Schnittpunkt dieser zwei Geraden wird also aus S projiziert durch den zu c_1 involutorisch zugeordneten Strahl c_2.

2) Setzt man die erste Konstruktion der Aufgabe 158 als bekannt voraus, so braucht man bloß die gegebenen Geraden von S zu schneiden durch einen beliebigen Träger t, man konstruiert dann zu den entstehenden Schnittpunkten den sechsten Punkt der Punkt-Involution und erhält als dessen Projektionsstrahl den gesuchten sechsten Strahl.

Aufgabe 162. Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn die Involution durch einen Ordnungsstrahl und ein zugeordnetes Punktpaar bestimmt ist.

Aufgabe 163. Warum ist zu Aufgabe 160 keine dualistische Aufgabe über die Axenstrahlen aufzustellen?

Aufgabe 164. Man soll aus den Sätzen 27 und 28 neue Sätze über veränderliche Vierecke aufstellen.

Auflösung.

Zu gegebenen fünf Punkten einer Geraden gibt es nur einen einzigen sechsten Punkt, der involutorisch zu einem der übrigen so zugeordnet ist, daß die zwei anderen zwei Punktpaare bilden. Betrachtet man also diese Punkte als Schnittpunkte der Gegenseiten verschiedener vollständiger Vierecke, so erhält man:

Satz a. Gehen durch zwei Punktpaare einer Geraden je zwei Gegenseiten und durch einen fünften Punkt derselben Geraden je eine fünfte Seite verschiedener vollständiger Vierecke, so geht auch die sechste Seite bei allen diesen Vierecken jedesmal durch einen und denselben sechsten Punkt dieser Geraden, nämlich den involutorisch zugeordneten zum fünften. — Oder:

Satz b. Verändert sich ein vollständiges Viereck so, daß fünf seiner Seiten sich um fünf feste Punkte einer Geraden drehen, so dreht sich die sechste Seite des Vierecks ebenfalls um einen festen sechsten Punkt derselben Geraden, welcher mit den fünf ersten eine involutorische Punktgruppe bildet.

Zu gegebenen fünf Strahlen eines Punktes gibt es nur einen einzigen sechsten Strahl, der involutorisch zu einem der übrigen so zugeordnet ist, daß die zwei anderen zwei Strahlenpaare bilden. Betrachtet man also diese Strahlen als Projektionsstrahlen der Gegenecken verschiedener vollständiger Vierseite, so erhält man:

Satz α. Liegen auf zwei Strahlenpaaren eines Scheitels je zwei Gegenecken und auf einem fünften Strahl desselben Scheitels je eine fünfte Ecke verschiedener vollständiger Vierseite, so liegt auch die sechste Ecke bei allen diesen Vierseiten jedesmal auf einem und denselben sechsten Strahl dieses Scheitels, nämlich dem involutorisch zugeordneten zum fünften. — Oder:

Satz β. Verändert sich ein vollständiges Vierseit so, daß fünf seiner Eckpunkte auf fünf festen Strahlen eines Scheitels gleiten, so gleitet der sechste Eckpunkt des Vierseits ebenfalls auf einem festen sechsten Strahl desselben Scheitels, welcher mit den fünf ersten eine involutorische Strahlengruppe bildet.

Aufgabe 165. Man soll in dem vorigen Satz vom Viereck die unendlich fernen Elemente verwenden.

Erkl. 503. Der erste der nebenstehenden Sätze, welcher besondere Bedeutung hat für die Gleichgewichtsuntersuchungen an Baukonstruktionen bezw. für Stabilitätsuntersuchungen, kann durch Drehung des einen der zu vergleichenden Vierecke auch folgende Gestalt annehmen:

Auflösung. 1) Wenn die Schnittpunkte auf der unendlich fernen Geraden liegen sollen, so müssen die dahingehenden Seiten parallel sein, und man erhält als besonderen Einzelfall der vorigen Sätze ab:

Satz c. Wenn zwei Paar Gegenseiten und eine fünfte Seite irgend eines vollständigen Vierecks parallel sind zu zwei Paar Gegenseiten und einer fünften Seite eines

Satz. Wenn zwei Paar Gegenseiten und eine fünfte Seite eines vollständigen Vierecks alle einen und denselben aber beliebig großen schiefen bezw. rechten Winkel bilden mit zwei Paar Gegenseiten und einer fünften Seite irgend eines anderen vollständigen Vierecks, so bilden auch die sechsten Seiten beider Vierecke denselben schiefen Winkel miteinander, bezw. stehen senkrecht aufeinander. — Daß auch zu fünf Parallelgeraden eine bestimmte sechste Parallelgerade als involutorisch bezeichnet werden kann, geht aus der Tatsache hervor, daß auch im Parallel-Strahlenbüschel involutorische Zuordnung stattfindet, wenn die Schnittpunkte auf einer beliebigen Transversalen des Büschels involutorisch zugeordnet sind.

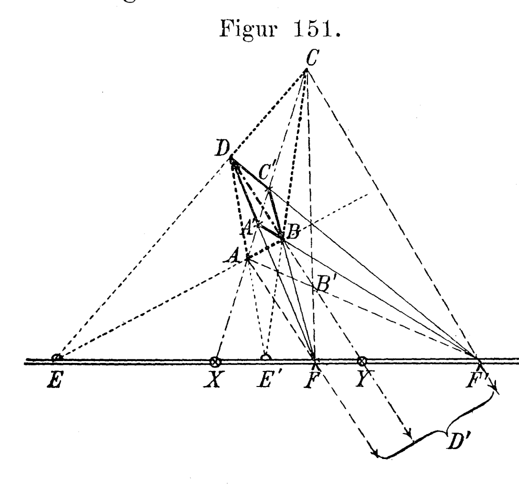
anderen vollständigen Vierecks, so müssen auch die sechsten Seiten des ersten und des zweiten Vierecks parallel sein.

2) Liegt der Scheitel im unendlichen, so müssen alle Geraden dahin parallel sein, und man erhält als besonderen Einzelfall der vorigen Sätze α und β:

Satz γ. Wenn fünf Eckpunkte eines vollständigen Vierseits auf fünf beliebigen Parallelstrahlen verschoben werden, so verschiebt sich der sechste Eckpunkt ebenfalls auf einer Parallelgeraden derselben Richtung, welche mit den fünf vorigen involutorisch liegt.

Aufgabe 166. Zwei Punktpaare EE′ und FF′ derselben Geraden sind gegeben als Gegenecken beliebig vieler vollständigen Vierseite. Man soll zwei solche Vierseite heraussuchen, welche dasselbe dritte Paar Gegenseiten gemeinsam haben.

Figur 151.



Auflösung. Das dritte Paar Gegenseiten muß auf dem Träger t zwei Punkte X und Y ausschneiden, welche sowohl zu EE′ als zu FF′ harmonisch liegen. Solche Punkte lassen sich aber auffinden auf Grund der Aufgaben 148 und 150. Es sind die Ordnungspunkte einer Involution, von welcher EE′ und FF′ Punktpaare sind. Nach deren Konstruktion gibt es aber dann zu jeglichem Viereck ABCD mit Gegenecken EE′ und Diagonalpunkten XAC und YBD gleich zweierlei Vierecke mit Gegenecken FF′ und Diagonalen XA′C′ und YBD oder XAC und YB′D′ und umgekehrt.

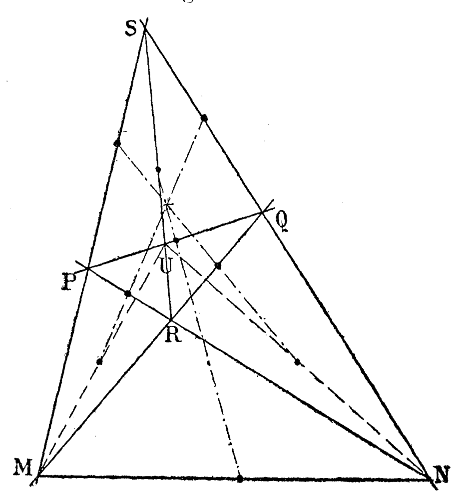
Erkl. 504. Zur Konstruktion der Punkte X und Y bedient man sich nach Aufgabe 148 derjenigen beiden Kreise des Kreisbüschels, welche den Träger t berühren. Möglich ist die Auflösung nur dann, wenn die Punktpaare EE′ und FF′ einander nicht trennen, wenn sie also entweder wie in Figur 151 einander ausschließen, oder eines das andere einschließt.

Aufgabe 167. Man soll die dualistische Aufgabe zu Aufgabe 166 aufstellen und lösen.

Aufgabe 168. Der Projektionsscheitel für die Strahleninvolution am vollständigen Vierseit soll so gewählt werden, daß eine rechtwinklige Strahleninvolution entsteht.

Auflösung. Geht man aus von dem Vierseit PRQS in Figur 152 und denkt sich Halbkreise gezogen über den Diagonalen PQ und

Figur 152.



und RS, so werden einander diese Halbkreise in irgend zwei Punkten H und K schneiden, und die beiden Strahleninvolutionen mit Scheiteln H und K haben die Strahlen nach P und Q sowie nach R und S als rechtwinklig zugeordnete. Die Strahleninvolution in H und K hat also jedesmal zwei Paare Normalstrahlen, sie ist folglich eine orthogonale nnd hat überhaupt lauter Normalstrahlenpaare. Hiernach sind aber auch die Strahlen von H oder K nach M und N senkrecht aufeinander, und daher muß der Halbkreis über Strecke MN ebenfalls durch die beiden Punkte H und K hindurch gehen. Die drei vorhandenen Halbkreise haben also die Punkte H und K gemeinsam, die Strecke HK ist ihre gemeinsame Sehne, und die Mittelsenkrechte von HK muß gemeinsame Centrale der drei Kreise sein, d. h. sie

Erkl. 505. Die orthogonale Involution ist eine Abart der elliptischen. Entsprechend der Figur 75 liegt daher in Figur 152 Punkt K im Dreieck MPR, der Punkt H im Dreieck NRQ, und die Strahlen folgen einander in der Reihenfolge KP, KS, KM (verlängert), die dazu senkrechten in der Reihenfolge KQ, KR, KN. Die Diagonale RS kann so in die Länge gestreckt werden, daß der Halbkreis PQ den über RS nur von innen berührt bezw. gar nicht mehr trifft. Dann muß auch der Halbkreis MN den Halbkreis RS bezw. beide Halbkreise RS und PQ im gleichen Punkte nur berühren, und dann entsteht ein Kreisbüschel zweiter Art, — oder gar nicht treffen, und dann entsteht ein Kreisbüschel dritter Art. Jeder Kreisbüschel hat dabei die Verbindungsgerade der Kreismittelpunkte als gemeinsame Centrale, es verschwinden aber die beiden Strahleninvolutionen H und K, indem sie zwei imaginäre Schnittpunkte zu Scheiteln haben.

Erkl. 506. Das Ergebnis über die Diagonalenmittelpunkte ist bereits gefunden worden in Satz 19 des VI. Teiles der Planimetrie. Und in Aufgabe 249 desselben Bandes wurde an obenstehender Figur nachgewiesen die weitergehende Beziehung:

Satz. Gruppiert man die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks zu den drei daraus möglichen Vierseiten, so liegen die Mittelpunkte von je drei Diagonalstrecken auf je einer Geraden, und diese drei Geraden gehen durch einen Punkt. Man erhält also an der Gesamtfigur dreierlei Kreisbüschel, deren drei Centralen durch einen Punkt gehen.

geht jedesmal durch die Mittelpunkte der drei Kreisdurchmesser PQ, RS, MN. Damit ist aber der Nachweis geliefert, daß die drei Diagonalenmittelpunkte des vollständigen Vierecks auf einer geraden Linie liegen, und man kann den allgemeinen Satz aussprechen:

Satz. Die Halbkreise über den drei Diagonalstrecken eines vollständigen Vierseits gehören einem und demselben Kreisbüschel an, und zwar von der ersten, zweiten oder dritten Gattung, jenachdem die Kreise einander schneiden oder berühren oder nicht treffen.

Aufgabe 169. Aus den Sätzen 27 und 28 vom Viereck sollen Sätze fürs Dreieck abgeleitet werden.

Auflösung. 1) Wird etwa aus Figur 147 einzeln herausgehoben das Dreieck $S_2 B_3 B_4$, so werden seine Seiten geschnitten von der Transversalen t_{12} in den Punkten $A_1 B_2 C_2$, und seine Eckpunkte werden aus dem Scheitel S_1 projiziert durch die Projektionsstrahlen, welche durch Schnitt mit jener Transversalen in entsprechender Reihenfolge die drei Schnittpunkte $A_2 B_1 C_1$ erzeugen. Da nun die involutorische Zuordnung unter diesen sechs Schnittpunkten eine eindeutige ist, so erhält man vorwärts und rückwärts geltende Sätze über die Lage dieser Elemente, nämlich:

Satz a. Werden die drei Seiten eines Dreiecks durch eine Transversale geschnitten, und auch die Projektionsstrahlen seiner Eckpunkte aus einem beliebigen Scheitel mit derselben Transversalen zum Schnitt gebracht, so bilden die durch je zwei gegenüberliegende Dreieckselemente auf der Transversalen erzeugten Schnittpunkte die zugeordneten Punktpaare einer Involution.

2) Als Umkehrung folgt aus der involutorischen Lage der Schnittpunkte auf der Transversalen die entsprechende Lage der Elemente zum Dreieck an der Figur:

Auflösung. 1) Wird etwa aus Fig. 149 einzeln herausgehoben das Dreiseit $t_2 b_3 b_4$, so werden seine Eckpunkte projiziert aus dem Scheitel S_{12} durch die Strahlen $a_1 b_2 c_2$, und seine Seiten werden von dem Träger t_1 geschnitten in den Schnittpunkten, welche durch Verbindung mit jenem Scheitel in entsprechender Reihenfolge die drei Strahlen $a_2 b_1 c_1$ erzeugen. Da nun die involutorische Zuordnung unter diesen sechs Strahlen eine eindeutige ist, so erhält man vorwärts und rückwärts geltende Sätze über die Lage dieser Elemente, nämlich:

Satz α. Werden die drei Eckpunkte eines Dreiecks aus einem Scheitel projiziert, und auch die Schnittpunkte seiner Seiten mit einer beliebigen Transversalen mit demselben Scheitelpunkt verbunden, so bilden die durch je zwei gegenüberliegende Dreieckselemente in dem Projektionsscheitel erzeugten Projektionsstrahlen die zugeordneten Strahlenpaare einer Involution.

2) Als Umkehrung folgt aus der involutorischen Lage der Strahlen am Projektionsscheitel die entsprechende Lage der Elemente zum Dreieck an der Figur:

Satz β. Verbindet man die drei Eckpunkte eines Dreiecks mit

Satz b. Schneidet man die drei Seiten eines Dreiecks durch eine Transversale und ordnet jedem Schnittpunkt einen gepaarten Punkt einer involutorischen Reihe auf diesem Träger zu, so gehen die Verbindungsgeraden dieser gepaarten Punkte je mit den Gegenecken des ursprünglichen Dreiecks durch einen Punkt.

einem Scheitelpunkte und ordnet jedem Projektionsstrahl einen gepaarten Strahl eines involutorischen Büschels aus diesem Scheitel zu, so liegen die Schnittpunkte dieser gepaarten Strahlen je mit den Gegenseiten des ursprünglichen Dreiecks auf einer Geraden.

Erkl. 507. Da involutorische Gebilde durch Zusammenlegung projektivischer Einzelgebilde entstanden sind, so besteht unter je vier zugeordneten Elementen Gleichheit der Doppelverhältnisse. So ist für Figur 147 unter den Punkten $A_1 B_1 A_2 C_2$ und $A_2 B_2 A_1 C_1$ die Gleichheit $(A_1 B_1 A_2 C_2) = (A_2 B_2 A_1 C_1)$ oder $\frac{A_1 A_2}{B_1 A_2} : \frac{A_1 C_2}{B_1 C_2} = \frac{A_2 A_1}{B_2 A_1} : \frac{A_2 C_1}{B_2 C_1}$. Hieraus entsteht die Gleichung $\frac{A_1 A_2}{A_2 A_1} = \frac{A_1 C_2 \cdot B_1 A_2 \cdot C_1 B_2}{C_2 B_1 \cdot A_2 C_1 \cdot B_2 A_1} = -1$. Dabei beginnt und endet im Zähler bezw. Nenner jeder Faktor mit End- und Anfangsbuchstaben des vorhergehenden und folgenden Faktors im Nenner bezw. Zähler. Berücksichtigt man nun die Uebertragung dieser Doppelverhältnisse durch die Projektion aus dem gewählten Scheitelpunkte auf die gegenseitige Beziehung der auf den Seiten des Dreiecks ausgeschnittenen Schnittpunkte, so muß nur Scheitel bezw. Transversale passend ins unendliche verlegt werden, dann erhält man aus den obigen Sätzen diejenigen Beziehungen am Dreieck, welche eine Art Mittelstellung zwischen metrischer und synthetischer Geometrie einnehmen, und welche zum Ausgangspunkt einer vollständigen Theorie der Transversalen gemacht worden sind. Es sind die Sätze von Menelaos und Ceva nebst ihren Anwendungen und Folgerungen, die im sechsten und siebten Kapitel des VII. Teiles der Planimetrie angeführt werden.

---

10. Aufgaben über die involutorischen Beziehungen an den Kurven zweiten Grades und sog. Aufgaben zweiten Grades.

(Zu Abschnitt 3 d.)

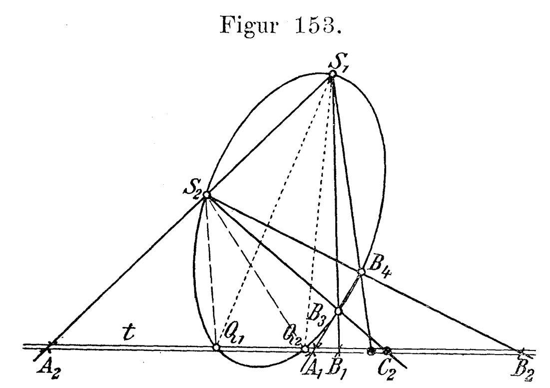
Aufgabe 170. Aus den Sätzen von Desargues sollen Beziehungen an der veränderlichen Kurve mit vier festbleibenden Elementen abgeleitet werden.

Auflösung. 1) Denkt man sich in Figur 153 die vier Punkte $S_1 S_2 B_3 B_4$ der Kurve nebst der Transversalen festgehalten und die Kurve veränderlich, so bleiben nach dem Satze 27 die Kurvenschnittpunkte $Q_1 Q_2$ auf t stets ein Punktpaar, und etwaige Kurvenberührungspunkte auf t die Ordnungspunkte

Auflösung. 1) Denkt man sich in Figur 154 vier Tangenten $t_1 t_2 b_3 b_4$ nebst dem Projektionsscheitel festgehalten und die Kurve veränderlich, so bleiben nach Satz 28 die Kurventangenten $q_1 q_2$ aus S stets ein Strahlenpaar und etwaige Kurventangenten in S die Ordnungsstrahlen der Involution,



Figur 153.



der Involution, welche durch die sechs Vierecksseiten bezw. schon durch vier derselben bestimmt wird. Dasselbe gilt für Figur 80 und 82 bei Festhaltung des Dreiecks mit einer oder der Sehne mit zwei Kurventangenten. (Vergl. Erkl. 281 ff.)

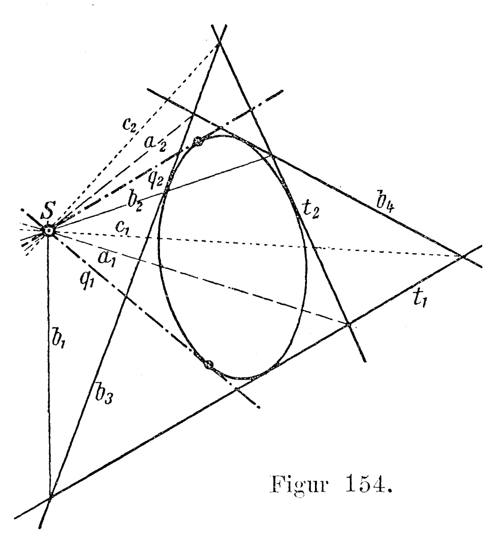
2) Wird dieselbe Auffassungsweise auf diejenigen Fälle angewandt, wo ein Ordnungspunkt der Involution als fester Punkt auftritt, z. B. Figur 82 und 84, so erhält man die Aussage:

Satz a. Wird eine Kurve so verändert, daß sie stets durch zwei feste Punkte $Q_1 Q_2$ (Figur 82) geht und zwei feste Geraden berührt, so geht die Berührungssehne dieser beiden Tangenten stets durch einen von zwei festen Punkten der Sehne $Q_1 Q_2$ jener beiden Punkte, nämlich einen der beiden Ordnungspunkte der Involution, welche auf dieser Sehne t bestimmt wird durch ihre Kurvenpunkte $Q_1 Q_2$ und die Schnittpunkte $A_1 A_2$ mit den beiden festen Tangenten. — Oder (Figur 84)

Satz b. Wird eine einem gegebenen Dreiseit ein- bezw. angeschriebene Kurve so verändert, daß sie eine Seite stets in einem festen Punkte berührt, so geht die Berührungssehne der beiden anderen

welche durch die sechs Vierseitecken bezw. schon durch vier derselben bestimmt wird. Dasselbe gilt auch für Figur 81 und 83 bei Festhaltung des Dreiseits mit einem oder des Tangentenwinkels mit zwei Berührungspunkten.

2) Wird dieselbe Auffassungsweise auf diejenigen Fälle ausgedehnt, wo ein Ordnungsstrahl der Involution als fester Strahl



Figur 154.

auftritt, z. B. Figur 83 und 85, so erhält man die Aussage:

Satz α. Wird eine Kurve so verändert, daß sie stets zwei feste Geraden $q_1 q_2$ (Figur 83) berührt und durch zwei feste Punkte geht, so liegt der Schnittpunkt der Tangenten in diesen beiden Punkten stets auf einer von zwei festen Geraden durch den Tangentenschnittpunkt $q_1 q_2$, nämlich einem der beiden Ordnungsstrahlen der Involution, welche in diesem Tangentenschnittpunkt S bestimmt wird durch seine beiden Tangenten $q_1 q_2$ und die Verbindungsgeraden nach den beiden festen Punkten. — Oder (Figur 85)

Seiten stets durch den vierten harmonischen Punkt der dritten Seite.

Erkl. 508. - Die Berührungspunkte S_{12} B_{34} der Kurve in Figur 82 liegen beide gleicherseits t oberhalb $Q_1 Q_2$. Bei dieser Lage (und bei der entgegengesetzten, daß beide unterhalb wären) ist der feste Punkt für die Berührungssehne der außerhalb $Q_1 Q_2$ liegende Ordnungspunkt C_{12}. Liegen aber die Berührungspunkte zu verschiedenen Seiten von t (der eine oberhalb und der andere unterhalb $Q_1 Q_2$), so ist der feste Punkt der andere Ordnungspunkt der Involution $A_1 A_2 Q_1 Q_2$. Im zwischenliegenden Falle müssen beide Berührungspunkte auf t selber in $A_1 A_2$ zu liegen kommen, und ihre Verbindungsgerade geht gleichzeitig durch beide Ordnungspunkte der Involution, indem die ganze Kurve ausartet zur doppelt gelegten Strecke $A_1 A_2$ bezw. als Klassenkurve zur Gesamtheit der durch die Punkte A_1 und A_2 hindurchgehenden Geraden.

Satz β. Wird eine einem gegebenen Dreieck umgeschriebene Kurve so verändert, daß sie in dem einen Eckpunkt stets eine feste Tangente berührt, so liegt der Tangentenschnittpunkt für die beiden anderen Eckpunkte stets auf der vierten harmonischen Geraden des ersten Eckpunktes.

Erkl. 509. Der Schnittpunkt der Tangenten t_{12} b_{34} in Figur 83 liegt im Innenwinkel der Tangenten $q_1 q_2$. Bei dieser Lage (und bei der entgegengesetzten im Scheitelwinkel) ist die feste Gerade für den Tangentenschnittpunkt der im Innenwinkel $q_1 q_2$ liegende Ordnungsstrahl c_{12}. Liegt aber der Schnittpunkt im Nebenwinkel von $q_1 q_2$, so ist der feste Strahl der andere Ordnungsstrahl der Involution $a_1 a_2 q_1 q_2$. Im zwischenliegenden Falle müssen beide Tangenten mit a_1 a_2 selber zusammenfallen, und ihr Schnittpunkt liegt gleichzeitig auf beiden Ordnungsstrahlen der Involution, indem die Kurve zusammenschrumpft zum Punkte S selber als ausgeartete unendlich kleine Kurve mit doppelt zählendem Punkte S bezw. als Ordnungskurve zur Gesamtheit der auf den Geraden a_1 und a_2 liegenden Punkte.

Erkl. 510. Man beachte, daß die beiden ersten Lehrsätze infolge der dualistischen Gegenüberstellung genau gleiche Voraussetzungen erhalten, daß also der Nachsatz von beiden Seiten gleichzeitig für denselben Vordersatz ausgesprochen werden kann. Das zweite Paar von Sätzen ist schon aus früheren Untersuchungen zu entnehmen (vergl. Erkl. 209 des II. Teils). Man kann den Inhalt in andere Form bringen, wenn man in Figur 84 die zweite Tangente aus C_{12} zieht bezw. in Figur 85 den zweiten Kurvenpunkt auf c_{12} benützt. Denn die Polare zu C_{12} in Figur 84 geht sowohl durch Q den Schnittpunkt der Tangenten in S und B als durch den Berührungspunkt der zweiten Tangente aus C. Und der Pol von c_{12} in Figur 85 liegt sowohl auf q als Berührungssehne der Tangenten t und b, als auf der Tangente im zweiten Kurvenschnittpunkte von c. So erhält man die andere Ausdrucksweise in zwei dualistisch inhalts-kongruenten Sätzen:

Satz c. Geht die Berührungssehne zweier Tangenten durch den Schnittpunkt zweier anderen Tangenten, so geht auch die Berührungssehne dieser letzten Tangenten durch den Schnittpunkt der ersten.

Satz γ. Liegt der Schnittpunkt der Tangenten zweier Kurvenpunkte auf der Sekante durch zwei andere Kurvenpunkte, so liegt auch der Schnittpunkt der Tangenten dieser letzteren Kurvenpunkte auf der Sekante der ersten.

Aufgabe 171. Aus Satz 29b die Sätze 19 zu entnehmen.

Aufgabe 172. Aus den Sätzen von Desargues sollen Beziehungen am veränderlichen Viereck an festbleibender Kurve abgeleitet werden.

Auflösung. 1) Die Involution auf t in Figur 153 ist festgelegt durch die Punkte $Q_1 Q_2$ und irgend ein Punktpaar auf den Viereckseiten. Sind also etwa bei festbleibender Kurve die Punkte $A_1 A_2$ und C_1 gleichbleibend, so können die Kurvenpunkte des Vierecks beliebig wechseln, es muß stets derselbe Punkt Q_2 entstehen, wie man auch die Sekante $A_2 S_2 S_1$ als erste Seite durch die Kurve gelegt haben mag, So entsteht:

Satz a. Werden einer festen Kurve beliebig viele Vierecke so eingeschrieben, daß drei von ihren Seiten durch drei feste Punkte einer Geraden hindurchgehen, so geht die vierte Seite stets durch einen und denselben festen vierten Punkt jener Geraden hindurch.

2) Ist insbesondere der Punkt $Q_{1\,2}$ Berührungspunkt der Kurve mit t, so wird er Ordnungspunkt der Involution, und diese letztere wird eine g l e i c h s e i t i g h y p e r b o l i s c h e, wenn auch nur ein Punktpaar beiderseits Q gleiche Abstandsstrecken bildet. Dadurch entsteht der merkwürdige Satz:

Satz b. Legt man durch zwei Punkte, welche auf einer Kurventangente beiderseits ihres Berührungspunktes gleiche Strecken abschneiden, zwei Sekanten durch die Kurve als Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks, so liefern auch die beiden anderen Gegenseitenpaare solche Schnittpunkte auf dieser Tangente, welche beiderseits in gleichen Abstandsstrecken vom Berührungspunkte liegen.

Auflösung. 1) Die Involution durch S in Figur 154 ist festgelegt durch die Tangenten $q_1 q_2$ und irgend ein Strahlenpaar nach den Eckpunkten des Vierseits. Sind also bei festbleibender Kurve etwa die Strahlen $a_1 a_2$ und c_1 gleichbleibend, so können die Kurventangenten des Vierseits beliebig wechseln, es muß stets derselbe Strahl c_2 entstehen, wie man auch den Eckpunkt $(a_1\, t_1\, t_2)$ als ersten Eckpunkt des Vierseits gewählt haben mag. So entsteht:

Satz α. Werden einer festen Kurve beliebig viele Vierecke so umgeschrieben, daß drei von ihren Eckpunkten auf drei festen Geraden eines Punktes liegen, so liegt der vierte Eckpunkt stets auf einer und derselben festen vierten Geraden jenes Punktes.

2) Ist insbesondere der Strahl $q_{1\,2}$ Tangente der Kurve in S, so wird er Ordnungsstrahl der Involution, und diese letztere wird eine g l e i c h s e i t i g h y p e r b o l i s c h e, wenn auch nur ein Strahlenpaar beiderseits q gleiche Neigungswinkel bildet. Dadurch entsteht der merkwürdige Satz:

Satz β. Wählt man auf zwei Geraden, welche in einem Kurvenpunkt mit dessen Tangente beiderseits gleich große Neigungswinkel bilden, zwei Tangentenschnittpunkte als Gegenecken eines umgeschriebenen Vierseits, so liefern auch die beiden anderen Gegeneckenpaare solche Verbindungsstrahlen mit diesem Kurvenpunkte, welche beiderseits in gleichen Neigungswinkeln zur Tangente liegen.

3) Der letztere Satz gibt auch noch hinreichend bemerkenswerte Ergebnisse, wenn von den beiden Sekanten die eine oder beide zu Tangenten werden, wobei der letztere Fall wieder den Zusammenhang herstellt mit dem letzten Satz b der Auflösung der Aufgabe 170. Und gleiches gilt von dem Einzelfall, daß die Punkte der Tangenten, von welchen die Sekanten bezw. Sehnen ausgehen, beide im unendlich fernen Punkte der ausgewählten Tangente zusammenfallen.

3) Der letztere Satz gibt auch noch hinreichend bemerkenswerte Ergebnisse, wenn von den beiden Tangentenschnittpunkten der eine oder beide zu Kurvenpunkten werden, wobei der letztere Fall wieder den Zusammenhang herstellt mit dem letzten Satz β der Auflösung der Aufgabe 170. Und gleiches gilt von dem Einzelfall, daß die Strahlen des Kurvenpunktes, auf welchen die Tangentenschnittpunkte bezw. Kurvenpunkte gewählt werden, beide mit der Senkrechten auf der Tangente im ausgewählten Kurvenpunkte zusammenfallen.

Erkl. 511. Man kann aus den Sätzen a und α vorstehender Auflösung noch allgemeinere Sätze ableiten, indem man das Viereck zum Vieleck erweitert. Nimmt man nämlich die aus einem ersten Eckpunkt nach dem vierten, sechsten, achten ·· Eckpunkt des Vielecks führenden Nebenseiten hinzu bezw. die auf einer ersten Seite mit der vierten, sechsten, achten ··· Seite des Vielseits gebildeten Nebenecken, so zerfällt das Vieleck in lauter einzelne Vierecke, welche aus Vieleck-Seiten und Diagonalen zusammengesetzt sind. Und die letzte Seite bezw. Ecke des letzten Vierecks ist auch die letzte Seite bezw. Ecke des genannten Vielecks, das folglich stets eine gerade Seitenzahl bezw. Eckenzahl erhalten muß. So erhält man die neuen Sätze:

Satz c. Werden einer festen Kurve irgend welche Vielecke von gerader Eckenzahl so eingeschrieben, daß von deren Seiten alle bis auf die letzte durch ebensoviele feste Punkte einer bestimmten Geraden hindurchgehen, so gehen auch die letzten Seiten jener Vielecke alle durch einen und denselben festen Punkt dieser Geraden.

Satz γ. Werden einer festen Kurve irgend welche Vielseite von gerader Seitenzahl so umgeschrieben, daß von den Ecken alle bis auf die letzte auf ebensovielen festen Strahlen eines bestimmten Punktes liegen, so liegen auch die letzten Eckpunkte jener Vielseite alle auf einem und demselben festen Strahl dieses Punktes.

Aufgabe 173. Man soll einige Änderungen der Sätze b, β zum Ausdruck bringen.

Aufgabe 174. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind vier Kurvenpunkte und eine Tangente, die durch keinen derselben hindurchgeht.

Erkl. 512. Wenn eine Aufgabe auf zweierlei Lösungen führt, so nennt man sie eine Aufgabe zweiten Grades. Diese entsprechen denjenigen Aufgaben

Auflösung. Seien $S_1 S_2 B_3 B_4$ in Figur 153 die vier Kurvenpunkte und t die gegebene Tangente, so bestimmen die Seiten des Vierecks durch ihre Schnittpunkte auf t eine Punktinvolution, und der Berührungspunkt der Kurve auf der Tangente t muß der eine der beiden Ordnungspunkte der In-

der Arithmetik, welche durch quadratische Gleichungen, also ebenfalls mit zwei Lösungen ausgeführt werden, oder denjenigen der Planimetrie, welche durch Kreisschnitte mit Geraden oder Kreisen gelöst werden. Während aber bei den Aufgaben ersten Grades nur die Fälle mit einer oder keiner Lösung auseinanderzuhalten sind, müssen hier stets die drei Fälle mit zwei oder einer oder keiner Lösung untersucht werden. Da die Aufsuchung der Ordnungselemente einer Involution die Verwendung eines Kreises nötig macht, so sieht man, daß eine Aufgabe zweiten Grades nicht ohne Vorhandensein einer kontinuierlich gezeichneten Kurve ausgeführt werden kann. In der Tat bildet es einen besonders interessanten Zweig der Aufgaben zweiten Grades, sie alle zu lösen mittels des Lineals und einer einzigen, ein für allemal als vorhanden angenommenen kontinuierlich gezeichneten Kurve.

volution sein. Man bekommt also dadurch einen fünften Kurvenpunkt und kann nach Paskal weiter konstruieren. Man erhält zweierlei Lösungen, jenachdem man den einen oder anderen Ordnungspunkt als fünften Kurvenpunkt zu den vier gegebenen hinzunimmt. Man erhält aber keine Lösung, wenn die auf der Geraden erzeugte Involution keine Ordnungspunkte enthält, also nach Satz 27a, wenn die Gerade bei konvexem Viereck der vier Punkte ungeradzahlig, bei konkavem Viereck geradzahlig die Punkte trennt. Die zwischenliegende Lösung mit einziger Kurve würde dem Zwischenfalle zugehören, daß die Gerade durch einen der Punkte selber hindurchginge.

Aufgabe 175. Eine Parabel durch vier gegebene Punkte zu legen.

Aufgabe 176. Man beweise, daß durch vier gegebene Punkte bei konvexer Lage stets zwei Parabeln, bei konkaver Lage nie eine Parabel möglich ist.

Erkl. 513. Die Elemente PPPP, T liefern die Möglichkeit unendlich ferner Elemente, indem entweder T_∞ oder P_∞ ein- bezw. zweimal eingesetzt wird.

Auflösung. Da die unendlich ferne Gerade als Tangente die vier im endlichen liegenden Punkte stets alle vier auf gleicher Seite hat, so hat die Involution auf derselben bei konvexer Lage stets zwei, bei konkaver Lage stets keinen Ordnungspunkt.

Aufgabe 177, 178. Eine Hyperbel zu konstruieren, von welcher gegeben sind

(177) drei Punkte, eine Tangente und eine Asymptotenrichtung,

(178) zwei Punkte, eine Tangente und beide Asymptotenrichtungen.

Andeutung. Man hat $PPPP_\infty$, T bezw. $PPP_\infty P_\infty$, T als gegebene Stücke und erhält jeweils keine oder zwei Kurven.

Aufgabe 179. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind vier Tangenten und ein Kurvenpunkt, der auf keiner derselben liegt.

Erkl. 514. Bezeichnet man wie früher gegebene Tangenten und Punkte der Kurve mit den Anfangsbuchstaben T bezw. P, so hätte man hier TTTT, P, wobei das Komma ausdrücklich daran erinnert, daß nicht die vereinigte Lage der Elemente stattfindet, welche mit (PT) angedeutet wurde. Die Aufgaben dieses Kapitels können selbstverständlich ebenso wie die Aufgaben 177, 192 und folgende des II. Teils ausgesprochen werden als Konstruktion einer Kurve, welche durch vier bezw. drei bezw. zwei gegebene Punkte hindurchgeht, oder welche einem gegebenen Viereck bezw. Dreieck umgeschrieben ist bezw. eine gegebene Sehne hat, und die dualistischen als Konstruktion einer Kurve, welche vier bezw. drei bezw. zwei gegebene Geraden berührt, oder welche einem gegebenen Vierseit, Dreieck bezw. Winkel ein- oder angeschrieben ist.

Auflösung. Seien $t_1 t_2 b_3 b_4$ in Figur 154 die vier Tangenten und S der gegebene Kurvenpunkt, so bestimmen die Eckpunkte des Vierseits durch ihre Verbindungsgeraden mit S eine Strahleninvolution, und die Berührungsgerade der Kurve im Punkte S muß der eine der beiden Ordnungsstrahlen der Involution sein. Man bestimmt also dadurch eine fünfte Kurventangente und kann nach Brianchon weiter konstruieren. Man erhält zweierlei Lösungen, jenachdem man den einen oder andern Ordnungsstrahl als fünfte Tangente zu den vier gegebenen hinzunimmt. Man erhält aber keine Lösung, wenn die im Scheitel S erzeugte Involution keine Ordnungsstrahlen enthält, also nach Satz 28a je nach Lage des Punktes zu den Flächenräumen der vier gegebenen Tangenten. Die zwischenliegende Lösung mit einziger Kurve würde dem Zwischenfalle zugehören, daß der gegebene Kurvenpunkt auf einer der gegebenen Tangenten selbst läge.

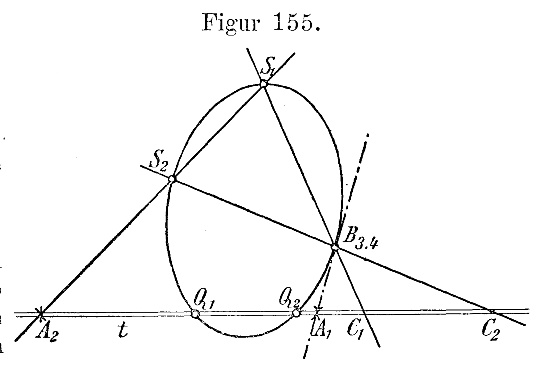
Aufgabe 180. Einem gegebenen Dreiseit eine Parabel so anzuschreiben, daß sie durch einen gegebenen Punkt geht.

Aufgabe 181. Einem gegebenen Vierseit eine Hyperbel anzuschreiben mit gegebener Asymptotenrichtung.

Aufgabe 182. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind drei Kurvenpunkte und zwei Tangenten, wovon eine durch einen der gegebenen Punkte hindurchgeht.

Erkl. 515. Das Eintreten von zweien oder keiner Lösung hängt wieder ab vom Auftreten von zwei oder keinem Ordnungspunkt in der Punktinvolution

Figur 155.



auf t, und letzteres von der Lage der Geraden t zu den anderen Elementen PP (PT). Vergl. auch Aufgabe 198.

Auflösung. Seien $S_1 S_2 B_{34}$ in Figur 155 die drei Punkte, und $B_{34} A_1$ nebst t die gegebenen Tangenten, so bestimmen die Verbindungsgeraden der drei Punkte zusammen mit der Tangente BA durch ihre Schnittpunkte auf t eine Punktinvolution, und der Berührungspunkt der Kurve auf t muß der eine der beiden Ordnungspunkte der Involution sein. Dadurch wird die Aufgabe von den Bestimmungsstücken PP (PT), T zurückgeführt auf PP (PT) (PT), kann also nach Paskal weitergeführt werden mit zwei oder keiner Lösung.

Aufgabe 183/84. Die zwei Parabeln zu konstruieren, von denen gegeben sind

(183) PP (PT) bezw.
(184) PP, T und die Axenrichtung.

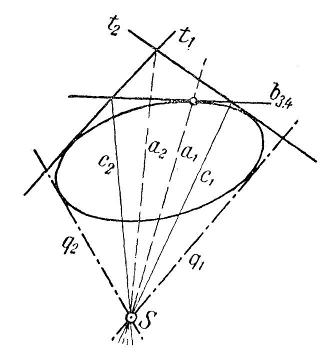
Aufgabe 185—88. Die beiden Hyperbeln zu konstruieren, welche folgende gegebenen Elemente gemeinsam haben:

(185) eine Asymptotenrichtung und P (PT) T,
(186) beide Asymptotenrichtungen und (PT) T,
(187) eine Asymptote und PP, T,
(188) eine Asymptote, die Richtung der zweiten und P, T.

Andeutung. Die Aufsuchung der Ordnungspunkte der auf T erzeugten Involution liefert die Berührungspunkte der beiden gesuchten Hyperbeln, welche dann nach Paskal weiter ausgeführt werden können.

Aufgabe 189. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind drei Tangenten und zwei Kurvenpunkte, deren einer auf einer gegebenen Tangente liegt.

Figur 156.



Auflösung. Seien $t_1\, t_2\, b_{34}$ in Figur 156 die drei Tangenten und $(b_{34}\, a_1)$ nebst S die gegebenen Kurvenpunkte, so bestimmen die Schnittpunkte der drei Geraden zusammen mit dem Berührungspunkt durch ihre Verbindungsgeraden mit S eine Strahleninvolution, und die Tangente der Kurve in S muß der eine der beiden Ordnungsstrahlen dieser Involution sein. Dadurch wird die Aufgabe von den Bestimmungsstücken TT (TP), P zurückgeführt auf TT (TP) (TP), kann also nach Brianchon weitergeführt werden, und zwar mit zwei oder keiner Lösung.

Erkl. 516. Das Eintreten zweier oder keiner Lösung hängt wieder ab von dem Auftreten von zwei oder keinem Ordnungsstrahl in der Strahleninvolution in S, und letzteres von der Lage des Punktes S zu den andern Elementen TT (TP).

Aufgabe 190/91. Diejenigen Parabeln zu konstruieren, welche als gegebene Stücke gemeinsam haben (190) T (TP) P, (191) TT, P und die Axenrichtung.

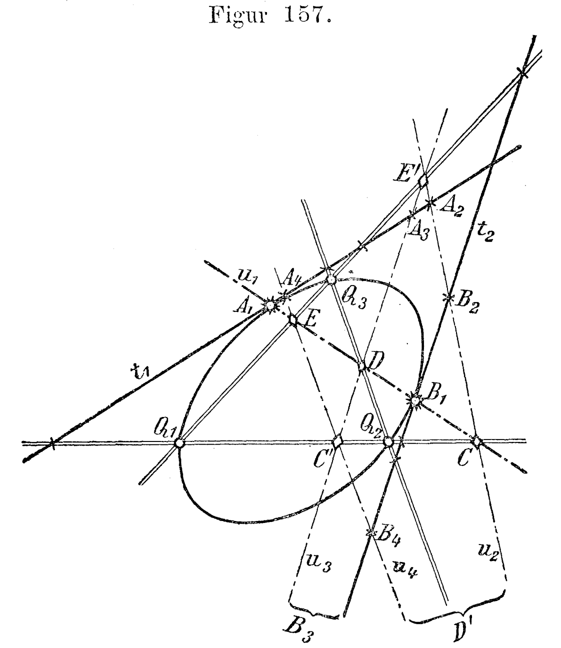
Aufgabe 192—94. Zwei Hyperbeln zu konstruieren, von denen gegeben sind

(192) eine Asymptotenrichtung nebst TT (TP),
(193) eine Asymptote nebst TT, P,
(194) eine Asymptote, die Richtung der andern und zwei Tangenten.

Erkl. 517. Die Mannigfaltigkeit aller Aufgaben dieses Abschnittes kann noch weiter vermehrt werden, wenn man Gebrauch macht von den mit Maßeigenschaften verknüpften Elementen, wie Durchmesser, Mittelpunkt, Axen, Scheitel usw., dazu von den Elementengruppen Pol und Polare, wie in den Aufgaben im fünften bis siebten Abschnitt dieser Aufgabensammlung.

Aufgabe 195. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind drei Kurvenpunkte und zwei Tangenten, von denen kein Paar vereinigt liegt.

Figur 157.



Auflösung. 1) Angenommen die Kurve in Figur 82 (bezw. 157) sei die gesuchte, $Q_1 Q_2$ in Figur 82 seien zwei von den drei gegebenen Kurvenpunkten und $A_2 S$ und $A_1 B$ die beiden gegebenen Tangenten, dann entsteht auf der Sekante t die Involution der Punktpaare $A_1 A_2 Q_1 Q_2$, und man weiß aus Satz 29b, daß die Verbindungsgerade der Berührungspunkte SB durch einen der beiden Ordnungspunkte $C_{1\,2}$ dieser Involution hindurchgehen muß. Sind aber nun $Q_2 Q_3$ in Figur 157 ein anderes Paar der drei gegebenen Kurvenpunkte, so entsteht auf dieser neuen Kurvensekante $Q_2 Q_3$ wieder eine solche Punktinvolution mit Punktpaar $Q_2 Q_3$ und den beiden Tangentenschnittpunkten, und dieselbe Berührungssehne $A_1 B_1$ muß auch auf dieser zweiten Sekante als Schnittpunkt D den einen der beiden Ord-

Erkl. 518. Da der Satz 29 b für jede Berührungssehne der Kurve gilt, so muß er auch gelten für dieselbe Berührungssehne in bezug auf jede Sekante der Kurve, und durch diese Verwendung geschieht die Rückführung der Aufgabe. Dabei schneidet die Berührungssehne $A_1 B_1$ in Figur 157 sowohl auf $Q_1 Q_2$ den Ordnungspunkt C, als auf $Q_2 Q_3$ den Ordnungspunkt D, als auf $Q_3 Q_1$ den Ordnungspunkt E aus. Es bedarf also keines Beweises, daß diese drei Ordnungspunkte C D E auf derselben Geraden liegen müssen. Uebrigens läßt sich hierfür auch der folgende metrische Zusammenhang nachweisen. Die drei Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$ bilden ein Dreieck, dessen Seitenstrecken durch je ein Punktpaar der Involution gebildet werden, also durch die Ordnungspunkte innen und außen harmonisch im gleichen Verhältnis geteilt werden. Nach dem Satze in Aufgabe 209 des VI. Teils der Planimetrie müssen daher die Teilungsverhältnisse der drei Dreiecksseiten eine fortlaufende Proportion $m : n : p$ bilden, und $Q_1 Q_2$ wird geteilt im Verhältnis $m : n$, $Q_2 Q_3$ im Verhältnis $n : p$, und $Q_3 Q_1$ im Verhältnis $p : m$.

Erkl. 519. Die drei Involutionen auf $Q_1 Q_2$, $Q_2 Q_3$, $Q_3 Q_1$ erzeugen die Ordnungspunkte $C C'$, $D D'$, $E E'$, und es liefern 1) die Punkte C D E die Berührungspunkte $A_1 B_1$, also eine Kurve durch $Q_1 Q_2 Q_3$, welche die beiden gegebenen Tangenten in A_1 und B_1 berührt. 2) Die Punkte $C D' E'$ liefern die Berührungssehne $A_2 B_2$, also eine Kurve durch $Q_1 Q_2 Q_3$, welche dieselben beiden gegebenen Tangenten in A_2 und B_2 berührt. 3) Die Punkte $C' D E'$ liefern die Berührungssehne $A_3 B_3$, also eine Kurve durch $Q_1 Q_2 Q_3$, welche dieselben beiden gegebenen Tangenten in A_3 und B_3 berührt. 4) Die Punkte $C' D' E$ liefern die Berührungssehne $A_4 B_4$, also eine Kurve durch $Q_1 Q_2 Q_3$, welche dieselben beiden gegebenen Tangenten in A_4 und B_4 berührt. Bei der Lage der Elemente in Figur 157 erscheinen alle vier Kurven als mehr oder weniger langgestreckte Ellipsen. Wird aber das Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ durch eine der Tangenten durchschnitten, so könnte keine Ellipse unter den vier Kurven sein.

nungspunkte der Involution ausschneiden. Ebenso könnte man $Q_1 Q_3$ als dritte Sekante verwenden, erhält wieder eine Involution mit Punktpaar $Q_1 Q_3$ und den Tangentenschnittpunkten und mit Ordnungspunkten E und E', und dieselbe Berührungssehne $A_1 B_1$ muß auch hier durch den einen der zwei Ordnungspunkte hindurchgehen.

2) Hiernach können aus den gegebenen Stücken $Q_1 Q_2 Q_3$ nebst TT zunächst die drei Punktinvolutionen und deren Ordnungspunkte konstruiert werden, und jede Verbindungsgerade solcher drei Ordnungspunkte kann als eine Berührungssehne der gesuchten Kurve mit den beiden gegebenen Tangenten verwendet werden, d. h. eine solche Verbindungsgerade schneidet auf den beiden gegebenen Tangenten TT die Berührungspunkte aus. Dadurch sind die gegebenen Elemente PPP, TT erweitert auf PPP (PT) (PT), also kann die Kurve nach Paskal weiter konstruiert werden.

3) Man erhält in Figur 157 auf jeder der drei Sekanten $Q_1 Q_2$, $Q_2 Q_3$, $Q_3 Q_1$ zwei Ordnungspunkte, von denen aber je drei auf einer geraden Linie liegen müssen. Folglich liefern die sechs Ordnungspunkte im ganzen vier verschiedene Berührungssehnen, und daher gibt es vier Kurven, welche den gegebenen Bedingungen der Aufgabe genügen. Diese vier Lösungen sind aber nur möglich, wenn auch wirklich die drei Involutionen Ordnungspunkte besitzen. Werden aber die beiden Tangenten durch irgend zwei der gegebenen drei Punkte getrennt, so gibt es keine Kurven mit den gegebenen Bestimmungsstücken.

Aufgabe 196. Man bilde aus vorstehender Aufgabe die entsprechenden für Parabel und Hyperbel.

Aufgabe 197. Man soll einen einfachen Fall angeben, in welchem die Lösung der Aufgabe unmöglich wird.

Aufgabe 198. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind ein Punkt samt Tangente, sowie zwei Punkte und eine getrennt liegende Tangente.

Erkl. 520. Die nebenstehende Auflösung bildet eine zweite Lösungsart für die vorstehende, bereits als Aufgabe 182 aufgeführte und in anderer Weise gelöste Aufgabe. Die neue Lösung schließt sich an die Lösung der Aufgabe 195 an. Und die Vereinfachung durch Zusammenfügung einer Gruppe (PT) führt auf gleiche Aufgabe sowohl aus 174 als 195. Demnach können auch die Aufgaben 183 bis 188 auf diese abgeänderte Weise gelöst werden.

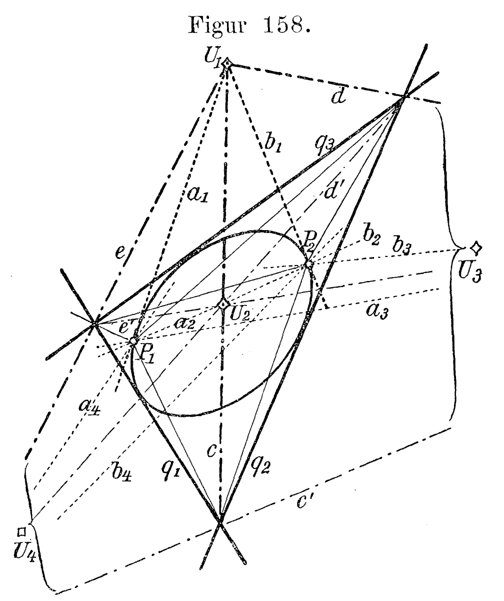
Auflösung. Angenommen die Kurve in Figur 82 sei die gesuchte, $Q_1 Q_2$ die beiden gegebenen Punkte, $A_2 S_{12}$ die samt Berührungspunkt gegebene, und $A_1 B_{34}$ die einzelne Tangente. Dann muß wieder nach Satz 29b der Berührungspunkt B_{34} auf derjenigen Geraden liegen, welche den bekannten Berührungspunkt S_{12} mit dem Ordnungspunkt C_{12} der auf der Sekante Q_{12} erzeugten Involution verbindet. Man konstruiert also diese beiden Ordnungspunkte und verbindet S_{12} entweder mit dem einen oder anderen. Es entstehen so wieder z w e i Lösungen.

Aufgabe 199. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind drei Tangenten und zwei Kurvenpunkte, von welchen kein Paar vereinigt liegt.

Erkl. 521. Die drei Involutionen in $(q_1 q_2)$ $(q_2 q_3)$ $(q_3 q_1)$ erzeugen die Ordnungsstrahlen $c c'$, $d d'$, $e e'$, und es liefern 1) die Geraden $c d e$ das Tangentenpaar $a_1 b_1$, also eine Kurve, welche die drei Tangenten $q_1 q_2 q_3$ und in den Punkten $P_1 P_2$ die Tangenten $a_1 b_1$ berührt. 2) Die Strahlen $c d' e'$ liefern das Tangentenpaar $a_2 b_2$, also eine dem Dreieck eingeschriebene Kurve, welche in den Punkten $P_1 P_2$ die Tangenten $a_2 b_2$ berührt. 3) Die Strahlen $c' d e'$ liefern das Tangentenpaar $a_3 b_3$, also eine Kurve, welche dem Dreieck $q_1 q_2 q_3$ eingeschrieben ist und durch die Punkte $P_1 P_2$ in den Richtungen der Tangenten $a_3 b_3$ hindurchgeht. 4) Die Strahlen $c' d' e$ liefern das Tangentenpaar $a_4 b_4$, also eine Kurve,

Auflösung. 1) Angenommen die Kurve in Figur 83 (bezw. 158) sei

Figur 158.



welche die fünf Tangenten $q_1 q_2 q_3 a_4 b_4$, und zwar die beiden letzteren in den Punkten $P_1 P_2$ berührt. Bei der Lage der Elemente in Figur 158 sind alle vier Kurven Ellipsen. Würde aber eine der Tangenten $q_1 q_2 q_3$ zwischen den Punkten $P_1 P_2$ hindurchgehen, so könnte keine Ellipse unter den vier Kurven sein.

Erkl. 522. Mit den Aufgaben 195 und 199 sind erstmals Aufgaben mit vier Lösungen aufgestellt und durchgeführt. Man könnte dieselben daher als Aufgaben vierten Grades bezeichnen. Sie erinnern an die Einzelfälle aus den zehn Beispielen des Apollonischen Problems, welche ebenfalls als Aufgaben mit vier Lösungen erscheinen, nämlich PTK, PKK und TTT. — Wenn von der entstehenden Strahleninvolution die Strahlenpaare $(q_1 q_2)$ $(q_2 q_3)$ $(q_3 q_1)$ durch die anderen Strahlenpaare nicht getrennt werden, so gibt es sicher Ordnungsstrahlen. Zu diesem Ende dürfen aber die Punkte $P_1 P_2$ nur entweder im gleichen oder in Scheitelwinkelräumen, keinesfalls in Nebenwinkelräumen der gegebenen Tangenten liegen. Wenn zwei von den Involutionen Ordnungsstrahlen besitzen, so erzeugen dieselben schon alle vier Schnittpunkte $U_{1\,2\,3\,4}$, und die Verbindungsgeraden des dritten Involutionsscheitels mit diesen Punkten sind zugleich die Ordnungsstrahlen der dritten Involution. Wenn aber etwa nur eine der drei Involutionen Ordnungsstrahlen besitzt, so entstehen keine Schnittpunkte U, also auch keine Tangenten in den gegebenen Kurvenpunkten, folglich keine Kurven mit den gegebenen Bestimmungsstücken. — Hiernach wäre eine der Aufgabe 197 entsprechende Forderung ebenso wie dort zu erledigen durch Verlegung der beiden Punkte $P_1 P_2$ in zwei Nebenwinkelräume eines der gegebenen Tangentenpaare.

die gesuchte, $q_1 q_2$ in Figur 83 seien zwei von den gegebenen drei Kurventangenten, und die Punkte $(t_{1\,2} a_2)$ und $(b_{3\,4} a_1)$ die beiden gegebenen Kurvenpunkte, dann entsteht im Punkte S die Involution der Strahlenpaare $q_1 q_2 a_1 a_2$, und man weiß aus Satz 30b, daß der Schnittpunkt der Tangenten tb auf einem der beiden Ordnungsstrahlen $c_{1\,2}$ dieser Involution liegen muß. Sind aber nun $q_2 q_3$ in Figur 158 ein anderes Paar der drei gegebenen Kurventangenten, so entsteht in diesem neuen Tangentenschnittpunkt $(q_2 q_3)$ wieder eine solche Strahleninvolution mit Strahlenpaar $q_2 q_3$ und den beiden Verbindungsstrahlen nach den Kurvenpunkten, und derselbe Tangentenschnittpunkt $(a_1 b_1)$ muß auch in diesem zweiten Tangentenschnittpunkt dnrch seine Verbindungsgerade d einen der beiden Ordnungsstrahlen liefern. Ebenso könnte man den dritten Tangentenschnittpunkt $(q_3 q_1)$ verwenden, erhält wieder eine Involution mit Strahlenpaar $q_3 q_1$ und den Verbindungsgeraden nach den Kurvenpunkten $P_1 P_2$ und Ordnungsstrahlen e und e′, und derselbe Tangentenschnittpunkt $a_1 b_1$ muß auch hier auf einem der beiden Ordnungsstrahlen liegen.

2) Hiernach können aus den gegebenen Stücken $q_1 q_2 q_3$ nebst PP zunächst die drei Strahleninvolutionen und deren Ordnungsstrahlen konstruiert werden, und jeder Schnittpunkt solcher drei Ordnungsstrahlen kann als Schnittpunkt der Kurventangenten in den beiden gegebenen Kurvenpunkten verwandt werden, d. h. ein solcher Schnittpunkt liefert als Verbindungsgeraden mit $P_1 P_2$ die Kurventangenten in diesen beiden Punkten. Dadurch sind die gegebenen Elemente TTT, PP erweitert auf TTT (TP) (TP), also kann die Kurve nach Brianchon weiter konstruiert werden.

3) Man erhält in Figur 158 in jedem der drei Tangentenschnittpunkte $(q_1 q_2)$ $(q_2 q_3)$ $(q_3 q_1)$ zwei Ordnungsstrahlen, von denen aber je drei durch

einen Punkt gehen müssen. Folglich liefern die sechs Ordnungsstrahlen im ganzen vier verschiedene Tangentenpaare, und daher gibt es vier Kurven, welche den gegebenen Bedingungen der Aufgabe genügen. Die vier Lösungen sind aber nur möglich, wenn auch wirklich die drei Involutionen Ordnungsstrahlen besitzen. Werden aber die beiden Kurvenpunkte durch irgend zwei der gegebenen drei Tangenten getrennt, so gibt es keine Kurve mit den vorgeschriebenen Bestimmungsstücken.

Aufgabe 200. Man bilde aus der vorstehenden Aufgabe die entsprechenden für Parabel und Hyperbel.

Aufgabe 201. Eine Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind zwei Kurvenpunkte nebst Tangente in einem derselben und zwei weitere Tangenten.

Erkl. 523. Auch die vorstehende Aufgabe ist bereits in anderer Weise gelöst als Aufgabe 189. Und wie dieselbe dort aus Aufgabe 179 hervorging, so hier aus Aufgabe 199 durch Zusammenfassung einer Elementengruppe (PT). Danach können auch die Aufgaben 190 bis 194 auf diese abgeänderte Weise gelöst werden.

Auflösung. Betrachtet man die Kurve in Figur 83 als die gegebene, so muß wieder nach Satz 30b die Tangente $b_{3\,4}$ durch den Punkt laufen, in welchem einander die bekannte Tangente $t_{1\,2}$ und der Ordnungsstrahl $c_{1\,2}$ der im Punkte (q_1 q_2) erzeugten Strahleninvolution schneiden. Man konstruiert also diese beiden Ordnungsstrahlen und schneidet $t_{1\,2}$ entweder mit dem einen oder anderen. Es entstehen wieder zwei Lösungen.

Aufgabe 202. Es soll nachgewiesen werden, daß mit der letzten Aufgabengruppe von Aufgabe 174 bis 201 alle Beispiele einer durch fünf Kurvenelemente bestimmten Kurve erschöpft sind.

Erkl. 524. Auf Grund der Durchführung der nebenstehend aufgezählten Aufgaben erkennt man jetzt auch den Grund des Gegensatzes für die Kreiskonstruktionen aus drei Punkten oder drei Geraden, von denen die erste eine Lösung hat, während die letztere deren vier aufweist. Nach Erkl. 298 sind nämlich sämtliche Kreise der Ebene solche Kurven, welche durch dieselben beiden festen Punkte, d. h. die imaginären Ordnungspunkte auf der unendlich fernen Graden hindurchgehen. Eine Kreiskonstruktion aus drei Punkten bedeutet also eine Aufgabe PPPPP, und muß eine Lösung haben. Eine Kreiskon-

Auflösung. Wenn man von den Elementen P und T beliebige fünf zusammenstellt, so erhält man:

1) PPPPP — Diese Aufgabe ist schon im II. Teile nach Paskal gelöst mit einziger Lösung.
2) PPPP,T — Dies ist Aufgabe 174 bis 178 und hat zwei Lösungen. Und in der Zusammenfassung als PPP(PT) ist sie im II. Teile nach Paskal gelöst mit einziger Lösung.
3) PPP,TT — Dies ist Aufgabe 195 bis 197 und hat vier Lösungen. In der Zusammenfassung PP(PT)T erscheint dieselbe Elementengruppe in den Aufgaben 182 bis 188 und 198 mit zwei Lösungen, noch enger als P (PT) (PT) im II. Teile mit einziger Lösung nach Paskal.

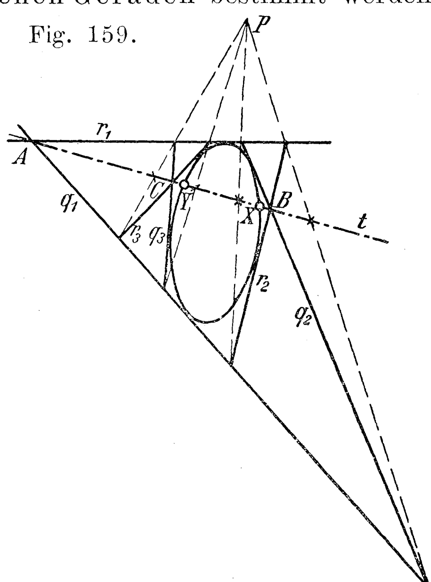
struktion aus drei Tangenten aber bedeutet TTT, PP, gehört also zu den Aufgaben des vierten Falles nebenstehender Aufzählung und hat wie dieser vier verschiedene Lösungen.

Erkl. 525. Es sei hier am Schlusse nochmals wie in Erkl. 517 darauf hingewiesen, daß auch in den nebenstehenden Aufgaben durch gegebenen Durchmesser ein, durch gegebenen Mittelpunkt oder Axe zwei Elemente ersetzt werden können, ebenso eines durch Pol und Polare oder zwei durch ein Polardreieck u. s. w.

4) TTT,PP — Dies ist Aufgabe 199 und 200 und hat vier Lösungen, in der Zusammenfassung TT(TP)P erscheint dieselbe Elementengruppe in der Aufg. 189 bis 194 und 201 mit zwei Lösungen, noch enger als T(TP)(TP) im II. Teile mit einziger Lösung nach Brianchon.
5) TTTT,P — Dies ist Aufgabe 179 bis 181 und hat zwei Lösungen, und in der Zusammenfassung als TTT(TP) ist sie im II. Teile nach Brianchon gelöst mit einziger Lösung.
6) TTTTT — Diese Aufgabe ist die ursprünglichste nach Brianchon zu lösende mit einziger Lösung.

Aufgabe 203. An einer durch fünf beliebige Elemente bestimmten Kurve sollen die Schnittpunkte mit einer beliebig gegebenen Geraden bestimmt werden.

Fig. 159.



Erkl. 526. Nach Satz 9 Seite 52 bilden die drei Nebenseiten eines vollständigen Tangentenvierseits bezw. die drei Nebenecken eines vollständigen Sehnenvierecks jedesmal ein Polardreieck. In einem Polardreieck UVW bezw. uvw ist aber (uv) = W der Pol

Auflösung. 1) Auf jeder beliebigen Geraden der Ebene bilden die in bezug auf die Kurve konjugierten Punkte eine Punktinvolution, und wenn die Gerade eine Kurvensekante ist, so sind ihre Kurvenschnittpunkte die Ordnungspunkte dieser Involution. Sei also t in Figur 159 die gegebene Gerade und A und B ihre Schnittpunkte mit zweien von den bekannten Tangenten q_1 und q_2. Dann kann man nach Brianchon in den beiden Punkten A und B jeweils die zweite Tangente r_1 und r_2 an die Kurve konstruieren und erhält dadurch ein der Kurve umgeschriebenes Vierseit $q_1 r_1 q_2 r_2$. Dessen Nebenseiten, wozu t gehört, bilden aber ein Polardreieck, schneiden also auf t zwei konjugierte Punkte aus.

2) Nimmt man zu $t q_1 r_1$ bezw. A einen anderen zweiten Punkt $t q_3 r_3$ bezw. C hinzu und konstruiert auch noch in C die zweite Tangente an die Kurve, so bildet man mit A und C ein zweites Tangentenvierseit, erhält also auf t ein zweites Paar konjugierter Punkte. Und aus den nun vorhandenen zwei Punktpaaren der Involution kon-

von UV = w, also geht v durch den Pol von w, bezw. liegt W auf der Polaren von v, und folglich sind v und w zwei Strahlen durch U, deren jeder durch den Pol des anderen geht, und V und W sind zwei Punkte auf u, deren jeder auf der Polaren des andern liegt. Demnach sind v und w zwei inbezug auf die Kurve konjugierte Strahlen des Punktes U, bezw. V und W sind zwei inbezug auf die Kurve konjugierte Punkte der Geraden u. Oder mit anderen Worten: V und W sind ein Punktpaar der auf u durch die Kurve erzeugten Punktinvolution, bezw. v und w sind ein Strahlenpaar der im Punkte U durch die Kurve erzeugten Strahleninvolution.

Erkl. 527. Ist die Kurve durch Überzahl von Tangenten bestimmt, so kann die Konstruktion nach Figur 159 sofort ausgeführt werden, ist die Gruppe der Bestimmungsstücke (TP) (TP) P, so bedarf es einer, heißt sie (TP) PPP, so bedarf es zweier, und für PPPPP bedarf es dreier Konstruktionen nach Paskal, um Figur 159 durchführen zu können. Dagegen ist es in letzteren drei Fällen einfacher, nach Aufgabe 206 und Figur 161 zu konstruieren, wenn man den Pol der Geraden t einmal gefunden hat. Die gegenseitige Überführung der Aufgaben 203 und 205 bildet die Bestätigung der in Erkl. 511 ausgesprochenen Beziehung, daß Kurvenschnittpunkte auf gegebener Sekante und Kurventangenten aus gegebenen Punkten einander dualistisch gegenüber stehen. Auch ist erstere Aufgabe hier verknüpft mit der Konstruktion des Poles zu t, letztere unten mit der Konstruktion der Polare zu S.

struiert man die gesuchten Kurvenschnittpunkte auf t als die Ordnungspunkte.

3) Man hat im ganzen drei Konstruktionen nach Brianchon gebraucht, also ist die Aufgabe am einfachsten zu lösen, wenn die Kurve bestimmt ist durch TTTTT oder TTT (TP) oder T (TP) (TP). Sind aber unter den gegebenen Stücken die Kurvenpunkte in Überzahl, so kann man mittels Konstruktion nach Paskal erst bis zur Anzahl von drei Tangenten vorher konstruieren und dann die Aufgabe ebenso lösen.

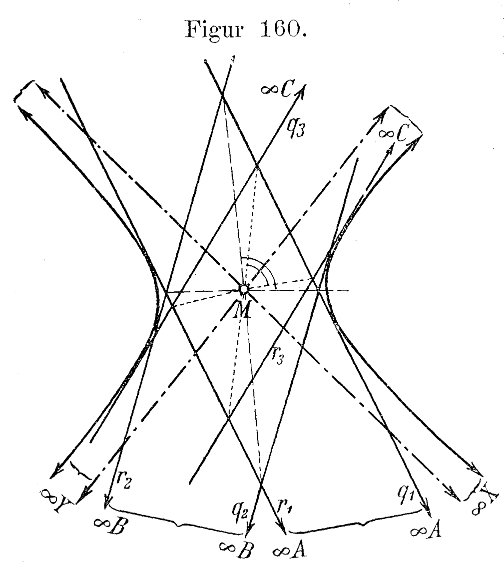
4) Wollte man die Auflösung der unten folgenden Aufgabe 206 als bekannt voraussetzen, so kann man aus dem ersten Abschnitt der vorstehenden Auflösung die Konstruktion des Poles P zur gegebenen Sekante t mittels des einzigen Tangentenvierseits aus A und B entnehmen und sodann nach Aufgabe 206 die Tangenten aus Punkt P an die Kurve konstruieren. Deren Schnittpunkte mit t sind die gesuchten Kurvenschnittpunkte von t.

Erkl. 528. Findet sich bei der Konstruktion, daß die Punktinvolution auf t keinen Ordnungspunkt hat, indem die Punktpaare beider Polardreiecke einander trennen, so geht daraus hervor, daß die Sekante t mit der Kurve keinen Schnittpunkt hat, daß sie also außerhalb der Kurve verläuft. Fällt die im Punkte A zu konstruierende Tangente r_1 mit der Sekante t zusammen, so erkennt man, daß t selber Kurventangente ist, und dann braucht bloß mittels der vorhandenen Tangenten nach Brianchon der Berührungspunkt gesucht werden. Die Punktinvolution müßte in diesem Falle eine parabolische werden, indem der Berührungspunkt als einziger Ordnungspunkt und Mittelpunkt der Reihe auftritt.

Aufgabe 204. Von einer durch fünf beliebige Elemente bestimmten Hyperbel die Asymptoten zu finden.

Auflösung. Die Aufgabe ist genau dieselbe, wie die vorhergehende Aufgabe 203, indem man als Se-

Figur 160.



kante die unendlich ferne Gerade wählt und genau Figur 159 nachbildet: Es liegt also Punkt A unendlich fern. und es wird $r_1 // q_1$ nach Brianchon konstruiert als Tangente durch den unendlich fernen Punkt A der gegebenen Tangente q_1; ebenso entsteht $r_2 // q_2$. Diese beiden Paare von Paralleltangenten bilden also ein Tangentenparallelogramm der Hyperbel, und in einem solchen muß der Diagonalenschnittpunkt der Kurvenmittelpunkt, die Diagonalen ein Paar konjugierter Durchmesser sein. Ein zweites Paar konjugierter Durchmesser wird geliefert durch das auf gleiche Weise aus $q_1 r_1$ und $q_3 r_3$ gebildete Tangentenparallelogramm; und die Ordnungsstrahlen der von beiden konjugierten Durchmesserpaaren bestimmten Strahleninvolution schneiden auf der unendlich fernen Geraden die Kurvenschnittpunkte $_\infty X$ und $_\infty Y$ aus. Zugleich sind aber diese Ordnungsstrahlen selber die gesuchten Asymptoten der Hyperbel.

Erkl. 529. Die vorstehende Aufgabe kann auch so geformt werden, daß von einer durch fünf beliebige Elemente bestimmten Kurve entschieden werden soll, ob sie Ellipse oder Hyperbel oder Parabel ist. Denn wenn die unendlich ferne Gerade als Sekante t in Figur 159 verwendet wird, so wird diese Entscheidung geliefert durch die Art der auf t entstehenden Involution. Hat die letztere keine Ordnungspunkte, so ist die Kurve unbedingt eine Ellipse, hat sie einen ausgezeichneten Punkt, so ist die Kurve Parabel, hat sie zwei Ordnungspunkte, so ist die Kurve eine Hyperbel. Von eben diesen drei Fällen ist ja überhaupt die Benennung jeder beliebigen Involution als elliptische oder parabolische oder hyperbolische hergeleitet.

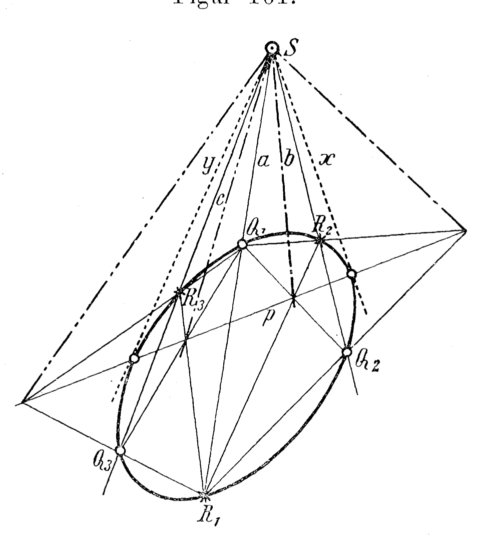
Erkl. 530. Auch diese Konstruktion ist einfacher durchzuführen, wenn die Ueberzahl der gegebenen Elemente Tangenten sind. Da aber die Punkte der unendlich fernen Geraden nur durch Richtungen angegeben werden können, so steht doch eigentlich die Strahleninvolution im Punkte M zur Behandlung, so daß diese Aufgabe eine Verknüpfung mit der folgenden Aufgabe 205 darstellt.

Aufgabe 205. Von einer durch vier Punkte bestimmten Parabel die Axenrichtung zu bestimmen.

Aufgabe 206. An eine durch fünf beliebige Elemente bestimmte Kurve sollen die Tangenten aus einem beliebig gegebenen Punkte bestimmt werden.

Auflösung. 1) In jedem beliebigen Punkte der Ebene bilden die inbezug auf die Kurve konjugierten Geraden eine Involution, und

Figur 161.



Erkl. 531. Die vorstehende Aufgabe wurde bereits gestellt und gelöst in Aufgabe 86 dieser Sammlung. Dort war aber zu ihrer Lösung vorausgesetzt, daß die Kurve kontinuierlich gezeichnet vorliege, wenigstens in der Gegend, wo die Polare des Punktes S mit der Kurve zum Schnitt zu bringen ist. Die Aufgabe wird also dort eigentlich auf Aufgabe 203 zurückgeführt, ähnlich wie im vierten Abschnitt nebenstehender Auflösung, aber die Lösung zu 203 wird dort als gegeben angesehen durch Schnitt mit dem vorhandenen Kurvenbogen. Strenggenommen ist aber die jetzige Lösung auch nicht allzuweit davon verschieden. Denn an Stelle der Voraussetzung des kontinuierlichen Kurvenbogens tritt jetzt die Konstruktion der Ordnungselemente der Involution — sei es der Punktinvolution auf t oder der Strahleninvolution in S. Dazu bedarf es aber wieder einer kontinuierlichen Kurve, nämlich desjenigen Kreises, der zur Auffindung der Ordnungselemente unentbehrlich ist. Nur insofern bedeutet also die neue Lösung eine Vereinfachung bezw. Herabminderung des Maßes der Schwierigkeiten, als der Kreis eine durch Zirkel leicht kontinuierlich herstellbare Kurve ist, während dies von der allgemeinen Kurve zweiten Grades nicht gilt. Aber eine Aufgabe

wenn der Punkt ein äußerer Punkt ist, so sind seine Kurventangenten die Ordnungsstrahlen dieser Involution. Es sei also in Figur 161 S der gegebene Punkt und a und b seine Verbindungsgeraden mit zweien von den bekannten Kurvenpunkten $Q_1 Q_2$. Dann kann man nach Paskal auf den beiden Geraden a und b jeweils den zweiten Kurvenschnittpunkt R_1 und R_2 konstruieren und erhält dadurch ein der Kurve eingeschriebenes Viereck $Q_1 R_1 Q_2 R_2$. Dessen Nebenecken, wozu S gehört, bilden aber ein Polardreieck, liefern also in S zwei konjugierte Geraden.

2) Nimmt man zu $S Q_1 R_1$ bezw. a eine andere zweite Gerade $S Q_3 R_3$ bezw. c hinzu und konstruiert auch noch auf c den zweiten Kurvenschnittpunkt, so bildet man aus a und c ein zweites Sehnenviereck, erhält also in S ein zweites Paar konjugierter Geraden. Und aus den nun vorhandenen zwei Geradenpaaren der Involution konstruiert man die gesuchten Kurventangenten aus S als die Ordnungsstrahlen.

3) Man hat im ganzen drei Konstruktionen nach Paskal gebraucht, also ist die Aufgabe am einfachsten zu lösen, wenn die Kurve bestimmt ist durch PPPPP oder PPP(PT) oder P(PT)(PT). Sind aber unter den gegebenen Stücken die Kurventangenten in Ueberzahl, so kann man mittels Konstruktion nach Brianchon erst bis zur Anzahl von drei Kurvenpunkten vorher konstruieren und dann die Aufgabe ebenso lösen.

4) Will man die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe 203 als bekannt voraussetzen, so kann man aus dem ersten Abschnitt der hier stehenden Auflösung die Konstruktion der Polaren p zum gegebenen

zweiten Grades ist und bleibt diese Aufgabe und bedarf wie alle Aufgaben zweiten Grades einer Kurve, wenn auch nur der Kreislinie und nur im gemeinsamen Gewande der Aufsuchung der Ordnungselemente einer Involution.

Punkte S mittels eines einzigen Sehnenvierecks aus a und b entnehmen und sodann nach Aufgabe 203 die Kurvenschnittpunkte auf p konstruieren. Deren Verbindungsgeraden mit S sind die gesuchten Tangenten aus S.

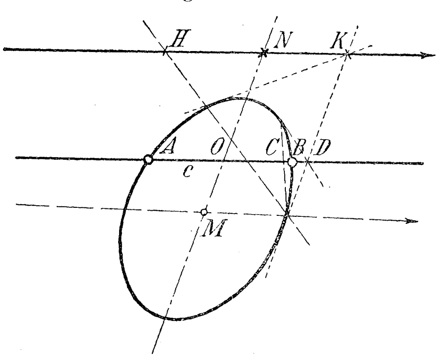
Erkl. 532. Die andere Art von Vereinfachung der Aufgaben zweiten Grades besteht darin, daß man durch verschiedene Projektionen stets denselben Kreis oder dieselbe Kurve zur Auffindung der Ordnungselemente benützt. In diesem Falle ist zur Voraussetzung aller Konstruktionen das Vorhandensein einer einzigen kontinuierlich gezeichneten Kurve gemacht, und diese kann dann eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel oder auch wieder ein Kreis sein. Sie wird als Maßkurve bezeichnet, und auf Schnitte beliebiger Sekanten mit ihrer Peripherie werden alle Aufgaben zweiten Grades zurückgeführt. — Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Ausführungen der Erkl. 527 und 528 in übertragener Ausdrucksweise auch hier wieder Geltung haben.

II. Aufgaben über die involutorisch-metrischen, besonders die Brennpunktseigenschaften der Kurven.

(Zu Abschnitt 3 e.)

Aufgabe 207. Auf einer beliebig gegebenen Geraden sollen Mittelpunkt, Ordnungspunkte und Potenzwert der zu einer gegebenen Kurve zugehörigen Punktinvolution bestimmt werden.

Figur 162.



Erkl. 533. Ist die Länge der Sekante AB in Figur 162 gleich 2c, also AO = OB = c, so ist für irgend zwei konjugierte Punkte derselben OD · OC =

Auflösung. 1) Ist die gegebene Gerade eine Kurvensekante, so ist die Involution eine hyperbolische mit zwei Ordnungspunkten, nämlich den Kurvenschnittpunkten der Sekante. Daher ist in diesem Falle (Figur 162) der Mittelpunkt O der Sehnenstrecke zugleich der Mittelpunkt der Involution, das Quadrat der Halbsehne c gleich dem Potenzwert.

2) Ist die gegebene Gerade eine Tangente, so ist die Involution eine parabolische mit dem Berührungspunkt als einzig ausgezeichnetem Punkt und mit Potenzwert Null.

3) Ist aber die Gerade eine die Kurve nicht treffende, so ist die Involution eine elliptische ohne Ordnungspunkte und mit negativem Potenzwerte. Der Mittelpunkt

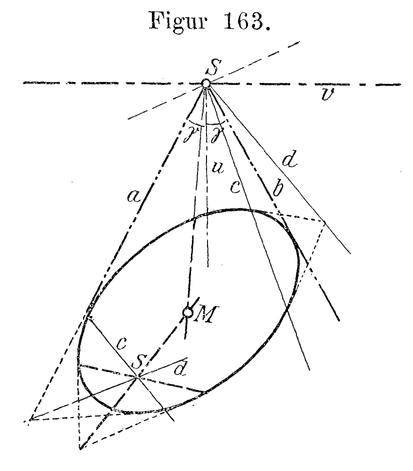
$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 = c^2$. Und von den zwei Punkten CD ist immer der eine ein Punkt innerhalb der Kurve, der andere ein Punkt außerhalb der Kurve. Der konjugierte Punkt zu D ist in Figur 162 gefunden mittels der beiden Tangenten von D an die Kurve als Schnittpunkt von AB mit der Berührungssehne zum Punkte D, auch sind je zwei zu den Ordnungspunkten A und B harmonisch liegende Punkte auf AB zwei zugeordnete Punkte der Involution.

Erkl. 534. Von zwei konjugierten Punkten liegt jeder auf der Polaren des anderen. Die Polare des unendlich fernen Punktes von HNK ist aber der zur Richtung HNK konjugierte Durchmesser MON, folglich ist dessen Schnittpunkt N mit der Geraden HNK der konjugierte zum unendlich fernen Punkt, also der Mittelpunkt der Involution. Um zum Punkt K den konjugierten zu erhalten, zieht man von K die Tangenten an die Kurve und bringt deren Berührungssehne zum Schnitt mit NK. Trifft es sich, daß H und K beiderseits gleich weit von N abstehen, so sind dieselben die Potenzpunkte. Und wie für AB der konstante reelle Wurzelwert $\sqrt{\overline{OC}\cdot\overline{OD}}$ als reelle Halbsehne auf der Geraden gilt, so wird der imaginäre Wurzelwert $\sqrt{\overline{NH}\cdot\overline{NK}}$ als imaginäre Halbsehne auf NK angesehen, nämlich als Abstand vom Involutionsmittelpunkt nach den beiden imaginären Ordnungspunkten der elliptischen Involution, zu welchen je zwei zugeordnete Punkte harmonisch liegen müßten. Der Potenzwert ist das negative Quadrat $-\overline{NP}^2$.

der Involution als entsprechender konjugierter zum unendlich fernen entsteht als Schnittpunkt der Geraden mit dem zu ihrer Richtung konjugierten Durchmesser MN in Figur 162. Für irgend zwei konjugierte Punkte K und H der Sekante ist also $NK \cdot NH$ ein negatives Produkt wegen der entgegengesetzten Richtung seiner beiden Strecken, und der absolute Wert $\sqrt{\overline{NK}\cdot\overline{NH}}$ gibt diejenige Strecke an, um welche die Potenzpunkte der Involution beiderseits von N entfernt liegen.

Aufgabe 208. In einem beliebig gegebenen Punkte sollen Ordnungsstrahlen und Axenstrahlen der zu einer gegebenen Kurve zugehörigen Strahleninvolution bestimmt werden.

Figur 163.



Auflösung. 1) Ist der gegebene Punkt ein Punkt außerhalb der Kurve, so ist die Involution eine hyperbolische mit zwei Ordnungsstrahlen, nämlich den Kurventangenten des Scheitelpunktes. Daher sind in diesem Falle (Figur 163) die Halbierungsgeraden des Tangentenwinkels zugleich die Axenstrahlen u, v der Involution.

2) Ist der gegebene Punkt ein Kurvenpunkt, so ist die Involution eine parabolische mit der Tangente als einzig ausgezeichnetem Strahle.

3) Ist der gegebene Punkt ein Punkt innerhalb der Kurve, so ist die Involution eine elliptische

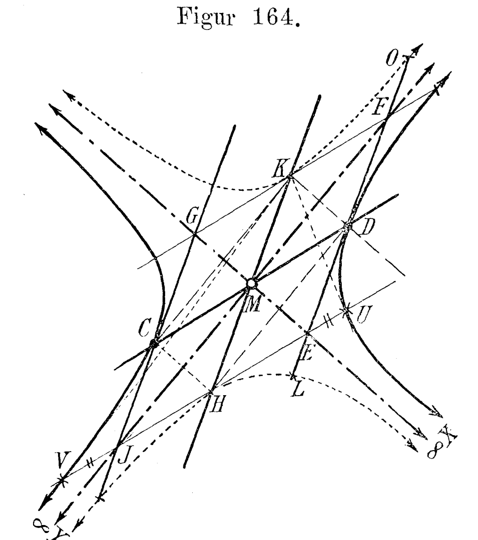
Erkl. 535. Wird der Winkel der Tangenten a und b mit 2γ bezeichnet, also $(u\,a) = (u\,b) = \gamma$, so ist der Potenzwert der Strahleninvolution $tg^2\gamma$. Und für obige zwei konjugierten Strahlen c, d ist $tg(u\,c) \cdot tg(u\,d) = tg^2\gamma$ bezw. $tg(v\,c)\,tg(v\,d) = tg^2(v\,b) = tg^2(v\,a) = ctg^2\gamma$. Und von den zwei konjugierten Strahlen c, d ist immer der eine ein schneidender, der andere ein nicht schneidender; und beide, wie jedes konjugierte Strahlenpaar, liegen harmonisch zu den beiden Ordnungsstrahlen a und b.

ohne Ordnungsstrahlen. Konstruiert man zwei Paare zugeordneter Strahlen, so kann man nach Aufgabe 149 die Axenstrahlen konstruieren. Unter den Strahlen des Punktes S befindet sich in beiden Fällen der Figur 163 jedenfalls der durch ihn gehende Kurvendurchmesser, und dessen konjugierter Strahl ist parallel zum konjugierten Durchmesser, seine reelle oder imaginäre Sehne wird also im Scheitelpunkte S halbiert.

Erkl. 536. Um zu einem beliebigen schneidenden Strahle c des gegebenen Scheitels den konjugierten zu finden, zieht man die Tangenten in seinen Kurvenschnittpunkten und verbindet den Scheitel mit dem Tangentenschnittpunkt. Für den Kurvendurchmesser sind diese Tangenten parallel, also wird die Verbindungsgerade des Scheitels nach ihrem Schnittpunkt eine Parallelsehne, und diese muß vom konjugierten Durchmesser halbiert werden.

Aufgabe 209. Die beiden vorigen Aufgaben für Kurvendurchmesser und Kurvenmittelpunkt zu lösen.

Figur 164.



Erkl. 537. In Figur 164 ist auf dem Hyperbeldurchmesser KMH der Punkt K Ausgangspunkt der Tangenten KU und KV, und H als Schnittpunkt der

Auflösung. 1) Auf jedem schneidenden Kurvendurchmesser entsteht eine reelle Sehnenstrecke 2c, also ein positiver Potenzwert $+c^2 = \overline{MC}^2 = \overline{MD}^2$ in Figur 164, für die Hauptaxe $+a^2$. Auf jedem nicht schneidenden Hyperbeldurchmesser entsteht eine imaginäre Sehnenstrecke, ein negativer Potenzwert $-d^2$, wobei wie in Aufgabe 208 wieder $d^2 = MK \cdot MH$ zu setzen ist, und zugeordnete Punkte K und H ganz wie in Figur 162 zu erzeugen sind. Geschieht dasselbe auf der Nebenaxe der Hyperbel, so entsteht eine Strecke b, für welche ebenso $-b^2 = MK \cdot MH$. Und man nennt $\sqrt{-b^2}$ die imaginäre Länge der Nebenaxe, $-b^2$ das Quadrat der Nebenaxe, während bei der Ellipse $+b^2$ entsteht.

2) Um den Abstand der Potenzpunkte vom Mittelpunkt auf einem nicht schneidenden Hyperbeldurchmesser wirklich zu finden, bringt man die Paralleltangenten des betrachteten Durchmessers HMK

Berührungssehne UV mit dem Durchmesser MH ist der konjugierte Punkt zu K. Also $-d^2 = MH \cdot MK$. Da hierin H durch die Parallelogrammseite geliefert wird, so muß die Erzeugung durch die Tangenten den gleichen Punkt liefern, also müssen die Tangenten von K an die Kurve in den von EHJ ausgeschnittenen Punkten U und V berühren, wie auch nach Satz 23 EN = JV. Ebenso müssen die Tangenten von H an die Kurve in den Schnittpunkten von FG berühren und dort ebenfalls die gleichen Abschnitte ausschneiden.

Erkl. 538. Es gibt an der Hyperbel viele Parallelogramme der Art wie EFGJ in Figur 164, nämlich je eines zu jedem Paar konjugierter Durchmesser. Und jedesmal ist $MK = \frac{1}{2} \cdot EF$ die Länge der imaginären Sehne auf dem nicht schneidenden Durchmesser. Da nun von allen Strecken EF im Asymptotenwinkel diejenige die kürzeste ist, welche auf der W nkelhalbierenden senkrecht steht, so liefert die Scheiteltangente die kürzeste aller Strecken MK für die Nebenaxe. Man nennt daher den Abschnitt der Scheiteltangente zwischen Axe und Asymptote auch die halbe Länge der Nebenaxe und bezeichnet sie mit dem Buchstaben b. Bei der Ellipse ist also a die große Halbaxe, b die Länge der kürzeren Halbaxe, welche zugleich die Hälfte des kürzesten aller Ellipsendurchmesser ist; bei der Hyperbel ist a die halbe Hauptaxe und b die halbe Länge des kürzesten aller vorkommenden nicht schneidenden Durchmesser. Dabei ist aber $a = b$ für Asymptotenwinkel von 90^0, und $a \gtrless b$ für Asymptotenwinkel unter oder über 90. Dagegen sind bei der Ellipse a^2 und b^2 beide positiv, bei der Hyperbel a^2 positiv, b^2 negativ zu nehmen.

Erkl. 539. Eine ähnliche Figur wie Figur 164 diente bereits als Figur 131 des zweiten Teils zur Anwendung des Satzes von Brianchon auf die Hyperbel und lieferte die Inhaltsgleichheit der Dreiecke EMF = GMJ für zwei bezum Schnitt mit den Asymptoten. Dadurch entsteht das Tangentenparallelogramm EFGJ in Figur 164, dessen Mittelparallelen die konjugierten Durchmesser CD und HK sind, und in welchem die mit den Asymptoten zusammenfallenden Diagonalen parallel sein müssen mit den Verbindungsgeraden der Seitenmittelpunkte DK//CH. Nun ist KDX die Polare zum Punkt E, weil DK die Berührungssehne der von E an die Kurve gezogenen Tangenten ED und EX darstellt. Ebenso ist KCY die Polare zum Punkt J, weil C und Y die Berührungspunkte der von J an die Kurve gezogenen Tangenten sind. Demnach ist der Schnittpunkt K der beiden Polaren der Pol zur Verbindungsgeraden EJ der beiden Polpunkte, und folglich sind K und H als Schnittpunkte der Parallelogrammseiten beiderseits gleichweit von M entfernt, d. h. diese Punkte H und K sind selber die Potenzpunkte der Involution auf dem Durchmesser MK. Da nun MK = MH auch = DE = DF ist, so kann man aussprechen:

Satz. Der Abstand der Potenzpunkte oder die Länge der imaginären Sehne auf einem nicht schneidenden Hyperbeldurchmesser ist gleich der auf einer Paralleltangente dieses Durchmessers durch die Asymptoten ausgeschnittenen Strecke, für die Nebenaxe der Hyperbel also gleich dem Abschnitt auf der Scheiteltangente.

3) Die Strahleninvolution im Kurvenmittelpunkt ist bei der Hyperbel eine hyperbolische und hat die Asymptoten zu Ordnungsstrahlen, die Kurvenaxen als Axenstrahlen. Bei der Ellipse ist die Strahleninvolution des Mittelpunktes eine elliptische ohne Ordnungsstrahlen bezw. mit imaginären Ordnungsstrahlen, und als Axen-

liebige Tangenten EF und GJ. Bei jener allgemeinen Figur sind dann die zwei anderen Dreiecke EMJ und FMG weder einander, noch den beiden erstgenannten gleichgroß. In Figur 164 aber sind alle vier Teildreiecke des Parallelogramms gleichgroß. Faßt man also die Scheiteldreiecke EMJ = GMF einzeln zusammen, so erkennt man, daß von den Parallelseiten EJ und FG dieser besonderen Parallelogramme stets im Nebenwinkel der Asymptoten Dreiecke abgeschnitten werden, welche gleichen Inhalt haben mit einander und mit den beliebigen Dreiecken EMF der ersten Hyperbel. Demnach sind diese Parallelogrammseiten der Art wie EJ und FG die Tangenten einer zweiten Hyperbel, welche gleiche Asymptoten hat wie die erste und gleiches Produkt der durch beliebige Tangenten gebildeten Asymptotenabschnitte. Es ist die konjugierte Hyperbel (Figur 115 bei Aufgabe 261 des II. Teiles). Für diese konjugierte Hyperbel sind wieder HK und CD konjugierte Durchmesser, aber CM = DM der nicht schneidende, und EF als Polare von C entsteht entweder als Parallelogrammseite der durch die Paralleltangenten EHJ//GKF//CMD auf den Asymptoten ausgeschnittenen vier Eckpunkte oder als Berührungssehne der von C an die konjugierte Hyperbel gezogenen Tangenten CL und CO mit Abschnitten EL = FO nach Satz 22.

strahlen hat dieselbe ebenfalls die Kurvenaxen. Aus Figur 35 erkennt man, daß es bei der Ellipse zu jedem Paar konjugierter Durchmesser ein zweites gibt, das mit dem ersten harmonisch liegt. Und Figur 164 zeigt, daß die Längenstrecken zweier konjugierten Durchmesser der Hyperbel stets die Mittelparallelen eines Parallelogramms bilden, welches die Asymptoten zu Diagonalen hat.

Erkl. 540. Es könnten noch dieselben Aufgaben 207 und 209 für die auf der unendlich fernen Geraden durch jede Kurve gebildete Punktinvolution gestellt werden. Da aber hier jeder Punkt unendlich fern und jede Länge unendlich groß ist, so fällt der Begriff des Mittelpunktes als eines zugeordneten zum unendlich fernen Punkte ganz weg, und ebenso der Begriff der unendlich groß werdenden Potenz. Dagegen liefern die Kurvenaxen diejenigen zwei zugeordneten Punkte, welche in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen, und die Asymptoten der Hyperbel liefern die Ordnungspunkte der hyperbolischen Involution, deren Richtungen durch die Richtungen nach den Axenschnittpunkten halbiert werden.

Aufgabe 210. Man soll an einer durch fünf beliebige Elemente bestimmten Kurve die Axen finden.

Andeutung. Man verfährt auf Grund der vorigen Aufgabe 209.

Aufgabe 211. Man soll an einer durch fünf beliebige Elemente bestimmten Hyperbel die Asymptoten finden.

Aufgabe 212. Von einer beliebig gegebenen Ellipse oder Hyperbel oder Parabel die Brennpunkte zu suchen.

Auflösung. 1) Man zeichnet die beiden Axen AB und CD der Ellipse und zeichnet um den

Erkl. 541. Für die erste Konstruktion vergleiche man Figur 94 und Erkl. 317. Die zweite ergibt sich aus dem Satze in voriger Auflösung der Aufgabe 209 zusammen mit der in Erkl. 317 aufgestellten Beziehung für die Hyperbel $e^2 = a^2 + b^2$. Für die Hyperbel, von welcher etwa der eine Ast nebst Brennpunkt gegeben wäre, liefert die gleiche Konstruktion den zweiten Brennpunkt, welche nebenstehend für die Parabel angewandt ist: Man zeichnet in einem beliebigen Kurvenpunkt Brennstrahl und Tangente und trägt denselben Winkel an derselben Tangente auf der entgegengesetzten Seite nochmals an (vergl. Figur 95).

Erkl. 542. Für die Parabel lassen sich noch drei andere Konstruktionen angeben: 1) Den Scheitel wählt man als Spitze eines Dreiecks, das eine beliebige Kathete auf der Axe nach innen, und in deren Endpunkt eine dazu senkrechte von doppelter Länge hat. Die Hypotenuse trifft die Kurve stets in dem Punkte, dessen Lot auf die Axe den Brennpunkt liefert. 2) Man konstruiert zwei beliebige zu einander senkrechte Tangenten. Das Lot aus ihrem Schnittpunkt auf die Axe ist die Leitgerade und trifft die Axe in einem Punkt, der vom Scheitel nach außen ebenso weit entfernt ist wie der Brennpunkt nach innen (vergl. Fig. 102 und Antw. 1 der Frage 80). 3) Eine beliebige Parabeltangente bringt man zum Schnitt mit der Scheiteltangente. Das Lot im Schnittpunkt auf der beliebigen Tangente trifft die Axe im Brennpunkt (vgl. Erkl. 550)

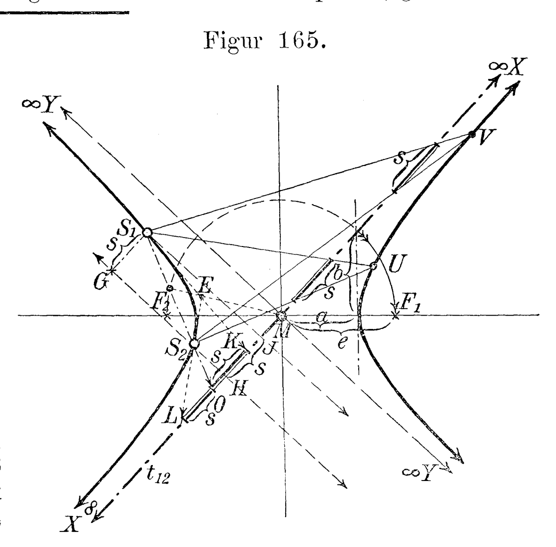
Scheitel C der kleinen Halbaxe b einen Kreisbogen mit einem Radius gleich der großen Halbaxe $a = MA$; dieser schneidet die große Axe AB in den beiden Brennpunkten F_1 und F_2, denn $F_1C + F_2C = 2a = AB$.

2) Bei der Hyperbel zeichnet man die Asymptoten und die Scheiteltangente und zeichnet um den Mittelpunkt M einen Kreisbogen mit Radius gleich der Strecke e vom Mittelpunkte bis zum Schnittpunkt C der Asymptote und Scheiteltangente BC. Dieser Kreisbogen schneidet die Hauptaxe beiderseits im Brennpunkt F; denn bei der Hyperbel ist $MF = e = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3) Bei der Parabel ergibt sich die einfache Konstruktion aus Figur 96 bezw. 102. Man zieht eine beliebige Tangente sowie im Berührungspunkt den Durchmesser, und trägt den Winkel dieser beiden Geraden im Berührungspunkt an der Tangente in entgegengesetzter Richtung nochmals an. Der neue Winkelschenkel trifft die Axe im Brennpunkt F.

Aufgabe 213. Auf einer gegebenen Geraden gleitet eine Strecke von beliebiger gleichbleibender Größe. Ihre Endpunkte werden stets verbunden mit zwei Scheitelpunkten $S_1 S_2$. Man bestimme die durch die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden durchlaufene Kurve und suche deren Axen und Brennpunkte.

Figur 165.



Erkl. 543. Um zu finden, in welcher Lage die Strecke s zwei parallele Projektionsstrahlen aus S_1 und S_2 erzeugt, konstruiert man das Trapez $S_1 S_2 HJ$. Zu dem Zweck legt man durch S_1 die Strecke

$S_1 G // t$ und gleich s. Dann sind $S_2 G H$ und $S_1 J // S_2 G$ die Parallelseiten des Trapezes, also $HJ = S_1 G = s$ die andere Seite, und $S_1 J // S_2 H$ liefern die zweite Asymptotenrichtung. — Die Tangenten in S_1 und S_2 sind die zugeordneten Strahlen beider Büschel zum Verbindungsstrahl $S_1 S_2$. Man bringt also $S_1 S_2$ mit t zum Schnitt und trägt vom Schnittpunkt nach beiden Seiten die Strecke s an. Dann sind die neuen Verbindungsstrahlen mit S_2 und S_1 die Tangenten an die Kurve. Ihr Schnittpunkt E liefert durch seine Verbindungsgerade mit dem Mittelpunkte der Sehne $S_1 S_2$ nach dem Satze in Aufgabe 85 den Kurvenmittelpunkt auf der Asymptote t, also auch die in gefundener Richtung laufende zweite Asymptote und dadurch die Axen und die Brennpunkte.

Erkl. 544. Die vorliegende Aufgabe liefert den bemerkenswerten Satz für jede Hyperbel:

Satz. Bei der Erzeugung einer Hyperbel durch zwei projektivische Strahlenbüschel hat die von je zwei beliebigen zugeordneten Strahlen auf einer Asymptote ausgeschnittene Strecke stets eine konstante Länge. — Denn die Büschel sind projektivisch, also sind auch die auf der Asymptote vereinigt liegenden Punktreihen projektivisch; sie haben aber einen einzigen im unendlichen liegenden Doppelpunkt, folglich sind sie zwei kongruente Punktreihen mit konstanter Strecke zwischen zwei zugeordneten Punkten (vergl. die Erörterungen in Aufgabe 106 des I. Teils). Hiernach ist an Figur 165 auch auf der zweiten Asymptote MY die Strecke zwischen den Schnittpunkten mit $S_1 U$ und $S_2 U$ oder $S_1 V$ und $S_2 V$ oder $S_1 X$ und $S_2 X$ von konstanter Länge.

Erkl. 545. In Figur 165 haben die Projektionsstrahlen aller Hyperbelpunkte des rechtsseitigen Astes XVUY ihren Schnittpunkt rechts von t, ihre Asymptotenstrecke oberhalb HJ. Für alle Hyperbelpunkte zwischen Y und S_1 liegt

Auflösung. 1) Bezeichnet man die gegebene Gerade mit $t_1 t_2$, so durchlaufen die beiden Endpunkte der konstanten Strecke zwei kongruente Punktreihen, also ist jedenfalls $t_1 \overline{\wedge} t_2$. Nun sind diese Endpunkte projiziert aus S_1 und S_2, also ist auch $S_1 \overline{\wedge} S_2$, und die Schnittpunkte entsprechender Strahlen erzeugen eine Kurve zweiter Ordnung.

2) Wenn die konstante Strecke bis ins unendliche fortgeschoben ist, so entsteht ein erstes Paar von zugeordneten Parallelstrahlen in paralleler Richtung zur gegebenen Geraden. Wenn die Strecke solche Lage auf t hat, daß sie mit der Strecke $S_1 S_2$ die nichtparallelen Gegenseiten eines Trapezes bildet, so entsteht ein zweites Paar zugeordneter Parallelstrahlen. Also ist die Kurve eine Hyperbel, von welcher die beiden Asymptotenrichtungen gefunden sind.

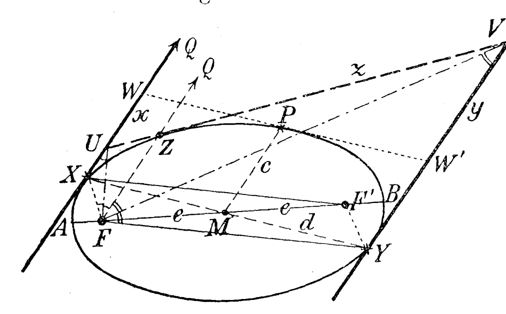
3) Die gegebene Gerade ist aber selber Asymptote, denn wäre sie nur zu einer Asymptote parallel, so müßte auf ihr ein Kurvenpunkt im endlichen liegen, und die Projektionsstrahlen würden auf ihrem Schnittpunkt die Strecke Null ausschneiden statt der konstanten Strecke. Auf dieser Asymptote findet man nun den Kurvenmittelpunkt mittels der Sekante aus dem Schnittpunkt der Tangenten in $S_1 S_2$ nach dem Mittelpunkte der Berührungssehne $S_1 S_2$. Durch den Mittelpunkt geht dann die zweite Asymptote parallel der gefundenen zweiten Richtung.

4) Die Kurvenaxen endlich sind die Halbierungsgeraden des Asymptotenwinkels, und die Scheiteltangente schneidet auf der Asymptote das Stück e ab, welches den Abstand von M zum Brennpunkte liefert.

diese Strecke zwischen JH und KO, der Schnittpunkt links außerhalb der Geraden $S_1 S_2$, für Hyperbelpunkte zwischen S_1 und S_2 liegt die Strecke zwischen KO und OL, der Schnittpunkt rechts der Geraden $S_1 S_2$, für Hyperbelpunkte zwischen S_2 und X liegt die Strecke unterhalb OL, der Schnittpunkt wieder links von $S_1 S_2$, aber mit verschränkter Verbindung nach den Endpunkten der Strecke s. Man hat also wohl zu unterscheiden für die Lage der Verbindungsgeraden von S_1 und S_2, sowohl wenn $S_1 S_2$ auf gleichem, als auch ebenso, wenn $S_1 S_2$ auf getrennten Aesten der Kurve liegen.

Aufgabe 214. Man soll aus den Sätzen 34 weitere Maßeigenschaften der Kurven ableiten.

Figur 166.



Erkl. 546. Der hierneben verwandte Satz ist ein Ergebnis des Satzes über projektivische Punktreihen, daß die Produkte der Abstände zweier zugeordneten Punkte vom Fluchtpunkte ihrer Reihe konstant sind. Nun ist bei schneidenden Trägern der Berührungspunkt der Kurve zugeordnet zum Trägerschnittpunkt; bei parallelen Trägern rückt aber der Schnittpunkt unendlich fern, also wird der Berührungspunkt zum Fluchtpunkte. — Denselben Satz nebst anderen Ergebnissen kann man auch geometrisch ableiten durch Anwendung des Satzes 36 und der Winkelbeziehungen an Figur 98. Zieht man nämlich in Figur 166 und 167 zu der beliebig gedachten Tangente UV auch noch die Paralleltangente, so erhält man ein Tangentenparallelogramm, und darin bilden die Verbindungsstrahlen jedes Brennpunktes F mit den Eckpunkten UV.. und den Berührungspunkten XYZ. je acht Strahlen mit je vier Paar gleichen Winkeln am Brennpunkt F und an den Parallelogrammseiten. Dadurch entstehen ganze Gruppen ähnlicher Dreiecke, und

Auflösung. 1) Läßt man die beiden Tangenten x und y in Figur 98 zu Paralleltangenten werden, so werden in Figur 166 und 167 die Punktreihen der Punkte U und V auf x und y ebenfalls projektivisch, die Berührungspunkte X und Y werden ihre Fluchtpunkte, folglich muß nach dem Satze in Erkl. 377 des II. Teils das Produkt $XU \cdot YV$ einen konstanten Wert haben für jede Tangente, also auch für die zum Durchmesser XY der Paralleltangenten parallele Tangente in P. Diese erzeugt aber zwei gleich große Abschnitte $XW = YW' = MP = c$, wo MP der zu XY konjugierte Durchmesser ist. Es ist also $XU \cdot YV = XW^2 = c^2$, und man kann jenem Satz die Form geben:

Satz α. Das Produkt der auf zwei Paralleltangenten durch eine veränderliche dritte Tangente abgeschnittenen Tangentenabschnitte ist konstant und gleich dem Quadrat des in dieselbe Parallelrichtung fallenden halben Kurvendurchmessers.

2) Zieht man durch den Brennpunkt F die Gerade FZ in derselben Parallelrichtung und wählt diejenige Tangente UV, welche in Z berührt, so wird nach Satz 33 $\sphericalangle XFU = UFZ$ und $\sphericalangle YFV = VFZ$; davon aber ist jeweils der letztere als Wechselwinkel gleich einem anderen, nämlich $UFZ = FUX$ und

diese liefern den nebenstehenden Satz α nebst andern Beziehungen etwa in folgender Form, welche zugleich den nebenstehenden Satz β in sich schließt:

Satz. Die Abschnitte, welche auf zwei festen Paralleltangenten x, y durch eine veränderliche drittte z, oder welche auf einer festen Tangente z durch ein veränderliches Paar von Paralleltangenten x, y abgeschnitten werden, ergeben jeweils ein konstantes Produkt, nämlich im ersten Falle gleich dem Produkt der Fahrstrahlen FX, FY von einem der Brennpunkte nach den beiden Berührungspunkten der Paralleltangenten oder gleich dem Quadrate des in die Parallelrichtung fallenden Kurvenhalbmessers c, bezw. in beiderlei Fällen gleich dem Produkt der beiden Fahrstrahlen aus beiden Brennpunkten F und F′ nach dem Berührungspunkt X, Y, Z einer festgehaltenen Tangente x, y, z oder gleich dem Quadrat des zum Halbmesser d des festen Berührungspunktes X, Y, Z konjugierten Kurvenhalbmessers c.

Erkl. 547. Das Dreieck FF′X in Figur 166 und 167 wird durch die Mittellinie MX in zwei Teildreiecke geteilt, deren Winkel im Punkte M zwei Supplementwinkel sind. Daher haben beide Teildreiecke dieselbe Projektion der Mittellinie MX auf die Grundseite FF′, und man kann für die Seiten FX und F′X entweder den allgemeinen Pythagoreischen Satz oder den Cosinussatz der Trigonometrie anwenden. Nach ersterem ist $\overline{FX}^2$ bezw. $\overline{F'X}^2$ gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten d, e vermehrt bezw. vermindert um das doppelte Rechteck aus der einen derselben d und ihrer Projektion auf die andere. Bei der Summe $\overline{FX}^2 + \overline{F'X}^2$ fällt dieses einmal addierte und einmal subtrahierte Zusatzglied fort, und bleibt beiderseits $e^2 + d^2$. — Nach dem Cosinussatz ist $\overline{FX}^2$ bezw. $\overline{F'X}^2 = e^2 + d^2 \pm 2e \cdot d \cdot \cos(ed)$. Auch $VFZ = FVY$, also sind die Dreiecke XFU und YFV gleichschenklig, und man erhält $XU = FX$ und $YV = YF$, wo noch letztere Strecke gleich der Gegenseite F′X im Parallelogramm FYF′X. Demnach wird obige Produktengleichheit $XU \cdot YV = c^2$ zu $FX \cdot F'X = c^2$.

Satz β. Das Produkt der beiden Leitstrahlen eines beliebigen Kurvenpunktes ist gleich dem Quadrat desjenigen halben Kurvendurchmessers, welcher zum Durchmesser 2d des gewählten Peripheriepunktes konjugiert ist.

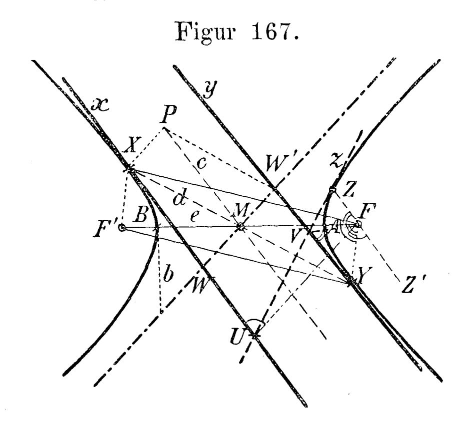
3) Nun ergibt sich über dieselben beiden Leitstrahlen des Punktes X aus planimetrischen oder trigonometrischen Beziehungen im Dreieck FF′X die Gleichung $\overline{FX}^2 + \overline{F'X}^2 = 2(\overline{FM}^2 + \overline{MX}^2) = 2(e^2 + d^2)$. Wird hierzu die doppelte Gleichung des vorigen Satzes addiert, nämlich $2\,\overline{FX} \cdot \overline{F'X} = 2c^2$, so folgt das Quadrat der Summe $FX + F'X$, welche selber gleich 2a ist, nämlich $\overline{FX}^2 + \overline{F'X}^2 + 2\,\overline{FX} \cdot \overline{F'X} = (\overline{FX} + \overline{F'X})^2 = (2a)^2 = 2(e^2 + d^2) + 2c^2$. Hiernach ist $2a^2 = e^2 + d^2 + c^2$, also $d^2 + c^2 = 2a^2 - e^2 = 2a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$. Damit ist gefunden:

Satz γ. Die Quadrate je zweier konjugierten Ellipsenhalbmesser ergeben konstante Summe, also gleich der Summe der Halbaxenquadrate.

4) An der Hyperbel gilt Satz α ohne jede Aenderung ebenfalls. Dasselbe stimmt für Satz β mit der Abänderung, daß die Winkel des Dreiecks FXU andere Lage haben. Es liegt nämlich (Figur 167) Punkt F außerhalb des Winkels der Tangenten UX und UZ, und so wird $\sphericalangle XFU = UFZ' = FUX$, also wieder $XU = FX$ und $YV = YF =$

hier fällt bei Addition das Zusatzglied fort, und bleibt $\overline{FX}^2 + \overline{F'X}^2 = 2(e^2 + d^2)$. Das ist aber die Quadratsumme der beiden Fahrstrahlen, deren einfache Summe als konstante Größe gleich der Summe $FA + F'A = F'A + F'B = AB = 2a$ ist.

Figur 167.



$F'X$, folglich auch wieder $XU \cdot YV = FX \cdot F'X = c^2$, wie Satz β aussagt. Endlich gilt auch wieder im Dreieck $FF'X$ die Gleichung $\overline{FX}^2 + \overline{F'X}^2 = 2(e^2 + d^2)$. Und nun wird die verdoppelte Gleichung $2\overline{FX} \cdot \overline{F'X} = 2c^2$ nicht addiert, sondern subtrahiert. Dadurch entsteht $\overline{FX}^2 + \overline{F'X}^2 - 2\overline{FX} \cdot \overline{F'X} = (FX - F'X)^2 = (2a)^2 = 2(e^2 + d^2) - 2c^2$. Hiernach wird $2a^2 = e^2 + d^2 - c^2$, also $d^2 - c^2 = 2a^2 - e^2 = 2a^2 - (a^2 + b^2) = a^2 - b^2$. Damit ist gefunden:

Satz δ. Die Quadrate je zweier konjugierten Hyperbelhalbmesser ergeben konstante Differenz, nämlich gleich der Differenz der Halbaxenquadrate.

Erkl. 548. Im vierten Teil vorstehender Auflösung ist für den nicht schneidenden Durchmesser der Hyperbel jeweils die reelle Länge des Abstandes der Potenzpunkte gesetzt. Dieselbe entsteht für die Nebenaxe als Abschnitt b der Scheiteltangente bis zur Asymptote, für den schiefen zu x und y parallelen Durchmesser als Abschnitt $XW = YW'$ der Asymptote oder nach Figur 164 als Abschnitt MP dieses Durchmessers, gebildet durch die von W oder W' parallel zum Durchmesser d, oder die vom Berührungspunkt X parallel zur Asymptote gelegte Gerade. — Wenn man in nebenstehender Auflösung statt der Größe c^2 einsetzt $-c^2$, statt b^2 ebenso $-b^2$, so wird die Unterscheidung vom Satz γ entbehrlich, indem die Summe der konjugierten Halbaxenquadrate stehen bleiben kann, und darin von selber das eine Quadrat negatives Vorzeichen erhält.

Aufgabe 215. Man suche die Länge zweier gleichgroßen konjugierten Ellipsendurchmesser.

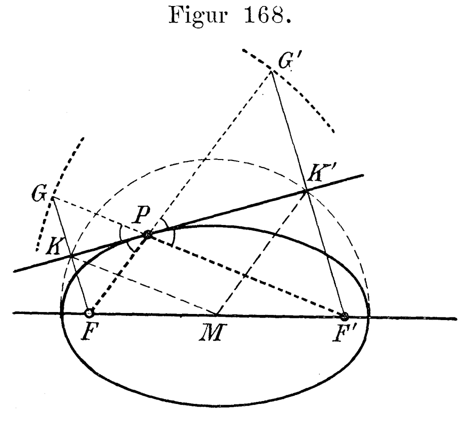
Aufgabe 216. Dieselbe Aufgabe für eine Hyperbel zu untersuchen.

Aufgabe 217. Man untersuche die Lage des Gegenpunktes eines Brennpunktes inbezug auf eine beliebige Kurventangente.

Erkl. 549. In gleicher Weise, wie nebenstehend für den Gegenpunkt G zu F, findet man auch für den Gegenpunkt G' zu F' inbezug auf dieselbe Tan-

Auflösung. Fällt man vom Brennpunkte F einer Ellipse (Figur 168) oder einer Hyperbel (Figur 169) auf eine Tangente die Senkrechte, so bildet diese wegen Satz 33 die Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks, welches die Tangente als Mittelsenkrechte und deren Berührungs-

Figur 168.



Figur 169.

gente in Figur 168: $FG' = PG' + FP = PF' + FP = 2a$, bezw. in Figur 169: $FG' = PF - PG' = PF - PF' = 2a$. Demnach liegen alle Punkte G auf dem Kreis um F', alle Punkte G' auf einem Kreis um F, jeweils mit Radius 2 a. Und für die Parabel ist $2a = \infty$, also fällt dieser Kreis zusammen mit der Leitgeraden der Parabel.

punkt als Spitze hat. Folglich ist bei der Ellipse $F'G = PG + F'P = PF + F'P = AB = 2a$, bei der Hyperbel $F'G = PG - F'P = PF - PF' = AB = 2a$, d. h. der Gegenpunkt eines Brennpunktes inbezug auf jede Kurventangente liegt auf einem Kreis um den anderen Brennpunkt mit Radius gleich der Hauptaxe der Kurve.

Aufgabe 218. Man beweise, daß die Fußpunkte der Senkrechten von beiden Brennpunkten auf jede Kurventangente auf einem Kreis mit Radius a um den Kurvenmittelpunkt liegen.

Erkl. 550. Der Kreis mit Radius a um den Mittelpunkt fällt für die Parabel zusammen mit der Scheiteltangente. Auf ihr liegt der Fußpunkt jeder vom Parabelbrennpunkt auf eine Tangente gefällten Senkrechten.

Auflösung. Im Dreieck FF'G der Figuren 168 und 169 ist der Kurvenmittelpunkt M zugleich Mittelpunkt der Grundseite und MK bezw. MK' Mittelparallele des Dreiecks, also ist $MK = \frac{1}{2} FG$, $MK' = \frac{1}{2} FG'$, folglich $MK = MK' = a$.

Aufgabe 219. In gegebenem Kurvenpunkt einer durch ihre beiden Brennpunkte bestimmten Kurve die Kurventangente zu zeichnen.

Aufgabe 220. Von einer durch ihre beiden Brennpunkte bestimmten Kurve soll der Kurvenpunkt gefunden werden, in welchem sie von einer gegebenen Geraden berührt wird.

Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

Aufgabe 2. In Figur 5b F so tief zu wählen, daß FC//EA, oder E so hoch, daß EC//FA.

Aufgabe 4. Der erste Fall liefert Figur 5c mit überschlagenem Vierseit und Kurve in den Außenwinkeln bei A und C, der zweite ebenfalls Figur 5c mit Kurve in den Außenwinkeln bei B und D u. s. w.

Aufgabe 5. Man legt am einfachsten zwei parallele Tangenten an die Hyperbel und wählt auf jeder davon einen der Punkte E und F in der durch die Einzelfälle von Figur 109 vorgeschriebenen Lage.

Aufgabe 8. Grenzfälle bilden unter I die Hyperbeltangenten, also auch die Asymptoten selber, sowie etwa die unendlich ferne Gerade und die Kurvenaxen, unter II die Kurvenpunkte selber, sowie die Punkte der Asymptoten.

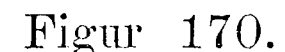
Aufgabe 8a. Die Asymptote ist selber die Gerade x nach Figur 8, liefert also Punkt VII als Berührungspunkt der Asymptote und als unendlich fernen Punkt der gesuchten Polaren p.

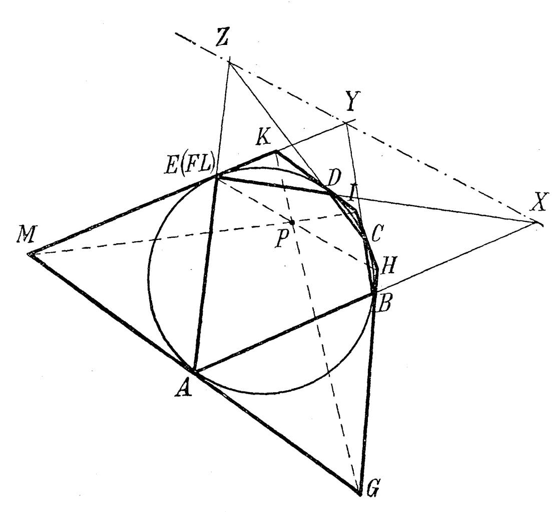
Aufgabe 17. Man wählt als E den Schnittpunkt von p mit einer Tangente, auf welcher man den Berührungspunkt schon kennt, konstruiert die zweite Tangente durch E und ebenfalls nach Brianchon den Berührungspunkt auf derselben. Dann ist der Pol der Schnittpunkt der Berührungssehne zu E mit dem noch zu konstruierenden vierten harmonischen Strahl zu p und den beiden Tangenten durch E.

Aufgabe 21. Man wählt als e die Verbindungsgerade von P mit einem Kurvenpunkte, durch welchen man die Tangente schon kennt, konstruiert den zweiten Kurvenpunkt auf e und ebenfalls nach Paskal die Tangente in demselben. Dann ist die Polare die Verbindungsgerade des Tangentenschnittpunktes zu e mit dem noch zu konstruierenden vierten harmonischen Punkt zu P und dem Kurvenschnittpunkte auf e.

Aufgabe 25. Es ist das n-Seit, welches gebildet wird aus den Hyperbeltangenten in den Eckpunkten des gegebenen Sehnen-n-Ecks.

Aufgabe 26. Es ist das eingeschriebene Sehnenviereck der Parabel, welches aus den Berührungspunkten der gegebenen vier Tangenten gebildet wird.


Figur 170.



Aufgabe 28. Man erhält aus dem Satz von Paskal fürs Fünfeck jenen von Brianchon fürs Fünfseit.

Aufgabe 31. Zwei Kreise können einander nach den Ergebnissen der Planimetrie höchstens in zwei Punkten schneiden, können aber bis zu vier gemeinsame Tangenten haben. Diese Eigenschaft scheint dem Inhalt der Erkl. 368 zu widersprechen. Jedoch erhält man Uebereinstimmung der Aussagen, wenn man unter Hinzunahme der Erörterungen in Antwort 70 und ff. feststellt, daß zwei Kreise jedenfalls gemeinsam haben die beiden absoluten Punkte der orthogonalen Involution auf der unendlich fernen Geraden.

Aufgabe 35. Man wählt beliebig in Figur 118 die vier Geraden $t_1 t_2 a b$, in Figur 119 die Punkte $S_1 S_2 A B$. Und von diesen Elementen aus wird hinzugewählt nach Aufgabe 34 etwa erst C_1 zu $D_1 A_1 B_1$ projektivisch mit c_1 zu $d_1 a_1 b_1$ sowie C_2 zu $E_2 A_2 B_2$ projektivisch mit c_2 zu $e_2 a_2 b_2$. Dadurch sind $S_1 S_2$ sowie $t_1 t_2$ festgelegt, und die weitere Konstruktion der beiden Kurven kann vor sich gehen.

Aufgabe 38. Man wählt nicht beide Sekanten e und f willkürlich, sondern nach Festlegung von Punkt P nebst Polare p und Sekante e wird als Sekante f die nach dem Punkt E auf p führende Gerade gewählt, so daß die zwei Polardreiecke PQR und PEF mit gemeinsamer Ecke P entstehen.

Aufgabe 44 und 46. Wenn K im unendlichen liegt, so werden die Geraden e, d, c einander parallel, und man erhält ein Viereck von der Art der Figur 8 und 9 des II. Teils.

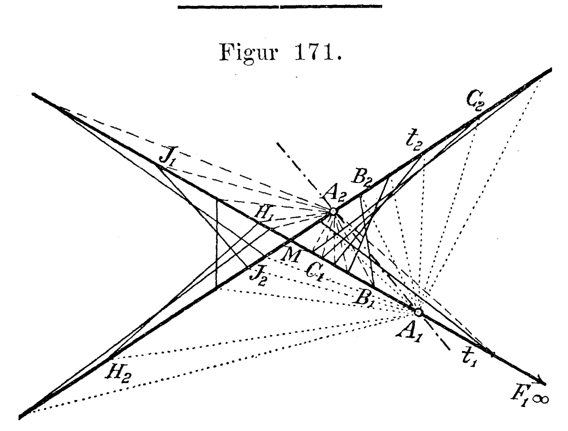
Aufgabe 55. Die vier Tangenten liefern ein Polardreieck, und dieses liefert zu dem gegebenen Kurvenpunkt drei weitere.

Aufgabe 56. Die vier Kurvenpunkte liefern ein Polardreiseit, und dieses liefert zu der gegebenen Kurventangente drei weitere.

Aufgabe 62. Da jedes Polardreieck einen inneren Punkt und eine äußere Seite haben muß, so kann auch weder die Ordnungskurve noch die Klassenkurve je ganz innerhalb der Kernkurve liegen, auch erstere nie ganz außerhalb.

Aufgabe 64. Ein Viereck OPQR erzeugt eine ganze Reihe einzelner Teildreiecke, und jedes einzelne hat mit seinem polar entsprechenden ein besonderes Kollineationscentrum und Kollineationsaxe, so daß keine einfache allgemeine Beziehung aufzustellen ist.

Figur 171.

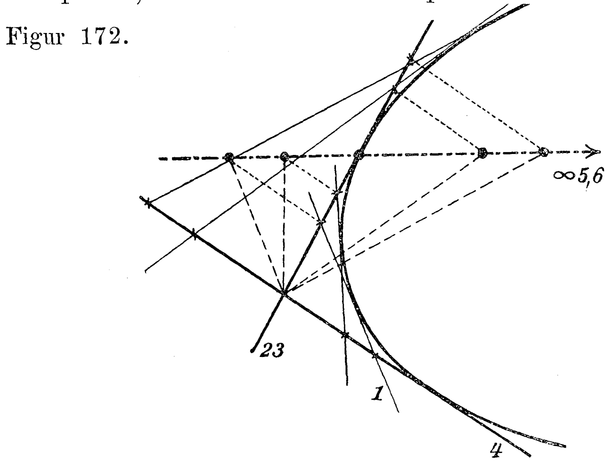


Aufgabe 68. Jedes Parallelenpaar durch die Punkte $A_1 A_2$ der gegebenen Tangente trifft die Asymptoten in den Punkten $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $H_1 H_2$, $J_1 J_2$ einer neuen Tangente.

Aufgabe 70. Man legt durch beliebige Punkte der Berührungssehne Parallelen zu den beiden Tangenten und verbindet die Schnittpunkte.

Aufgabe 71. Als konjugierte Geraden sind zu legen durch beliebige Punkte des gegebenen Durchmessers die eine Gerade nach dem Tangentenschnittpunkt, die andere Gerade parallel zur zweiten Tangente.

Figur 172.



Vervollständigt man das Parallelogramm aus diesen beiden Geraden mit der ersten Tangente als Diagonale, so ist von den beiden anderen Parallelseiten die eine stets die gegebene zweite Tangente, die andere eine neue Parabeltangente. (Eine Bestätigung derselben Konstruktion liefert deren Ausführung nach Brianchon mit der in der Figur angegebenen Bezifferung der Elemente (Aufgabe 215 des II. Teils), wobei der Punkt auf dem Durchmesser jeweils zum Punkt des Brianchon wird.)

Aufgabe 74. Der Asymptotenschnittpunkt als Hyperbelmittelpunkt liefert mit dem gegebenen Punkte einen Durchmesser, und je zwei harmonische Punkte desselben liefern nach Satz b zwei neue Hyperbelpunkte. Die Konstruktion nach Paskal ist Aufgabe 222 des II. Teiles.

Aufgabe 76. Man kann nur nach der zweiten oder dritten Auflösung der Aufgabe 75 verfahren.

Aufgabe 77. Ein einziges Paar Parallelsehnen liefert als Verbindungsgerade der Mittelpunkte die Durchmesserrichtung der Parabel (s. Figur 32).

Aufgabe 79. Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Parallelseiten des Trapezes ist stets Durchmesser.

Aufgabe 80 und 85. Der Parallelogrammmittelpunkt ist stets auch Kurvenmittelpunkt.

Aufgabe 83. Man hat für den einen der notwendigen Durchmesser die Wahl, ob man ihn nach der ersten oder zweiten Auflösung 82 finden will, indem man nach Paskal entweder einen neuen Kurvenpunkt konstruiert oder die Tangente in einem zweiten der gegebenen Punkte.

Aufgabe 84. Die Mittelparallele des Streifens ist Durchmesser für jede Kurve, welche überhaupt die beiden Paralleltangenten berührt.

Aufgabe 89 und 89a. Durch Verdoppelung mittels des bekannten Kurvenmittelpunktes erhält man jedesmal sechs Kurvenelemente für Ellipse oder Hyperbel, bei der Parabel ersetzt M die Gruppe ($P_\infty T_\infty$), also auch ein Elementepaar.

Aufgabe 90. P_∞ ist Asymptotenrichtung, also die Gerade MP_∞ selber Asymptote.

Aufgabe 94. Gemeinsam ist allen Kurven nicht nur der Mittelpunkt des Parallelogramms als Kurvenmittelpunkt, sondern auch das Paar konjugierter Durchmesser, welches durch die Mittelparallelen des Sehnenparallelogramms bezw. die Diagonalen des Tangentenparallelogramms gebildet wird.

Aufgabe 98. Bei der Hyperbel gibt es zu nicht schneidendem Durchmesser keine Kurvenschnittpunkte und zu schneidendem Durchmesser keine Paralleltangenten, bei der Parabel überhaupt keine Sehnenparallelogramme und Tangentenparallelogramme.

Aufgabe 103. Hyperbel aus qQ und einer Asymptotenrichtung nebst zwei Kurvenpunkten (oder einem Punkt samt Tangente), aus qQ und zwei Asymptotenrichtungen nebst einem Kurvenpunkt.